ANDRÉ WEIL

Un théorème fondamental de Chern en géométrie riemannienne

Séminaire N. Bourbaki, 1962, exp. n° 239, p. 273-284

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__273_0>

Séminaire BOURBAKI
14e année, 1961/62, n° 239

Mai 1962

UN THÉORÈME FONDAMENTAL DE CHERN EN GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE

par André WEIL

Soit V une variété riemannienne connexe de dimension n. Soit $T(M)$ l'espace des vecteurs tangents à V en M, muni de la structure euclidienne déterminée par la structure riemannienne de V. Si α est un chemin, différentiable par morceaux, d'origine M et d'extrémité M' sur V, le transport parallèle suivant α détermine un isomorphisme $i(\alpha)$ de $T(M)$ sur $T(M')$; si β est un chemin analogue d'origine M', on a $i(\alpha\beta) = i(\beta) \circ i(\alpha)$. L'ensemble des $i(\gamma)$, quand on prend pour γ tous les chemins (différentiables par morceaux) d'origine et d'extrémité M, forme un sous-groupe $H(M)$ du groupe $A(M)$ des automorphismes de $T(M)$, qui s'appelle, comme on sait, le groupe d'holonomie de V en M ; si α est un chemin allant de M à M', on a $H(M') = \alpha H(M) \alpha^{-1}$. Soit M_o un point de V ; l'ensemble des isomorphismes $i(\alpha)$ quand on prend pour α tous les chemins (différentiables par morceaux) d'origine M_o forme, du point de vue ensembliste, un fibré principal P_H de base V sur lequel le groupe $H = H(M_o)$ opère à droite. On peut aussi présenter les choses de la manière suivante. Soit R_o un repère en M_o, c'est-à-dire une base orthonormale dans $T(M_o)$; P_H s'identifie avec l'ensemble des repères $i(\alpha) R_o$ qui se déduisent de R_o par transport parallèle suivant un chemin quelconque. Plus généralement, soit G un sous-groupe, contenant H, du groupe $A = A(M_o)$ des automorphismes de $T(M_o)$; l'ensemble des repères de la forme $i(\alpha)\, gR_o$, où $g \in G$ et où α est un chemin d'origine M_o, forme, du point de vue ensembliste, un fibré principal P_G de base V et de groupe G. Tous ces fibrés sont sous-ensembles du fibré P_A de tous les repères en tous les points de V ; comme il est bien connu, P_A peut être considéré comme fibré principal au sens de la géométrie différentielle, et le transport parallèle détermine une connexion (dite de Levi-Civita) sur ce fibré ; d'ailleurs, si $T(M_o)$ est identifié à $\mathbb{R}^n$ au moyen du repère R_o, A s'identifie au groupe orthogonal $O(n, \mathbb{R})$.

On supposera désormais que V a un groupe fondamental dénombrable ; on peut alors appliquer les résultats de AMBROSE et SINGER [1] sur le groupe d'holonomie des fibrés principaux munis d'une connexion. On en conclut que tout point de P_H (resp. de H) a, dans P_A (resp. dans A), un voisinage ouvert U tel que la composante connexe par arcs de ce point dans $U \cap P_H$ (resp. $U \cap H$)

soit une sous-variété de P_H (resp. H) ; cela permet de remplacer, sur P_H (resp. H), la topologie induite par celle de P_A (resp. A) par une topologie plus fine pour laquelle H devient un groupe de Lie, et P_H un fibré principal de base V et de groupe H au sens de la géométrie différentielle ; cela posé, il résulte immédiatement des définitions que la connexion de Levi-Civita de P_A détermine, d'une manière unique, une connexion dans P_H. Il en est de même si, au lieu de H et P_H, on considère G et P_G, où G désigne comme plus haut un sous-groupe de A contenant H, et où on suppose de plus que G a au plus une infinité dénombrable de composantes connexes par arcs. Dans les applications, on prend le plus souvent pour G un sous-groupe fermé de A, qui n'a donc qu'un nombre fini de composantes connexes ; en ce cas, on peut se dispenser d'appliquer [1], car P_G est alors une sous-variété fermée de P_A.

Plaçons-nous dans le cas général ; et soit φ l'injection canonique de G (muni de sa structure de groupe de Lie) dans $A = O(n, \mathbb{R})$; φ est une représentation continue de G dans A, mais n'est pas un isomorphisme topologique de G sur son image dans A, sauf si celle-ci est fermée dans A. En revanche, l'application tangente à φ en e (élément neutre de G) est un homomorphisme injectif φ' de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ de A. Comme on a identifié A à $O(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{a}$ s'identifie à l'algèbre de Lie des matrices alternées $(m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Soit (X_λ) une base de $\mathfrak{g}$; on posera $\varphi'(X_\lambda) = (m'_{\lambda ij})$. La connexion de Levi-Civita dans P_G est donnée par une forme différentielle θ sur P_G, à valeurs dans $\mathfrak{g}$, satisfaisant à la formule

$$\theta(xg) = g^{-1}\,dg + g^{-1}\,\theta(x)\,g \quad . \tag{1}$$

Dans (1), le premier membre désigne la forme différentielle vectorielle (à valeurs dans $\mathfrak{g}$) sur l'espace $P_G \times G$, image réciproque de θ par l'application $(x, g) \to xg$ de $P_G \times G$ sur P_G. Au second membre de (1), $g^{-1}\,dg$ désigne la forme différentielle invariante à gauche sur G, qui, à tout vecteur v tangent à G en un point g, fait correspondre le vecteur de $\mathfrak{g}$ déduit de v par la translation à gauche g^{-1} ; $g^{-1}\,\theta(x)\,g$ désigne le transformé de $\theta(x)$ par l'automorphisme de $\mathfrak{g}$ induit par l'automorphisme intérieur $s \to g^{-1}sg$ de G, et s'écrit aussi $Ad(g^{-1})\,\theta(x)$, où $Ad(g)$ est l'image de g dans le groupe adjoint. Si on écrit $\theta(x) = \sum_\lambda \theta^\lambda(x)\,X_\lambda$, où les θ^λ sont des formes différentielles à valeurs scalaires, (1) s'écrit aussi :

$$\theta^\lambda(xg) = \xi^\lambda(g) + \sum_\mu a^\lambda_{\ \mu}(g^{-1})\,\theta^\mu(x)$$

si on a posé $Ad(g) = \|a^\lambda_\mu(g)\|$, et si (ξ^λ) est la base des formes différentielles invariantes à gauche sur G, duale de la base (X_λ) pour $\mathfrak{g}$. Dire que θ est la connexion de Levi-Civita dans G équivaut à dire que $\varphi' \circ \theta$ est la connexion de Levi-Civita au sens usuel (dans l'algèbre de Lie du groupe orthogonal). On écrira $\varphi' \circ \theta = \Theta = \|\Theta_{ij}\|$, avec $\Theta_{ij} = \sum_\lambda m'_{\lambda ij} \theta^\lambda$.

D'autre part, par définition de P_G, tout point x de P_G détermine un repère $R(x)$ au point $M = \pi(x)$ de V, projection de x sur V. Soit v un vecteur tangent à P_G en x ; sa projection $\pi'(v)$ sur V est un vecteur tangent à V en $\pi(x)$; si on désigne par $\omega_i(x\,;\,v)$ les composantes de $\pi'(v)$ par rapport au repère $R(x)$, les ω_i $(1 \leq i \leq n)$ sont des formes différentielles sur P_G. Avec un symbolisme évident, le fait que $R(x)$ est un repère, c'est-à-dire une base orthonormale de $T(\pi(x))$, s'exprime par la relation $ds^2 = \sum_i \omega_i^2$, le ds^2 étant celui qui définit la structure riemannienne de V. De plus, si on pose $\varphi(g) = \|m_{ij}(g)\|$, le fait que le repère $R(xg)$ se déduit du repère $R(x)$ par $\varphi(g)$ se traduit par la formule

$$\omega_i(xg) = \sum_j m_{ji}(g)\, \omega_j(x) \tag{2}$$

qui peut s'exprimer aussi en disant que la forme à valeurs vectorielles $\omega = \sum \omega_i e_i$ (où (e_i) est la base canonique de $\mathbb{R}^n$) est une forme "tensorielle" sur P_G, appartenant à la représentation φ de G. Enfin, le fait que $\varphi' \circ \theta$ est la connexion de Levi-Civita de P_A s'exprime, comme il est connu, par la relation $d\omega = -\Theta\omega$, c'est-à-dire

$$d\omega_i = -\sum_j \Theta_{ij}\, \omega_j \quad . \tag{3}$$

Cela équivaut à dire que la "différentielle covariante" de la "forme tensorielle" ω, prise au moyen de la connexion Θ, est nulle. Pour des raisons géométriques dans lesquelles on n'entrera pas ici, on exprime aussi ce même fait en disant que la connexion Θ est "sans torsion".

On voit de plus que, dans les conditions ci-dessus, les ω_i et les θ^λ forment, en chaque point de P_G, une base des covecteurs en ce point, de sorte que toute forme différentielle sur P_G (de degré quelconque, scalaire ou vectorielle) s'exprime au moyen des ω_i et des θ^λ.

Réciproquement, supposons qu'on parte des données suivantes :

a. un groupe de Lie G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et une représentation injective φ de G dans $O(n, \underset{\sim}{R})$;

b. une variété V, et un fibré principal P_G de base V et de fibre G ;

c. pour tout $x \in P_G$, une base $R(x)$ de l'espace des vecteurs tangents à V au point $\pi(x)$ projection de x sur V, de telle sorte que, pour $g \in G$, $R(xg)$ se déduise de $R(x)$ au moyen de la transformation orthogonale $\varphi(g)$.

La condition (c) s'exprime encore en disant que, si on définit n formes différentielles ω_i sur P_G au moyen des repères $R(x)$, exactement comme il a été expliqué ci-dessus, ces formes satisfont à (2) ; on en conclut que $\sum \omega_i^2$ est l'image réciproque par π d'un ds^2 sur V, les bases $R(x)$ étant orthonormales (donc étant des repères) pour la structure riemannienne définie sur V par ce ds^2. Il y a alors une connexion de Levi-Civita Θ, et une seule, attachée à ce ds^2 ; par définition, elle satisfait à (3) ; comme φ est injective, il y a donc au plus une connexion θ dans P_G (autrement dit, une forme différentielle sur P_G, à valeurs dans $\mathfrak{g}$ et satisfaisant à (1)) telle que $\Theta = \varphi' \circ \theta$; lorsqu'il existe une telle connexion θ, on dira pour abréger (et non sans abus de langage) que les données (a), (b), (c) déterminent sur V une "structure sans torsion, de groupe G". Il s'ensuit alors aussitôt des définitions que le groupe d'holonomie H du ds^2 qu'on a introduit sur V est contenu dans l'image $\varphi(G)$ de G dans le groupe orthogonal ; on retrouve donc exactement la situation décrite plus haut. C'est des données (a), (b), (c), avec les conditions ci-dessus, que part CHERN dans le mémoire [2] qu'il s'agit d'exposer ici. Un exemple important, que CHERN se proposait précisément de généraliser dans ce travail, est fourni par la géométrie kählérienne ; là, $n = 2m$ est pair, G est le groupe "unitaire" à m variables complexes, et φ est l'injection "naturelle" de G dans le groupe orthogonal à $2m$ variables réelles ; P_G est le fibré des repères au sens de la géométrie hermitienne déterminée sur les espaces de vecteurs tangents à V par la structure kählérienne de V ; à chacun de ces repères, on associe d'une manière évidente un repère au sens de la géométrie euclidienne dans ces mêmes espaces ; le fait que la "structure de groupe G" ainsi définie sur V est "sans torsion" est une conséquence à peu près immédiate de la définition d'une structure kählérienne.

Toujours suivant CHERN, nous allons maintenant établir les formules fondamentales d'une "structure de groupe G sans torsion". Tout d'abord, la forme de courbure de la connexion θ est définie, comme il est bien connu, par la formule

$$(4) \qquad \varkappa = d\theta + \frac{1}{2}[\theta , \theta]$$

où $d\theta$ est la différentielle extérieure au sens usuel ; cette formule signifie que $\varkappa$ est une forme de degré 2, et que, si v, v' sont deux vecteurs tangents à P_G en un point x, on a :

$$\varkappa(x ; v , v') = (d\theta)(x ; v , v') + \frac{1}{2}[\theta(x ; v) , \theta(x ; v')] \quad ,$$

où bien entendu $[\ ,\ ]$ désigne le crochet dans l'algèbre de Lie g. On sait que la courbure est une forme tensorielle d'espèce Ad, c'est-à-dire qu'on a :

$$\varkappa(xg) = g^{-1}\varkappa(x)\ g = Ad(g^{-1}).\varkappa(x) \quad .$$

Si on exprime $\varkappa$ au moyen de la base (X_λ) de g, et au moyen des générateurs $(\omega_i , \theta^\lambda)$ de l'algèbre extérieure des multicovecteurs en tout point de P_G, on obtient pour $\varkappa$ une expression

$$\varkappa = \frac{1}{2}\sum \varkappa^\lambda_{ij}\ \omega_i \wedge \omega_j . X_\lambda \quad ;$$

le fait que les θ^λ ne figurent pas dans cette expression résulte de ce que $\varkappa$ est une "forme tensorielle". De la relation $\Theta = \varphi' \circ \theta$ résulte alors que la "courbure riemannienne" Ω du ds^2 donné n'est autre que $\varphi' \circ \varkappa$. On a d'ailleurs, avec les notations usuelles de la géométrie riemannienne

$$\Omega = d\Theta + \Theta^2 = \frac{1}{2}\left\|\sum_{k,\ell} R_{ijk\ell}\ \omega_k \wedge \omega_\ell\right\| \quad ,$$

où $R_{ijk\ell}$ est le tenseur de courbure usuel ; la définition de $R_{ijk\ell}$ implique évidemment qu'on a

$$R_{ijk\ell} = - R_{jik\ell} = - R_{ij\ell k} \quad .$$

De plus, en différentiant (3), et en tenant compte de la définition de Ω, on obtient, comme chacun sait :

$$R_{ijk\ell} + R_{ik\ell j} + R_{i\ell jk} = 0 \quad ,$$

ce qui, joint aux relations précédentes, implique

(5) $$R_{ijk\ell} = R_{k\ell ij} \quad .$$

Par ailleurs, la relation $\Omega = \varphi' \circ \varkappa$ s'écrit aussi :

(6) $$R_{ijk\ell} = \sum_\lambda m'_{\lambda ij}\, \varkappa^\lambda{}_{k\ell} \quad .$$

Écrivons l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ du groupe orthogonal $A = O(n, \underset{\sim}{R})$, ou autrement dit l'espace des matrices alternées, comme somme directe de l'espace $\varphi'(\mathfrak{g})$, qui est engendré par les matrices $(m'_{\lambda ij})$, et d'un espace supplémentaire à $\varphi'(\mathfrak{g})$, engendré par des matrices $(m''_{\rho ij})$; cela permet d'écrire, d'une manière et d'une seule :

(7) $$\varkappa^\lambda{}_{ij} = \sum_\mu r^{\lambda\mu}\, m'_{\mu ij} + \sum_\rho s^{\lambda\rho}\, m''_{\rho ij} \quad .$$

En substituant ces expressions dans (6), et tenant compte de (5), on obtient :

$$\sum_\lambda \varkappa^\lambda{}_{k\ell}\, m'_{\lambda ij} = \sum_\lambda \Big(\sum_\mu r^{\mu\lambda}\, m'_{\mu k\ell}\Big)\, m'_{\lambda ij} + \sum_\rho \Big(\sum_\lambda s^{\lambda\rho}\, m'_{\lambda k\ell}\Big)\, m''_{\rho ij} \quad .$$

Comme les matrices alternées $(m'_{\lambda ij})$, $(m''_{\rho ij})$ sont linéairement indépendantes par hypothèse, cela implique qu'on a

(8) $$\varkappa^\lambda{}_{k\ell} = \sum_\mu r^{\mu\lambda}\, m'_{\mu k\ell} \quad ,$$

puis, par comparaison avec (7), $r^{\lambda\mu} = r^{\mu\lambda}$. On a ainsi obtenu une matrice symétrique $(r^{\lambda\mu})$, ou, pour parler en termes intrinsèques, un élément symétrique $\sum r^{\lambda\mu} X_\lambda \otimes X_\mu$ de $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, qui détermine la courbure sur V au moyen des formules (6) et (8) ; on a aussi :

(9) $$R_{ijk\ell} = \sum_{\lambda,\mu} r^{\lambda\mu}\, m'_{\lambda ij}\, m'_{\mu k\ell} \quad .$$

Passons aux formules de différentiation covariante dans P_G. En chaque point de P_G, soit (D_i, X_λ) la base de l'espace des vecteurs tangents à P_G qui est duale de la base $(\omega_i, \theta^\lambda)$ de l'espace des covecteurs en ce même point. Autrement dit, les D_i, X_λ sont les champs de vecteurs sur P_G tels qu'on ait, pour toute fonction f sur P_G :

(10) $$df = \sum_i D_i f . \omega_i + \sum_\lambda X_\lambda f . \theta^\lambda \quad .$$

En différentiant et en tenant compte de (3) et (4), on obtient immédiatement les crochets des champs D_i , X_λ ; en particulier, on a :

$$[D_i , D_j] = - \sum_\lambda x^\lambda{}_{ij} . X_\lambda \qquad (11)$$

D'ailleurs les champs X_λ sont, en chaque point du fibré P_G , tangents à la fibre ; plus précisément, pour tout $x \in P_G$, le champ X_λ , sur la fibre passant par x , est l'image, par l'application $g \to xg$ de G sur cette fibre, du champ de vecteurs invariant à gauche sur G qui correspond au vecteur X_λ de l'algèbre de Lie g de G (c'est pourquoi on l'a désigné par la même lettre). Quant aux champs D_i , ce sont ceux qu'on obtient en chaque point x de P_G en relevant, au moyen de la connexion, les n vecteurs en $\pi(x)$ qui forment le repère $R(x)$.

En particulier, soit $g \to \mu(g) = (\mu_{\alpha\beta}(g))$ une représentation de G ; soit (f_α) un tenseur d'espèce μ sur P_G , ce qui veut dire qu'on a

$$f_\alpha(xg) = \sum_\beta \mu_{\alpha\beta}(g^{-1}) \ f_\beta(x)$$

pour $x \in P_G$, $g \in G$. En appliquant (10) aux fonctions f_α , et transformant la formule obtenue par l'automorphisme $x \to xg$ de P_G , on voit que les $D_i f_\alpha$ sont les composantes d'un tenseur d'espèce $\varphi \otimes \mu$: c'est ce qu'on exprime en disant que les D_i , lorsqu'on les applique aux tenseurs sur P_G , sont les "dérivations covariantes".

Soit maintenant η une forme différentielle de degré p sur V . On peut écrire cette forme (ou, si l'on tient à s'exprimer exactement, son image réciproque par π , image qui se note parfois $\eta \circ \pi$) comme suit :

$$\eta = \frac{1}{p!} \sum_{i_1,\dots,i_p} f_{i_1\dots i_p} \, \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p} \qquad (12)$$

où $(f_{i_1\dots i_p})$ est un tenseur antisymétrique d'espèce $\varphi \otimes \dots \otimes \varphi$. Comme l'expression de $d\eta$ ne peut pas non plus contenir les θ^λ , on a

$$d\eta = \frac{1}{p!} \sum_{i_0,\dots,i_p} D_{i_0} f_{i_1\dots i_p} \, \omega_{i_0} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p} \qquad (13)$$

où la "dérivée covariante" $D_{i_0} f_{i_1\dots i_p}$ est un tenseur d'espèce $\varphi \otimes \dots \otimes \varphi$

(produit tensoriel de $p+1$ facteurs φ), qui n'est plus antisymétrique, mais qu'on peut antisymétriser si on y tient. D'autre part, le $ds^2 = \sum \omega_i^2$ donné sur V détermine un opérateur $\star$:

$$\star \eta = \frac{1}{p!} \sum_{i_1,\dots,i_n} \varepsilon(i_1, \dots, i_n)\, f_{i_1\dots i_p}\, \omega_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{i_n} \quad ,$$

où $\varepsilon(i_1, \dots, i_n)$ est 1, -1 ou 0 suivant que $i_1, \dots, i_n$ est une permutation paire de $1, \dots, n$, une permutation impaire de $1, \dots, n$, ou contient un indice répété deux fois au moins. Cet opérateur permet de transformer les "produits extérieurs" en "produits intérieurs". En particulier, soit ξ une forme différentielle de degré 1 sur V ; elle détermine en tout point M de V un covecteur $\xi(M)$, donc un vecteur $X_\xi(M)$ au moyen de l'isomorphisme de l'espace $T(M)$ des vecteurs tangents à V en M sur son dual qui est déterminé par la structure euclidienne de $T(M)$; ξ définit ainsi un champ de vecteurs X_ξ sur V. Cela posé, si on note $e(\xi)$ l'opérateur $\eta \to \xi \wedge \eta$ de multiplication extérieure par ξ, et $i(X_\xi)$ le produit intérieur (gauche) par X_ξ, on a, pour toute forme η de degré p sur V :

$$i(X_\xi)\, \eta = (-1)^{np+n} \star e(\xi) \star \eta \quad ;$$

d'ailleurs, si η est donnée comme ci-dessus, et si $\xi = \sum F_i\, \omega_i$, on a

$$e(\xi)\, \eta = \frac{1}{p!} \sum_{i_0,\dots,i_p} F_{i_0}\, f_{i_1\dots i_p}\, \omega_{i_0} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p} \quad , \tag{14}$$

(15) $i(X_\xi)\, \eta$

$$= \frac{-1}{p!} \sum_{i_1,\dots,i_{p-1}} \sum_{\rho=1}^{p} \Big(\sum_h (-1)^\rho F_h\, f_{i_1\dots i_{\rho-1} h i_\rho \dots i_{p-1}}\Big)\, \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_{p-i}} \quad .$$

On notera que (14) et (15) sont valables pourvu que η soit donnée par (12), même si $f_{i_1\dots i_p}$ n'est pas antisymétrique ; il en est de même de (13).

On sait d'autre part qu'en géométrie riemannienne les opérateurs δ, Δ sont définis par les formules :

$$\delta\eta = (-1)^{np+n+1} \star d \star \eta \;, \qquad \Delta = d\delta + \delta d \quad .$$

Le même calcul qui donne (15) à partir de (14) donne, si on l'applique à (13) :

(16) $\delta\eta$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\overline{i_1, \ldots, i_{p-1}}} \sum_{\rho=1}^{p} \left(\sum_{h} (-1)^{\rho} D_h f_{i_1 \ldots i_{\rho-1} h i_{\rho} \ldots i_{p-1}}\right) \omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_{p-1}} ,$$

cette formule étant d'ailleurs valable, de même que (13), même si $f_{i_1 \ldots i_p}$ n'est pas antisymétrique. On en conclut immédiatement :

$$(17) \quad -\Delta\eta = \frac{1}{p!} \sum_{\overline{i_1, \ldots, i_p}} (f'_{i_1 \ldots i_p} + f''_{i_1 \ldots i_p}) \, \omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_p} ,$$

où l'on a posé

$$(18) \qquad f'_{i_1 \ldots i_p} = \sum_{h} D_h^2 f_{i_1 \ldots i_p} ,$$

$$(19) \qquad f''_{i_1 \ldots i_p} = \sum_{\rho, h} [D_{i_\rho}, D_h] f_{i_1 \ldots i_{\rho-1} h i_{\rho+1} \ldots i_p} .$$

Cette dernière formule peut se transformer au moyen de (11) et (8). D'autre part, en différentiant la formule qui exprime le caractère tensoriel de $f_{i_1 \ldots i_p}$, on trouve immédiatement

$$X_\lambda f_{i_1 \ldots i_p} = \sum_{\rho, h} m'_{\lambda h i_\rho} f_{i_1 \ldots i_{\rho-1} h i_{\rho+1} \ldots i_p} .$$

Combinant les résultats obtenus, on trouve

$$(20) \qquad f''_{i_1 \ldots i_p} = \sum_{\lambda, \mu} r^{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu f_{i_1 \ldots i_p} .$$

Le théorème de Chern qui constitue le résultat principal de [2] va être maintenant une conséquence facile de (17), (18) et (20). Désignons par E l'espace $\underset{\sim}{R}^n$ lorsqu'on y fait opérer G au moyen de la représentation φ ; pour chaque p, désignons par E_p l'espace $\Lambda^p E$, puissance extérieure p-ième de E, considéré lui aussi comme espace où opère G. CHERN considère une application linéaire C de E_p dans E_q, commutant avec les opérations de G. Il est clair alors que si $f_{i_1 \ldots i_p}$ est un tenseur antisymétrique d'espèce $\varphi \otimes \ldots \otimes \varphi$ (p fois),

$(Cf)_{i_1\cdots i_q}$ est un tenseur antisymétrique d'espèce $\varphi \otimes \cdots \otimes \varphi$ (q fois), de sorte qu'à toute forme η de degré p sur V on peut, au moyen de C, faire correspondre la forme donnée par

$$C\eta = \frac{1}{q!} \sum_{i_1,\ldots,i_q} (Cf)_{i_1\cdots i_q}\, \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_q}$$

lorsque $f_{i_1\cdots i_p}$ est le tenseur antisymétrique qui apparaît dans l'expression (12) de η. On peut écrire, d'ailleurs :

$$(Cf)_{i_1\cdots i_q} = \sum_{j_1,\ldots,j_p} c_{i_1\cdots i_q, j_1\cdots j_p}\, f_{j_1\cdots j_p} \quad ,$$

où les $c_{i_1\cdots i_q, j_1\cdots j_p}$ sont des coefficients constants ; le fait que C commute avec les opérations de G équivaut à dire que $c_{i_1\cdots i_q, j_1\cdots j_p}$ est un tenseur d'espèce $\varphi \otimes \cdots \otimes \varphi$ ($p+q$ fois), à coefficients constants ; ses dérivées covariantes sont donc nulles, ce qui implique que l'opérateur C commute avec la dérivation covariante, donc aussi avec l'opérateur $\sum D_h^2$ qui apparaît dans (18). Comme il commute aussi avec les transformations infinitésimales de G, donc (lorsqu'on l'applique à un tenseur) avec les X_λ, il commute avec l'opérateur $\sum r^{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu$. Donc C commute avec Δ. C'est le théorème de Chern.

L'exemple le plus connu est fourni par la géométrie kählérienne ; on y démontre que Δ commute avec les opérateurs qu'on a l'habitude d'y noter L, Λ, C et $P_{a,b}$ (ce dernier n'est pas réel, mais tout ce qui précède s'étend trivialement aux formes à valeurs complexes, pourvu qu'on remplace E par son complexifié) ; ce sont là autant de cas particuliers du théorème de Chern.

Pour terminer, nous signalerons une généralisation qui a pris quelque importance récemment dans la théorie des formes automorphes (où elle permet d'étendre beaucoup certains résultats de SHIMURA). Soit d'abord $a = a(M)$ une fonction sur V, partout non nulle ; désignons par α l'opérateur $\eta \to a\eta$ sur les formes différentielles sur V ; posons

$$d^\alpha = \alpha^{-1}\, d\alpha \,, \qquad \delta^\alpha = \alpha^{-1}\, \delta\alpha \,, \qquad \Delta_1 = d\delta^\alpha + \delta^\alpha d \qquad . \tag{21}$$

Il est immédiat que, si on pose $\xi = a^{-1}\, da$, on a

$$d^\alpha = d + e(\xi) \,, \qquad \delta^\alpha = \delta - i(X_\xi) \qquad ,$$

où X_ξ est, comme ci-dessus, le champ de vecteurs associé à ξ au moyen du ds^2 donné sur V, et où e et i désignent les produits extérieur et intérieur, respectivement. En appliquant la formule classique de H. Cartan,

$$\theta(X) = di(X) + i(X)\, d \quad ,$$

on obtient donc

$$\Delta_1 = \Delta - \theta(X_\xi) \quad ;$$

on rappelle que, si X est un champ de vecteurs sur V, $\theta(X)$ désigne l'opérateur obtenu en appliquant à V le groupe d'automorphismes à un paramètre dont la transformation infinitésimale est le champ de vecteurs X, et en différentiant par rapport au paramètre τ du groupe pour $\tau = 0$. Cela montre que, pour que Δ_1 commute avec tous les "opérateurs de Chern" (les opérateurs C introduits plus haut), il faut et il suffit que $\theta(X_\xi)$ commute avec ces opérateurs ; et il est immédiat qu'il suffit pour cela que le champ X_ξ soit la transformation infinitésimale d'un groupe d'automorphismes de la "structure sans torsion, de groupe G" définie sur V par le fibré P_G. Posons $\xi = \sum F_i\, \omega_i$; si G est le groupe orthogonal, c'est-à-dire si la structure en question est la structure riemannienne de V donnée par son ds^2, un calcul classique montre que la condition en question s'exprime par la formule $D_j\, F_i = - D_i\, F_j$. Dans le cas général, on trouve qu'elle équivaut à l'existence de fonctions u_λ sur P_G telles que l'on ait $D_i\, F_j = \sum u_\lambda\, m'_{\lambda ij}$.

Ce n'est pas encore là la généralisation dont on a besoin ; pour obtenir celle-ci, il faut considérer des formes $\eta = (\eta_\rho)$ à valeurs vectorielles, et une matrice $a = (a_{\rho\sigma})$ de fonctions sur V, à déterminant partout non nul ; en fait, dans les applications qu'on a en vue, on prend pour $(a_{\rho\sigma})$ une matrice hermitienne positive non dégénérée. On désigne de nouveau par α l'opérateur $\eta \to a\eta$, entendu cette fois au sens matriciel ; d'autre part, les opérateurs $\star$, d, δ, Δ sont les opérateurs usuels, appliqués à chacune des composantes de la forme vectorielle η ; il en résulte en particulier que $\star$ commute avec α. De même, si C est un opérateur de Chern, on entend par $C\eta$ la forme $(C\eta_\rho)$; il s'ensuit que C commute avec α. Dans ces conditions, les formules ci-dessus restent valables (on notera seulement qu'on ne peut plus interpréter X_ξ comme champ de vecteurs sur V) ; et Δ_1 commutera avec tous les opérateurs de Chern pourvu que les coefficients (matriciels) F_i qui apparaissent dans l'expression

$$a^{-1}\, da = \sum F_i\, \omega_i$$

satisfassent à des relations de la forme $D_i\, F_j = \sum u_\lambda\, m'_{\lambda ij}$, à coefficients matriciels u_λ .

Jusqu'à présent, l'application la plus importante de ce résultat concerne les espaces riemanniens symétriques. Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe, de centre réduit à e , et sans sous-groupe invariant compact. Soit K un sous-groupe compact maximal de G ; $R = G/K$ est alors l'espace riemannien symétrique de groupe G . On vérifie sans difficulté que G , considéré comme fibré principal de base R et de groupe K , détermine sur R une structure sans torsion, de groupe K ; d'après ce qui précède, cela revient à dire que le groupe d'holonomie de R est contenu dans K ; en fait, il n'est autre que K , comme il est bien connu. Le théorème de Chern est donc applicable ; cela indique qu'il y aurait intérêt à déterminer explicitement, pour ce cas, tous les opérateurs de Chern, ou autrement dit les applications linéaires des espaces de covecteurs en un point de R les uns dans les autres qui commutent avec l'opération de K sur ces espaces. Mais soit de plus ρ une représentation de G ; soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G , $\mathfrak{k}$ celle de K considérée comme sous-espace de $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{p}$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ orthogonal à $\mathfrak{k}$ (pour la forme de Killing). En remplaçant ρ par une représentation équivalente, on peut supposer que $\rho(\mathfrak{k})$ se compose de matrices antihermitiennes (donc que ρ induit sur K une représentation unitaire de K) et que $\rho(\mathfrak{p})$ se compose de matrices hermitiennes. Pour tout $x \in G$, soit $a(x) = {}^t\overline{\rho}(x^{-1})\, \rho(x^{-1})$; d'après ce qu'on a supposé sur ρ , $a(x)$ ne dépend que de la classe de x suivant K et peut donc se considérer comme fonction à valeurs matricielles sur R . Un calcul facile permet alors de vérifier que $a^{-1}\, da$ satisfait à la condition qui intervient dans la généralisation du théorème de Chern discutée plus haut.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMBROSE (W.) and SINGER (I. M.). - A theorem on holonomy, Trans. Amer. math. Soc., t. 75, 1953, p. 428-443.

[2] CHERN (S. S.). - On a generalization of Kähler geometry, Algebraic Geometry and Topology, a Symposium in honor of S. Lefschetz, p. 103-121.-Princeton, Princeton University Press, 1957 (Princeton mathematical Series, 18).