FRANÇOIS NORGUET

Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes

Séminaire N. Bourbaki, 1962, exp. n° 234, p. 191-205

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__191_0>

Séminaire BOURBAKI
14e année, 1961/62, n° 234

Février 1962

THÉORÈMES DE FINITUDE POUR LA COHOMOLOGIE DES ESPACES COMPLEXES

par François NORGUET

(d'après Aldo ANDREOTTI et Hans GRAUERT [1] , [2] , [3])

1. Introduction.

Dans [2] , A. ANDREOTTI et H. GRAUERT ont établi des théorèmes de finitude pour la dimension de certains groupes de cohomologie d'un espace analytique complexe X , à coefficients dans un faisceau analytique cohérent $\mathfrak{F}$, l'espace X étant soumis à une condition de convexité ou de concavité. Cette condition est exprimée à l'aide de fonctions fortement q-convexes "localement induites" par des fonctions fortement q-convexes et indéfiniment différentiables de $\mathbb{C}^n$ (grâce à des plongements locaux de X , n variant évidemment le long de X). Elle est de nature globale, car une condition de nature locale ne serait pas directement adaptée à la technique standard de preuve des théorèmes de finitude [1].

Il est vraisemblable qu'on peut s'affranchir de l'hypothèse de différentiabilité, et remplacer la condition globale par une condition locale ; la seconde généralisation (différentiabilité maintenue) est annoncée dans [2] ; pour $q = 1$ et dans le cas de la convexité (c'est-à-dire dans le cas de la convexité maxima), les deux généralisations ont été réalisées simultanément par R. NARASIMHAN [11] (voir l'exposé [14]) ; dans le cas de la concavité, A. ANDREOTTI et H. GRAUERT ont complété dans [3] les résultats de [2] en prouvant, sous une condition locale exprimée en termes d'enveloppes holomorphiquement convexes, la finitude de $\dim_{\mathbb{C}} H^0(X , \mathfrak{F})$ pour tout faisceau analytique cohérent $\mathfrak{F}$ dépourvu de torsion.

Par contre, il semble difficile d'éviter l'hypothèse "localement induites". Enfin, l'hypothèse de convexité forte (c'est-à-dire conservée par une déformation nulle hors d'un compact, et petite jusqu'aux dérivées du second ordre) peut sans doute être affaiblie, mais non jusqu'à la simple convexité ; en effet cette dernière, qui suffit dans $\mathbb{C}^n$, ne suffit déjà plus dans une variété.

Plusieurs notions de q-convexité ont été introduites pour la première fois, pour les domaines de $\mathbb{C}^n$, par W. ROTHSTEIN [15] (voir l'exposé [4]).

Cet exposé est consacré aux théorèmes de finitude établis par A. ANDREOTTI et

---

[1] Les démonstrations du mémoire [7] de H. GRAUERT, précédemment exposées en [12], ne sont valables que sous les mêmes restrictions, bien que les théorèmes énoncés soient vrais (cf. une "footnote" de [11]).

H. GRAUERT et à leurs applications : annulation de la cohomologie d'un espace à valeurs dans le faisceau des germes de sections holomorphes d'un fibré vectoriel, théorèmes de dépendance algébrique pour des sections de faisceaux cohérents, applications à la théorie des fonctions automorphes. Certains de ces résultats ont été exposés par H. GRAUERT [8] au Colloque de Lille, et l'un d'eux (théorème 1 dans le cas de la q-convexité) avait été précédemment annoncé sans démonstration par L. EHRENPREIS [6] pour les domaines de $\underset{\sim}{C}^n$.

2. Conditions de convexité.

DÉFINITION 1. - Une fonction φ à valeurs réelles, définie dans un domaine $D \subset \underset{\sim}{C}^n$, sera dite fortement q-convexe si et seulement si elle est indéfiniment différentiable et si la forme de E. E. LEVI

$$L(\varphi) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i\, \partial \bar{z}_j}\, dz_i\, d\bar{z}_j$$

admet en chaque point de D au moins $n - q + 1$ valeurs propres > 0 . Une fonction fortement 1-convexe sera dite fortement convexe.

Remarques.

i. Cette notion est ainsi définie dans $\underset{\sim}{C}^n$ pour $1 \leqslant q \leqslant n + 1$; pour $1 \leqslant q \leqslant n$, toute fonction fortement q-convexe dans D est aussi fortement $(q + 1)$-convexe ; en particulier, toute fonction indéfiniment différentiable dans D est fortement $(n + 1)$-convexe ; pour $q > n$, nous conviendrons de dire que toute fonction indéfiniment différentiable dans D est fortement q-convexe.

ii. La définition est invariante par tout changement analytique de coordonnées.

iii. Soit $1 \leqslant q \leqslant n$; pour qu'une fonction φ à valeurs réelles, indéfiniment différentiable dans D , soit fortement q-convexe au voisinage du point $x \in D$, il faut et il suffit qu'il existe une application biholomorphe τ d'un domaine G de $\underset{\sim}{C}^{n-q+1}$ dans D , telle que l'on ait $0 \in G$ et $\tau(0) = x$, et que $\varphi \circ \tau$ soit fortement convexe dans G .

iv. Pour $1 \leqslant q \leqslant n$, une fonction fortement q-convexe dans un domaine $D \subset \underset{\sim}{C}^n$ n'admet aucun maximum relatif dans D .

v. Soit φ une fonction fortement q-convexe dans un ouvert $D \subset \underset{\sim}{C}^n$; pour $m \leqslant n$, soit G un ouvert de $\underset{\sim}{C}^m$, et soit τ une application holomorphe de rang

m (c'est-à-dire dont la matrice jacobienne est de rang m en tout point de G) de G dans D ; alors $\varphi \circ \tau$ est fortement q-convexe dans G.

DÉFINITION 2. - Une fonction φ à valeurs réelles, définie sur un espace analytique complexe X, sera dite indéfiniment différentiable (resp. fortement q-convexe) si et seulement si, pour tout point $x \in X$, existent un voisinage U de x, un isomorphisme analytique τ de U sur un ensemble analytique dans un domaine $D \subset \mathbb{C}^n$, et une fonction ψ indéfiniment différentiable (resp. fortement q-convexe) dans D, tels que l'on ait $\varphi = \psi \circ \tau$. Une fonction fortement 1-convexe sera dite fortement convexe.

Remarques.

i. Cette définition est justifiée par la dernière remarque. Pour $q \geq 1$, toute fonction fortement q-convexe est aussi fortement $(q + 1)$-convexe. Pour $q > \dim_{\mathbb{C}} X$, il n'est pas évident (et je ne sais s'il est vrai) que toute fonction indéfiniment différentiable sur X soit fortement q-convexe.

ii. Si U est un voisinage de x dans X, et τ un isomorphisme analytique de U sur un ensemble analytique dans un domaine D de $\mathbb{C}^n$, pour tout germe φ_x de fonction fortement q-convexe dans X au point x, existe un germe $\psi_{\tau(x)}$ de fonction fortement q-convexe dans $\mathbb{C}^n$ au point $\tau(x)$, tel que l'on ait $\varphi_x = \psi_{\tau(x)} \circ \tau$.

DÉFINITION 3. - Un espace analytique complexe sera dit fortement q-convexe (resp. fortement q-concave) s'il existe un compact $K \subset X$ et une fonction φ à valeurs réelles (resp. une fonction $\varphi > 0$ à valeurs réelles), continue dans X et fortement q-convexe dans $X - K$, telle que, pour tout nombre réel α (resp. pour tout nombre réel $\alpha > 0$), on ait

$$X_\alpha = \{x \; ; \; x \in X \, , \; \varphi(x) < \alpha\} \subset\subset X \quad (\text{resp. } X_\alpha = \{x \; ; \; x \in X \, , \; \varphi(x) > \alpha\} \subset\subset X) .$$

Tout espace analytique complexe compact sera dit 0-convexe. Tout espace fortement 1-convexe sera dit fortement convexe. Tout espace analytique fortement q-convexe, pour lequel on peut choisir $K = \emptyset$, sera dit fortement q-complet. Enfin un espace analytique X sera dit fortement concave si et seulement si X est fortement q-concave et si, en tout point x de X, tout germe de composante irréductible de X a une dimension $\geq q + 1$.

Remarque. - Pour tout $q \geq 1$, tout espace fortement q-convexe est aussi fortement $(q + 1)$-convexe. H. GRAUERT conjecture dans [8] que tout espace analytique complexe X ayant une topologie dénombrable est q-convexe pour tout $q \geqslant \dim_{\mathbb{C}} X$; même pour $q > \dim_{\mathbb{C}} X$, cela n'est pas évident.

3. Dimension homologique d'un faisceau analytique cohérent.

Soit $\mathfrak{F}$ un faisceau analytique cohérent sur un espace analytique complexe X ; pour tout point $x \in X$, soient U un voisinage de x dans X et τ un isomorphisme analytique de U sur un sous-ensemble analytique E dans un ouvert G de $\mathbb{C}^n$ (n dépendant évidemment de x) ; soit $\tau(\mathfrak{F})$ le faisceau analytique cohérent sur E , image de $\mathfrak{F}$ par l'application τ ; soient $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes dans G , et $\hat{\mathfrak{F}}$ le faisceau analytique cohérent dans G obtenu en étendant $\tau(\mathfrak{F})$ par zéro dans $G - E$. Soit

$$0 \to \mathcal{O}^{p_d} \to \mathcal{O}^{p_{d-1}} \to \dots \to \mathcal{O}^{p_o} \to \hat{\mathfrak{F}} \to 0$$

une résolution de $\hat{\mathfrak{F}}$, de longueur minimale, au voisinage de $\tau(x)$.

On pose $\mathrm{dih}_x \mathfrak{F} = n - d$, et $\mathrm{dih}\, \mathfrak{F} = \inf_{x \in X} \mathrm{dih}_x \mathfrak{F}$.

On a toujours $\mathrm{dih}\, \mathfrak{F} > 0$, et la définition ne dépend pas des plongements locaux choisis pour X .

Si on désigne maintenant par $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X , on pose $\mathrm{dih}_x X = \mathrm{dih}_x \mathcal{O}$, et on a toujours

$$\mathrm{dih}_x X \leqslant \dim_x X \quad .$$

4. Théorème général de finitude et applications (Mémoire [2]).

THÉORÈME 1. - *Soit X un espace analytique complexe fortement q-convexe (resp. fortement q-concave). Pour tout entier $r \geqslant q$ (resp. $r < \mathrm{dih}\, \mathfrak{F} - q$) et tout faisceau analytique cohérent $\mathfrak{F}$ sur X , on a*

$$\dim_{\mathbb{C}} H^r(X , \mathfrak{F}) < + \infty \quad .$$

COROLLAIRE 1. - *Soit K un compact de X , et soit φ une fonction à valeurs réelles* (resp. une fonction $\varphi > 0$ à valeurs réelles), *continue dans X et fortement q-convexe dans $X - K$, telle que, pour tout nombre réel α (resp. pour tout nombre réel $\alpha > 0$) , on ait $X_\alpha \subset\subset X$; alors il existe un nombre réel α_o (resp. $\alpha_o > 0$) tel que l'on ait*

$$H^r(X, \mathfrak{F}) \approx H^r(X_\alpha, \mathfrak{F})$$

pour $r \geq q$, $\alpha > \alpha_0$ (resp. pour $r < \operatorname{dih} \mathfrak{F} - q$, $0 < \alpha < \alpha_0$) et pour tout faisceau analytique cohérent $\mathfrak{F}$ dans X (X_α ayant la même signification que dans la définition 3).

COROLLAIRE 2. - En particulier, si X est fortement q-complet, on a

$$H^r(X, \mathfrak{F}) = 0$$

pour $r \geq q$ et pour tout faisceau analytique cohérent $\mathfrak{F}$ sur X.

THÉORÈME 2. - Soit X un espace analytique complexe sur lequel il existe une fonction $\varphi > 0$, fortement q-convexe, telle que l'on ait

$$X_{\varepsilon,\alpha} = \{x \; ; \; x \in X, \; \varepsilon < \varphi(x) < \alpha\} \subset\subset X$$

pour tous nombres réels $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$. Alors, pour tout nombre réel $\alpha > 0$ et tout faisceau analytique cohérent $\mathfrak{F}$ sur X, l'homomorphisme

$$H^r(X, \mathfrak{F}) \to H^r(X - X_{0,\alpha}, \mathfrak{F})$$

induit par l'inclusion de $X - X_{0,\alpha}$ dans X est bijectif pour $0 \leq r < \operatorname{dih} \mathfrak{F} - q$, injectif pour $r = \operatorname{dih} \mathfrak{F} - q$.

COROLLAIRE 3. - Si X est un espace analytique complexe fortement q-complet, on a (en cohomologie à supports compacts)

$$H^r_c(X, \mathfrak{F}) = 0$$

pour $0 \leq r \leq \operatorname{dih} \mathfrak{F} - q$ et pour tout faisceau analytique cohérent $\mathfrak{F}$ sur X.

Remarque. - Le théorème 1 et le corollaire 2 sont liés, pour $q = 1$, à la résolution du problème de E. E. LEVI pour les espaces analytiques complexes (voir [7], exposé en [12], ainsi que [10] et enfin [11], exposé en [14]) ; nous n'exposerons pas ici ce genre d'applications.

THÉORÈME 3. - Soit $\pi : E \to X$ un fibré vectoriel holomorphe, de fibre $\underset{\sim}{C}^n$, sur un espace analytique complexe X. Si le fibré dual E^* est fortement q-convexe (resp. fortement q-concave), il existe un nombre entier k_0 tel que l'on ait

$$H^r(X, \Omega(E^{(k)})) = 0$$

<u>pour</u> $k \geq k_0$ <u>et</u> $r \geq q$ <u>(resp.</u> $r < \operatorname{dih} X + n - q)$, $E^{(k)}$ <u>désignant la puissance tensorielle symétrique</u> <u>k-ième du fibré</u> E , <u>et</u> $\Omega(E^{(k)})$ <u>le faisceau des germes de sections holomorphes de ce fibré.</u>

<u>Démonstration.</u> - Soit $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes dans l'espace analytique complexe E^* ; du théorème 1 résulte l'inégalité

$$\dim_{\mathbb{C}} H^r(E^*, \mathcal{O}) < +\infty$$

pour $r \geq q$ (resp. $r < \operatorname{dih} X + n - q)$. Mais le développement en série de Taylor, par rapport aux coordonnées de la fibre, des r-cochaînes d'un recouvrement de E^* obtenu en prenant l'image réciproque par π d'un recouvrement de X par des ouverts d'holomorphie, définit une filtration de $H^r(E^*, \mathcal{O})$ dont le gradué associé est isomorphe à la somme directe

$$\bigoplus_k H^r(X, \Omega(E^{(k)})) \qquad ;$$

donc seulement un nombre fini de termes de cette somme peuvent être non nuls.

5. <u>Preuve du théorème</u> 1.

Nous indiquerons, seulement dans le cas de la q-convexité, la structure de la démonstration du théorème 1, dont les détails sont très compliqués.

Une méthode standard de preuve pour les théorèmes de finitude consiste à utiliser le théorème suivant (cf. [12] et [13]) dégagé d'une démonstration de H. GRAUERT [7] par une méthode généralisant celle de A. GROTHENDIECK [9] :

THÉORÈME 4. - <u>Sur un espace topologique</u> X <u>localement compact et paracompact</u> , <u>soit</u> $\mathfrak{F}$ <u>un faisceau de Fréchet compact, calculable pour les degrés</u> ≥ 1 <u>et</u> $\leq r$; <u>soit</u> X' <u>un ouvert relativement compact et paracompact de</u> X , <u>tel que l'application canonique de</u> $H^r(X, \mathfrak{F})$ <u>dans</u> $H^r(X', \mathfrak{F})$ <u>soit surjective. Alors on a</u>

$$\dim H^r(X', \mathfrak{F}) < +\infty \qquad .$$

Si X est un espace analytique complexe, et $\mathfrak{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X , alors $\mathfrak{F}$ est un faisceau de Fréchet compact et calculable pour tous les degrés ≥ 1 . Supposons, de plus, X fortement q-convexe ; il existe alors un compact $K \subset X$ et une fonction φ à valeurs réelles, continue dans X et fortement q-convexe dans $X - K$, telle que, pour tout nombre réel α , on ait

$$X_\alpha = \{x \; ; \; x \in X \, , \; \varphi(x) < \alpha\} \subset\subset X \quad .$$

Soit α_o un nombre réel tel que φ soit fortement q-convexe dans $X - \overline{X}_{\alpha_o}$. En utilisant une méthode de H. GRAUERT [7], on montre :

PROPOSITION 1. - <u>Pour tout</u> $\alpha > \alpha_o$, <u>existe</u> $\varepsilon > 0$ <u>tel que l'homomorphisme</u>

$$H^r(X_{\alpha+\varepsilon} \, , \mathfrak{F}) \to H^r(X_\alpha \, , \mathfrak{F})$$

<u>soit surjectif pour</u> $r \geq q$.

La démonstration de la proposition 1 repose sur la

PROPOSITION 2. - <u>Tout point</u> x <u>appartenant à la frontière de</u> X_α <u>possède un système fondamental de voisinages</u> U <u>tels que l'on ait, pour</u> $r \geq q$:

$$H^r(U \cap X_\alpha \, , \mathfrak{F}) = 0 \quad .$$

Pour $q = 1$, la proposition 2 résulte d'un théorème de E. E. LEVI et KRZOSKA et du théorème B de H. CARTAN et J.-P. SERRE (voir [7] et [12]). Pour $q \geq 1$, sa démonstration est basée sur le fait suivant : pour chacun des voisinages U considérés, $U \cap X_\alpha$ est analytiquement isomorphe à un ensemble analytique dans un domaine D de $\mathbb{C}^n$ qui est une famille analytique, à $q - 1$ paramètres, de domaines d'holomorphie de $\mathbb{C}^{n-q+1}$.

A l'aide de la proposition 1, on montre aisément que l'homomorphisme

$$H^r(X \, , \mathfrak{F}) \to H^r(X_\alpha \, , \mathfrak{F})$$

est surjectif pour $\alpha > \alpha_o$ et $r \geq q$.

De la proposition 1 et du théorème 4 résulte la propriété de finitude pour X_α , à savoir :

PROPOSITION 3. - <u>Pour</u> $\alpha > \alpha_o$ <u>et</u> $r \geq q$, <u>on a</u>

$$\dim_{\mathbb{C}} H^r(X_\alpha \, , \mathfrak{F}) < +\infty \quad .$$

Il s'agit maintenant d'en déduire :

$$\dim_{\mathbb{C}} H^r(X \, , \mathfrak{F}) < +\infty \quad .$$

Pour $q = 1$, ceci peut être réalisé par des méthodes particulières de théorie des fonctions et en utilisant des théorèmes préalablement connus (voir [7], [12], [10], [11] et [14]) ; tandis que pour $q \geq 1$, la démonstration doit être complètement reconstruite, les analogues des théorèmes utilisés pour $q = 1$ n'existant pas préalablement.

On introduit un recouvrement convenable $\mathfrak{U}$ de X par des ouverts d'holomorphie relativement compacts formant une base dénombrable des ouverts de X ; pour tout ouvert X' de X, on désigne par $\mathfrak{U}|X'$ le recouvrement de X' constitué par les ouverts du recouvrement $\mathfrak{U}$, contenus dans X' ; on démontre alors

PROPOSITION 4. - Pour tout $\alpha > \alpha_0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'image de $Z^r(\mathfrak{U}|X_{\alpha+\varepsilon}, \mathfrak{F})$ dans $Z^r(\mathfrak{U}|X_\alpha, \mathfrak{F})$ soit dense dans ce dernier espace (Z^r désignant un groupe de cocycles de degré r) pour $r \geq q - 1$.

La démonstration utilise la proposition 3 ; elle est réalisée, comme celle de la proposition 1, par petits agrandissements successifs de X_α, compte-tenu de la

PROPOSITION 5. - Tout point x appartenant à la frontière de X_α possède un système fondamental de voisinages U tels que l'image de $Z^r(\mathfrak{U}|U, \mathfrak{F})$ dans $Z^r(\mathfrak{U}|X_\alpha \cap U, \mathfrak{F})$ soit dense dans ce dernier espace, pour $r \geq q - 1$.

Pour établir la proposition 5, on utilise encore le plongement de U dans un domaine d'holomorphie de $\mathbb{C}^n$, et de $U \cap X_\alpha$ dans une famille à $q - 1$ paramètres de domaines d'holomorphie.

A l'aide de la proposition 4, on montre aisément que l'image de $Z^r(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ dans $Z^r(\mathfrak{U}|X_\alpha, \mathfrak{F})$ est dense dans ce dernier espace, pour $\alpha > \alpha_0$ et $r \geq q - 1$.

Des propositions 3 et 4 résulte maintenant :

PROPOSITION 6. - Pour tout $\alpha > \alpha_0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'application

$$H^r(X_{\alpha+\varepsilon}, \mathfrak{F}) \to H^r(X_\alpha, \mathfrak{F})$$

soit un isomorphisme pour $r \geq q$.

On montre alors que, pour $\alpha > \alpha_0$ et $r \geq q$, l'homomorphisme

$$H^r(X, \mathfrak{F}) \to H^r(X_\alpha, \mathfrak{F})$$

est bijectif ; de la proposition 3 résulte alors :

$$\dim_{\mathbb{C}} H^r(X\ ,\ \mathcal{S}) < +\infty \qquad .$$

La démonstration du théorème 1 dans le cas de la q-concavité est analogue, les propositions fondamentales étant, bien entendu, modifiées comme il convient ; les corollaires 1 et 2 s'obtiennent sans difficulté ; la démonstration du théorème 2 est analogue, en utilisant de la cohomologie à supports convenables ; le corollaire 3 est obtenu aisément.

6. Les espaces concaves (Mémoire [3]).

Il s'agit maintenant d'espaces définis par une condition locale de concavité exprimée à l'aide de la notion d'enveloppe holomorphiquement convexe ; la notion d'espace concave ainsi obtenue est donc plus générale (au moins en apparence) que celle qui a été précédemment utilisée.

DÉFINITION 4. - Soient U un espace analytique complexe, et V une partie de U ; on appelle enveloppe convexe de V par rapport à U l'ensemble $\hat{V}_U$ des points x de U tels que l'on ait

$$|f(x)| \leq \sup_{y\in V} |f(y)|$$

pour toute fonction f holomorphe dans U.

DÉFINITION 5. - Soient X un espace analytique complexe, Y un ouvert dans X, et x un point de X appartenant à la frontière de Y ; on dira que Y est concave (relativement à X) au point x de sa frontière si et seulement si x possède un système fondamental de voisinages U dans X tels que x soit point intérieur de chaque ensemble $\widehat{(U\cap Y)}_U$.

Remarque. - La condition ainsi exprimée est que x possède un système fondamental de voisinages U_i et un système fondamental de voisinages $V_i \subset U_i$ tels que, pour toute fonction f holomorphe dans U_i et tout point $x' \in V_i$, on ait

$$|f(x')| \leq \sup_{y\in U_i\cap Y} |f(y)| \qquad .$$

DÉFINITION 6. - On dira qu'un espace analytique complexe irréductible est concave s'il existe un ouvert non vide $Y \subset\subset X$ qui soit concave (relativement à X) en chaque point de sa frontière. Un espace analytique complexe X sera dit concave s'il est constitué d'un nombre fini de composantes irréductibles et si chacune de ses composantes irréductibles est concave.

PROPOSITION 7. - Soient X un ensemble analytique dans un ouvert D de $\underset{\sim}{C}^n$, Y un ouvert de X, et x_o un point de la frontière de Y relative à X, tel que chaque germe de composante irréductible de X en x_o soit de dimension $\geq d \geq 2$. Supposons qu'il existe un sous-espace linéaire complexe E de $\underset{\sim}{C}^n$, de dimension $\geq n - d + 2$, contenant x_o, et une fonction indéfiniment différentiable φ, fortement convexe dans un voisinage V de x_o dans E, telle que l'on ait

$$Y \cap V = \{x \ ; \ x \in X \cap V \ , \ \varphi(x) > \varphi(x_o)\} \quad .$$

Alors Y est (relativement à X) concave au point x_o.

Remarque. - Ce critère de concavité, qui relie la concavité définie à l'aide de fonctions q-convexes à la concavité définie à l'aide d'enveloppes holomorphiquement convexes, n'est pas utilisé pour établir les théorèmes ci-dessous.

Exemples.

i. Tout espace analytique complexe compact est concave.

ii. A. ANDREOTTI et H. GRAUERT ont démontré dans [1] que le quotient du demi-plan de Siegel par le groupe modulaire de Siegel est concave ; des résultats exposés ci-dessous, et établis par A. ANDREOTTI et H. GRAUERT dans [3], on déduit aisément que le corps des fonctions modulaires de Siegel est un corps de fonctions algébriques ayant pour degré de transcendance la dimension de l'espace de Siegel, et que toute fonction modulaire est quotient de deux fonctions modulaires holomorphes ; ces deux dernières propriétés avaient été initialement établies comme conséquences de la compactification de J. SATAKE [16] (voir aussi [17]), puis démontrées de façon simple par C. L. SIEGEL [18] ; enfin, compte-tenu du corollaire 7 ci-dessous, il suffit de plonger le quotient du demi-plan de Siegel par le groupe modulaire comme sous-ensemble localement fermé dans un espace projectif complexe pour établir la possibilité de compactifier ce quotient en une variété algébrique projective de même dimension, ce que J. SATAKE avait démontré par une construction directe faisant intervenir des résultats profonds de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes et de la théorie du groupe modulaire.

iii. D'après K. B. GRUNDLACH (cf. [1], dernier alinéa), des résultats analogues sont valables pour le groupe modulaire de Siegel-Hilbert.

7. Faisceaux analytiques cohérents sans torsion.

Dans ce numéro, on considère un espace analytique complexe X , irréductible et localement irréductible ; on désigne par $\mathcal{O}$ (resp. $\mathfrak{M}$) le faisceau des germes de fonctions holomorphes (resp. méromorphes) dans X , et par $\mathfrak{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X . Pour tout point x de X , on appelle rang de $\mathfrak{F}$ en X le nombre entier $\dim_{\mathfrak{M}_x} (\mathfrak{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{M})_x$; ce nombre ne dépend pas de x ; on l'appelle rang de $\mathfrak{F}$ dans X . Pour tout point x de X , existent un voisinage U de x et un nombre entier $n > 0$ tels que l'on ait

$$(\mathfrak{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{M}) | U \approx \mathfrak{M}^n | U \quad .$$

Le quotient de $\mathfrak{F}$ par son sous-faisceau de torsion est encore un faisceau analytique cohérent ; pour que $\mathfrak{F}$ soit sans torsion, il faut et il suffit que $\mathfrak{F}_x$ soit un $\mathcal{O}_x$-module sans torsion quel que soit x . Si $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ sont deux faisceaux analytiques cohérents sans torsion dans X , le faisceau $\mathfrak{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{G}$ peut avoir de la torsion ; on désignera par $\mathfrak{F} \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathfrak{G}$ le quotient de $\mathfrak{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{G}$ par son sous-faisceau de torsion.

PROPOSITION 8. - *Tout faisceau analytique cohérent sans torsion* $\mathfrak{F}$ *de rang* n *sur* X *est localement isomorphe à un sous-faisceau de* $\mathcal{O}^n$. *De façon plus précise, pour tout point* x *de* X , *existent un voisinage* U *de* x *et une injection*

$$\alpha : \mathfrak{F}|U \to \mathcal{O}^n | U$$

qui est un isomorphisme hors d'un sous-ensemble analytique E $(\neq U)$ de U .

DÉFINITION 7. - On dira qu'une section s de $\mathfrak{F}$ s'annule au point x à un ordre $\geq h$ si, pour tout couple (U , α) , chaque composante de $\alpha(s)$ s'annule en x à un ordre $\geq h$.

Soit $(s_i)_{1 \leq i \leq m}$ une suite finie de sections, au-dessus de X , d'un faisceau analytique cohérent $\mathfrak{F}$ sans torsion ; ces sections engendrent un sous-faisceau de $\mathfrak{F}$ sans torsion et de rang $r \leq m$; sur tout ouvert U assez petit, elles sont données par une matrice à m lignes et r colonnes, dont les éléments sont des fonctions méromorphes dans U ; on vérifie que les déterminants d'ordre r , extraits de cette matrice, définissant une application méromorphe de U dans la grassmanienne $G_{m,r}$ formée des sous-espaces projectifs de dimension $r - 1$ de $\underset{\sim}{P}_{m-1}(\underset{\sim}{C})$. et que cette application, indépendante du choix de U , est définie pour l'espace X entier ; soit σ cette application et soit X_σ l'ouvert partout dense de X

où σ est holomorphe.

DÉFINITION 8. - Nous dirons que les sections considérées sont algébriquement (resp. analytiquement) dépendantes si $\sigma(X_\sigma)$ est contenu dans une sous-variété algébrique de $G_{m,r}$ de codimension ≥ 1 (resp. dans un sous-ensemble maigre (c'est-à-dire localement contenu dans un ensemble analytique de codimension ≥ 1) de $G_{m,r}$). Si, au lieu d'un seul faisceau $\mathfrak{F}$, on envisage un nombre fini $(\mathfrak{F}_j)_{1\leq j\leq k}$ de faisceaux, on définit la dépendance de sections au moyen de l'application méromorphe produit des applications $(\sigma_j)_{1\leq j\leq k}$ dans le produit des grassmaniennes correspondantes.

8. Théorème de finitude pour les espaces concaves.

THÉORÈME 5. - Pour tout faisceau analytique cohérent $\mathfrak{F}$ sur un espace analytique complexe X localement irréductible et concave, on a

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathfrak{F}) < +\infty \quad .$$

Pour établir ce théorème, on démontre d'abord :

LEMME FONDAMENTAL. - Soit $\mathfrak{F}$ un faisceau analytique cohérent sans torsion sur un espace analytique complexe concave X irréductible et localement irréductible ; alors il existe un ensemble fini $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ de points de X et un nombre entier h tels que toute section de $\mathfrak{F}$ qui s'annule en ces points à un ordre $\geq h$ est nécessairement nulle.

La démonstration du lemme utilise une extension du lemme de Schwartz aux ensembles analytiques ; du lemme, il résulte immédiatement que l'homomorphisme naturel

$$H^0(X, \mathfrak{F}) \to \bigoplus_{1\leq i\leq p} (\mathcal{O}_{x_i}/\mathfrak{m}^h_{x_i})^n$$

(où $\mathfrak{m}_{x_i}$ désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{x_i}$, n le rang de $\mathfrak{F}$, et où l'exposant n est le symbole d'une somme directe) est injectif, ce qui démontre le théorème 5.

COROLLAIRE 4. - Si $(\mathfrak{F}_j)_{1\leq j\leq k}$ est un ensemble fini de faisceaux analytiques cohérents sans torsion sur un espace analytique complexe concave X localement irréductible, et si on pose

$$\mathfrak{F} = \widetilde{\bigotimes_{1 \leq j \leq k}} \mathfrak{F}_j^{a_j}$$

(où l'exposant entier a_j est le symbole d'une puissance tensorielle privée de torsion), on a la majoration

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathfrak{F}) \leq \left(\prod_{1\leq j\leq k} n_j^{a_j}\right) \times (\text{polynôme de degré } \dim_{\mathbb{C}} X \text{ en } \sum_{1\leq j\leq k} c_j\, a_j).$$

(où n_j désigne le rang de $\mathfrak{F}_j$ et c_j est une constante ≥ 0 qui dépend de l'espace X et du faisceau $\mathfrak{F}_j$).

Application. - Si $(D_j)_{1\leq j\leq k}$ est un ensemble fini de diviseurs dans un espace analytique complexe concave X localement irréductible, la dimension du système linéaire $\left| \sum_{1\leq j\leq k} a_j D_j \right|$ (où a_j est un nombre entier > 0) est majorée par un polynôme de degré $\dim_{\mathbb{C}} X$ par rapport aux a_j , $1 \leq j \leq k$.

9. Théorèmes de dépendance algébrique pour les espaces concaves.

THÉORÈME 6. - Soient $\mathfrak{F}_j$, $1 \leq j \leq k$ et $\mathfrak{F}$ des faisceaux analytiques cohérents sans torsion sur un espace analytique complexe X localement irréductible et concave. Pour chacun de ces faisceaux, considérons un nombre fini de sections au moins égal au rang du faisceau considéré. Supposons que l'ensemble des sections des $\mathfrak{F}_j$ ainsi considérées soient analytiquement indépendantes mais que l'ensemble des sections des $\mathfrak{F}_j$ et de $\mathfrak{F}$ considérées soient analytiquement dépendantes. Alors ces sections sont algébriquement dépendantes.

La démonstration de ce théorème utilise les résultats précédents ; on en déduit maintenant

COROLLAIRE 5. - Des fonctions méromorphes analytiquement dépendantes sur un espace analytique complexe X localement irréductible, irréductible et concave sont aussi algébriquement dépendantes. Le corps des fonctions méromorphes sur X a donc un degré de transcendance $\leq \dim_{\mathbb{C}} X$. Si X est normal, le corps des fonctions méromorphes sur X est isomorphe à une extension algébrique simple d'un corps de fonctions rationnelles en $d \leq \dim_{\mathbb{C}} X$ indéterminées.

COROLLAIRE 6. - Pour tout faisceau localement libre $\mathfrak{F}$ de rang un sur un espace analytique complexe X localement irréductible, irréductible, concave et normal, considérons l'anneau gradué

$$A(\mathfrak{F}) = \bigcup_{0 \leq h < +\infty} H^{o}(X , \mathfrak{F}^{h})$$

(où l'exposant h indique une puissance tensorielle) et son corps de fractions $Q(F)$. L'anneau $A(\mathfrak{F})$ est intégralement clos dans $Q(\mathfrak{F})$; $Q(\mathfrak{F})$ est isomorphe à un corps de fonctions algébriques en $d \leq \dim_{\underset{\sim}{C}} X$ variables et il est algébriquement clos dans le corps des fonctions méromorphes sur X. Si le degré de transcendance de $Q(\mathfrak{F})$ égale $\dim_{\underset{\sim}{C}} X$, toute fonction méromorphe sur X s'écrit comme quotient de deux sections d'une puissance convenable $\mathfrak{F}^{h}$ de $\mathfrak{F}$.

COROLLAIRE 7. - Soit X un espace analytique complexe irréductible, localement irréductible et concave, plongé comme sous-ensemble localement fermé dans un espace projectif complexe ; alors X est contenu dans une variété algébrique irréductible de même dimension.

Démonstration. - Soit V la plus petite variété algébrique contenant X ; V est irréductible, et on a $\dim_{\underset{\sim}{C}} V \geq \dim_{\underset{\sim}{C}} X$. Mais, K et M désignant respectivement les corps de fonctions rationnelles sur V et de fonctions méromorphes sur X, on a $\dim_{\underset{\sim}{C}} V$ = degré de transcendance de $K \leq$ degré de transcendance de $M \leq \dim_{\underset{\sim}{C}} X$. Donc on a $\dim_{\underset{\sim}{C}} V = \dim_{\underset{\sim}{C}} X$.

Remarque. - Nous avons déjà indiqué, dans les exemples du n° 6, l'utilisation de ces résultats dans la théorie des fonctions automorphes ; en fait, avant le mémoire [3], A. ANDREOTTI et G. GRAUERT avaient dans [1] établi et appliqué aux fonctions modulaires de Siegel le résultat suivant.

Si $f_1 , \ldots , f_m$ sont m fonctions automorphes algébriquement indépendantes dans un domaine D de $\underset{\sim}{C}^m$, relativement à un groupe G concave d'automorphismes analytiques de D, le corps des fonctions automorphes dans D est une extension algébrique finie du corps des fractions rationnelles, à coefficients complexes, par rapport aux f_i, $1 \leq i \leq m$.

Pour la définition d'un groupe G concave d'automorphismes de D, voir [1] ; notons seulement que G n'est pas supposé proprement discontinu, condition sous laquelle H. CARTAN [5] a démontré l'existence d'un espace analytique normal quotient D/G.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREOTTI (A.) und GRAUERT (H.). - Algebraische Körper von automorphen Funktionen, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II : Math.-phys. Kl., 1961, p. 39-48.

[2] ANDREOTTI (A.) et GRAUERT (H.). - Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes (à paraître).

[3] ANDREOTTI (A.) et GRAUERT (H.). - Théorèmes de dépendance algébrique sur les espaces complexes pseudoconcaves (à paraître).

[4] BRUHAT (François). - Prolongement des sous-variétés analytiques, Séminaire Bourbaki, t. 8, 1955/56, n° 122, 12 p.

[5] CARTAN (Henri). - Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes, Algebraic geometry and topology (A symposium in honor of S. Lefschetz); p. 90-102. - Princeton, Princeton University Press, 1957 (Princeton mathematical Series, 18).

[6] EHRENPREIS (Leon). - Some applications of the theory of distributions to several complex variables, Seminar on analytic functions, Tome 1 ; p. 65-78. - Princeton, Institute for advanced Study, 1957.

[7] GRAUERT (Hans). - On levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds, Annals of Math., Series 2, t. 68, 1958, p. 460-472.

[8] GRAUERT (Hans). - Une notion de dimension cohomologique dans la théorie des espaces complexes, Colloques internationaux du C. N. R. S. : Topologie algébrique et géométrie différentielle [89. 1959. Lille], Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 341-350.

[9] GROTHENDIECK (Alexander). - Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux, Bull. Soc. math. France, t. 84, 1956, p. 1-7.

[10] NARASIMHAN (Raghavan). - The Levi problem for complex spaces, Math. Annalen, t. 142, 1961, p. 355-365.

[11] NARASIMHAN (Raghavan). - The Levi problem for complex spaces, II. (à paraître).

[12] NORGUET (François). - Problème de Levi et plongement des variétés analytiques réelles, Séminaire Bourbaki, t. 11, 1958/59, n° 173, 21 p.

[13] NORGUET (François). - Un théorème de finitude pour la cohomologie des faisceaux, Atti Accad. naz. dei Lincei, Rendiconti, Série 8, t. 31, 1961 (à paraître)

[14] NORGUET (François). - Le problème de E. E. Levi pour les espaces analytiques complexes, Séminaire Lelong : Analyse, t. 4, 1962, n° 6 (à paraître).

[15] ROTHSTEIN (Wolfgang). - Zur Theorie der analytischen Mannigfaltigkeiten im Raume von n komplexen Veränderlichen, Math. Annalen, t. 129, 1955, p. 96-138.

[16] SATAKE (Ichiro). - On the compactification of the Siegel space, J. Indian math. Soc., New Series, t. 20, 1956, p. 259-281.

[17] Séminaire CARTAN, t. 10, 1957/58 : Fonctions automorphes, Fascicules 1 et 2. - Paris, Secrétariat mathématique, 1958.

[18] SIEGEL (Carl Ludwig). - Über die algebraische Abhängigkeit von Modulfunktionen n-ten Grades, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II : Math.-phys. Kl., 1960, p. 257-272.