ALEXANDER GROTHENDIECK

Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. V. Les schémas de Picard : théorèmes d'existence

Séminaire N. Bourbaki, 1962, exp. nº 232, p. 143-161

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__143_0>

Séminaire BOURBAKI
14e année, 1961/62, n° 232

Février 1962

TECHNIQUE DE DESCENTE ET THÉORÈMES D'EXISTENCE EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
V. LES SCHÉMAS DE PICARD : THÉORÈMES D'EXISTENCE

par Alexander GROTHENDIECK

1. Groupes et foncteurs de Picard relatifs.

Pour tout préschéma (plus généralement, tout espace annelé) X , nous appelons groupe de Picard (absolu) de X , et notons $\mathrm{Pic}(X)$, le groupe des classes, à un isomorphisme près, de Modules inversibles (i. e. localement isomorphes à $\mathcal{O}_X$) sur X . On a donc un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} H^1(X , \mathcal{O}_X^*) \quad , \tag{1.1}$$

où $\mathcal{O}_X^*$ désigne le faisceau des unités de $\mathcal{O}_X$, (qui s'identifie en effet au faisceau des automorphismes du Module inversible type $\mathcal{O}_X$). Notons que $X \rightsquigarrow \mathrm{Pic}(X)$ est un foncteur contravariant en X de façon évidente, et que l'isomorphisme (1.1) est fonctoriel.

Si X est un préschéma au-dessus d'un autre S , alors pour un S' variable dans la catégorie $(\mathrm{Sch})_{/S}$ des préschémas sur S , on a un foncteur contravariant $S' \rightsquigarrow \mathrm{Pic}(X \times_S S')$ grâce à ce qui précède. Ce foncteur n'a aucune chance d'être "représentable" ([4], II, A), car par suite de l'existence d'automorphismes non triviaux des Modules inversibles qu'on se propose de classifier, ce foncteur n'est pas de "nature locale" ([5], IV, 5.4). Il y a donc lieu de le "rendre local", en introduisant de façon générale, pour tout préschéma relatif X/S , un groupe de nature relative,

$$\mathrm{Pic}'(X/S) = H^0(S , R^1 f_*(\mathcal{O}_X^*)) \quad , \tag{1.2}$$

(où $f : X \to S$ est le morphisme structural) (comparer [4], II, C 3). Dans loco citato, ce groupe est appelé groupe de Picard relatif, il sera préférable ici de l'appeler groupe de Picard relatif restreint de X/S , pour des raisons qui vont apparaître. Lorsque S' varie dans $(\mathrm{Sch})_{/S}$, $S' \rightsquigarrow \mathrm{Pic}'(X \times_S S'/S')$ est un foncteur contravariant en S' , noté aussi $\underline{\mathrm{Pic}}'_{X/S}$, donc défini essentiellement par la formule

$$\underline{\mathrm{Pic}}'_{X/S}(S') = \mathrm{Pic}(X \times_S S'/S') \quad . \tag{1.3}$$

Ce foncteur est maintenant "de nature locale", vu qu'on a fait ce qu'il fallait pour cela. Intuitivement, le deuxième membre de (1.3) s'interprète comme l'ensemble des "familles algébriques" de classes de faisceaux inversibles sur (les fibres de) X/S, indexées par le préschéma de paramètres S'/S. Lorsque le foncteur $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}'$ est représentable, le préschéma sur S qui le représente est noté $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, et appelé le <u>préschéma de Picard</u> de X sur S, donc, on aura alors

$$(1.4) \qquad \mathrm{Hom}_S(S', \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}) \cong \underset{\sim}{\mathrm{Pic}}'_{X/S}(S') = \mathrm{Pic}'(X \times_S S'/S') \quad .$$

Il y a cependant des cas importants où $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}'_{X/S}$ n'est pas représentable (exemple : variété de "Brauer-Severi" sur un corps k, sans point rationnel sur k), et où cependant il existe une définition naturelle d'un préschéma de Picard relatif. Cela tient au fait que dans la définition du foncteur $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}'$ à partir des groupes de Picard absolus $\mathrm{Pic}(X \times_S S'/S')$, on n'a pas encore assez localisé, de façon précise $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}'$ n'est en général pas "compatible avec la descente fidèlement plate". Explicitons.

Soit $(\mathfrak{M})$ l'ensemble des morphismes de préschémas qui sont <u>fidèlement plats et quasi-compacts</u>, cet ensemble est stable par changement de base et par composition. Soit P un foncteur contravariant de $\underset{\sim}{(\mathrm{Sch})}_{/S}$ dans la catégorie des ensembles, et pour tout S-morphisme $u : T' \to T$, $u \in (\mathfrak{M})$, considérons la diagramme

$$(1.5) \qquad P(T) \to P(T') \rightrightarrows P(T' \times_T T')$$

transformé par P du diagramme

$$T \leftarrow T' \xleftarrow[\quad]{\mathrm{pr}_1\ ,\ \mathrm{pr}_2} T' \times_T T' \quad .$$

Si P est représentable, il résulte de la théorie de la descente ([4], I, B, th. 2) que le diagramme (1.5) est exact pour tout $u \in (\mathfrak{M})$. On exprime ce fait en disant que P est compatible avec $(\mathfrak{M})$, en l'occurence que P est "compatible avec la descente fidèlement plate", ou encore que le "<u>préfaisceau</u>" P sur $\underset{\sim}{(\mathrm{Sch})}_{/S}$ est un "<u>faisceau</u>" pour la notion de localisation fournie par l'ensemble $(\mathfrak{M})$. Lorsque P est quelconque, un procédé standard, bien connu dans le cas de la localisation topologique habituelle, permet de lui associer un "faisceau" $\mathcal{P}$ et un homomorphisme de foncteurs $P \to \mathcal{P}$, qui soit universel dans un sens évident. Le calcul de $\mathcal{P}$ peut s'expliciter de la façon suivante : pour définir $\mathcal{P}(T)$, on désigne, pour tout T' sur T tel que le morphisme $u : T' \to T \in (\mathfrak{M})$, par

$\check{H}^0(T'/T , P)$ le sous-ensemble de $P(T')$ formé des éléments ξ dont les deux images ξ_1 , ξ_2 dans $P(T' \times_T T')$ sont telles qu'il existe un morphisme $v : T'' \to T' \times_T T'$, $v \in (\mathfrak{M})$, tel que ξ_1 et ξ_2 aient même image dans $P(T'')$.

[N. B. - L'ensemble $\check{H}^0$ ainsi défini est donc plus grand que l'ensemble $H^0(T'/T , P)$ introduit dans [4], I, A, 4 (a).] Lorsque T' varie sur T fixé, (toujours avec $u \in (\mathfrak{M})$) les $\check{H}^0(T'/T , P)$ forment un système inductif (quand l'ensemble des T' est muni du préordre défini par la domination), et on pose

$$\mathcal{P}(T) = \varinjlim_{T'} \check{H}^0(T'/T , P) \qquad . \tag{1.6}$$

La loi fonctorielle en T de cette expression s'explicite de façon évidente.

Lorsque

$$P(T) = \mathrm{Pic}(X \times_S T) \qquad ,$$

le foncteur contravariant sur $\underline{(\mathrm{Sch})}_{/S}$ défini par (1.6) est appelé <u>foncteur de Picard relatif</u> de X sur S , et noté $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, et on appelle <u>groupe de Picard relatif</u> de X sur S , et on note $\mathrm{Pic}(X/S)$, le groupe $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(S)$. On trouve alors une bijection évidente

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X \times_S T/T) \qquad . \tag{1.7}$$

Un élément de $\mathrm{Pic}(X/S)$ est donc défini à l'aide d'un élément ξ' d'un groupe $\mathrm{Pic}(X \times_S S')$ (où $S' \to S$ est fidèlement plat et quasi-compact), tel que l'on puisse trouver un morphisme fidèlement plat et quasi-compact $S'' \to S' \times_S S'$ tel que les deux images inverses de ξ' dans $\mathrm{Pic}(X \times_S S'')$ soient les mêmes. Un élément ξ' de $\mathrm{Pic}(X \times_S S')$ et ξ_1 de $\mathrm{Pic}(X \times_S S_1)$ (satisfaisant les conditions qu'on vient d'expliciter), définissent le même élément de $\mathrm{Pic}(X/S)$, si et seulement s'il existe un morphisme fidèlement plat et quasi-compact $S_1' \to S' \times_S S_1$ tel que les images des deux éléments en question dans $\mathrm{Pic}(X \times_S S_1')$ soient égales. Il est souvent commode de travailler encore avec le foncteur $P' = \underline{\mathrm{Pic}}'_{X/S}$ introduit plus haut, on constate aussitôt que le morphisme canonique $P \to P'$ définit un <u>isomorphisme</u>

$$\mathcal{P} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}' \qquad , \tag{1.8}$$

ce qui donne une description de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ en termes de $\underline{\mathrm{Pic}}'_{X/S} = P'$, plus commode souvent. En vertu de 2.3 ci-dessous, lorsque dans la description de $\mathrm{Pic}(X/S)$ qu'on vient d'expliciter, on remplace P par P' , on peut en effet faire $S'' = S' \times_S S'$, $S'_1 = S' \times_S S_1$, du moins sous les conditions explicitées dans loco citato.

Lorsque le foncteur $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est représentable, on dit que X/S admet un préschéma de Picard, et le préschéma sur S représentant le foncteur est appelé préschéma de Picard de X sur S , et noté encore $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$. Il suffit évidemment pour ceci que $P' = \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ soit représentable, car alors P' est déjà un "faisceau", et la formule (1.8) prouve que le morphisme $P' \to \mathcal{P}'$ s'identifie au morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Pic}}'_{X/S} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} \quad , \tag{1.9}$$

qui est alors un isomorphisme. Donc notre terminologie est compatible avec celle introduite plus haut avec (1.4). En général, lorsque $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe, il est défini par l'isomorphisme fonctoriel :

$$\mathrm{Hom}_S(S' , \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X \times_S S'/S') \quad . \tag{1.10}$$

2. Relations entre les divers groupes de Picard relatifs et absolus.

PROPOSITION 2.1. - Soit $f : X \to S$ un morphisme tel que $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{O}_X)$. Alors on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}'(X/S) \quad .$$

Lorsque X admet une section sur S , le dernier morphisme est surjectif, i. e. on a un isomorphisme

$$\mathrm{Pic}'(X/S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}(S) \quad .$$

La suite exacte peut être considérée comme la suite exacte en bas degrés correspondant à la suite spectrale de Leray pour f et $\mathcal{O}_X$. La deuxième assertion également est formelle.

PROPOSITION 2.2. - Soit $f : X \to S$ un morphisme quasi-compact et séparé tel que $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{O}_X)$, et soit $S' \to S$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact. Alors

(i) $\mathrm{Pic}'(X/S) \to \mathrm{Pic}'(X \times_S S'/S')$ est injectif ;

(ii) Si X admet une section localement sur S (i. e. tout $s \in S$ a un voisinage ouvert U tel que $X|U$ ait une section sur U), alors le diagramme

$$\mathrm{Pic}'(X/S) \to \mathrm{Pic}'(X \times_S S'/S') \rightrightarrows \mathrm{Pic}'(X \times_S S''/S'')$$

(où $S'' = S' \times_S S'$) est exact.

Le premier énoncé résulte, grâce aux propriétés élémentaires de la descente fidèlement plate, de la remarque générale suivante. Si $f : X \to S$ est un morphisme tel que $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{O}_X)$, alors le foncteur $\mathcal{F} \rightsquigarrow f^*(\mathcal{F})$, de la catégorie des Modules localement libres de type fini sur S dans la catégorie des Modules localement libres de type fini sur X , est pleinement fidèle, et l'image essentielle est formée des Modules $\mathcal{G}$ sur X tels que $f_*(\mathcal{G})$ soit localement libre, et que l'homomorphisme canonique

$$f^*(f_*(\mathcal{G})) \to \mathcal{G}$$

soit un isomorphisme. Le deuxième énoncé a été prouvé par la théorie de la descente dans [4], I, B, 4.

Les résultats de 2.2 s'énoncent aussi ainsi :

COROLLAIRE 2.3. - Sous les conditions de 2.2, l'homomorphisme canonique (1.9) $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}'_{X/S} \to \underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est injectif, et même bijectif si X admet une section localement sur S . (Donc dans ce dernier cas, il y a identité entre le groupe de Picard relatif $\mathrm{Pic}(X/S)$ et le groupe de Picard relatif restreint $\mathrm{Pic}'(X/S)$.)

Conjuguant avec 2.1, on trouve donc :

COROLLAIRE 2.4. - Sous les conditions de 2.2, on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X/S) \quad .$$

Lorsque X admet une section sur S , le dernier homomorphisme est surjectif, i. e. on a alors un isomorphisme

$$\mathrm{Pic}(X/S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}(S) \quad .$$

<u>Remarque</u> 2.5. - Soit $f : X \to S$ un morphisme tel que $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{O}_X)$, et soit g une section de X sur S . Soit $\mathcal{L}$ un Module inversible sur X , appelons <u>g-rigidification</u> de $\mathcal{L}$ un isomorphisme $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} g^*(\mathcal{L})$, et appelons <u>Module inversible g-rigidifié</u> un Module inversible $\mathcal{L}$ sur X muni d'une g-rigidification. Tout automorphisme d'une telle structure est trivial, et $\mathrm{Pic}'(X/S)$ s'identifie à l'ensemble des classes, à un isomorphisme près, de Modules inversibles g-rigidifiés sur S . (C'est ce fait qui a permis d'utiliser la théorie de la descente pour prouver 2.2, (ii).) Cela donne une nouvelle interprétation de $\mathrm{Pic}(X/S)$, du moins lorsque f est de plus quasi-compact et séparé, donc $\mathrm{Pic}(X/S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}'(X/S)$ par 2.3.

Remarque 2.6. - Soit $f : X \to S$ un morphisme comme dans 2.2, et soit $S' \to S$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact tel qu'il existe un S-morphisme $S' \to X$, i. e. tel qu'il existe une section de $X' = X \times_S S'$ sur S'. Soit $S'' = S' \times_S S'$, $X'' = X \times_S S''$, et considérons la suite exacte

$$\mathrm{Pic}(X/S) \to \mathrm{Pic}(X'/S') \rightrightarrows \mathrm{Pic}(X''/S'') \quad .$$

Appliquant 2.4, on trouve une suite exacte.

$$\mathrm{Pic}(X/S) \to \mathrm{Pic}(X')/\mathrm{Pic}(S') \rightrightarrows \mathrm{Pic}(X'')/\mathrm{Pic}(S'') \quad ,$$

en particulier, tout élément du groupe de Picard relatif "provient" déjà d'un élément de $\mathrm{Pic}(X')$. Cela donne donc une simplification substantielle pour la description du groupe de Picard relatif donnée dans le numéro précédent, et de même pour le foncteur de Picard de X sur S, puisque, pour tout T sur S, on peut appliquer ce qui précède à $X \times_S T/T$ et au morphisme $T' = S' \times_S T \to T$. Si par exemple f lui-même est fidèlement plat, on peut prendre $S' = X$, ce qui permet, lorsque f est de plus de type fini (resp. simple, etc.) de se borner, dans la description du foncteur de Picard relatif $T \rightsquigarrow \mathrm{Pic}(X \times_S T/T)$, à des changements de base $T' \to T$ qui sont de type fini (resp. simple, etc.). Lorsque f est projectif et plat, S localement noethérien, on prouve qu'on peut prendre ci-dessus un $S' \to S$ tel que S' soit somme directe de revêtements plats S'_i d'ouverts S_i de S couvrant S ; si f est même séparable, on peut prendre S'_i étale sur S_i.

3. Le théoreme principal d'existence : énoncé.

On ne dispose pas, même à titre conjectural, d'un énoncé d'existence de préschémas de Picard, englobant tous les cas connus. Une condition "pratiquement nécessaire", si on peut dire, est que $f : X \to S$ soit propre (assurant des propriétés de finitude essentielles) et plat. Ces conditions ne sont pas suffisantes, même si S est le spectre de l'algèbre des nombres duaux $k[t]/(t^2)$ sur un corps k (disons le corps $\underset{\sim}{C}$ des nombres complexes), et X de dimension 1. Au moment d'écrire le présent exposé, les théorèmes d'existence les plus importants pour le préschéma de Picard sont déduits du théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. - Soit $f : X \to S$ un morphisme de préschémas localement noethériens. On suppose

(i) f projectif

(ii) f plat

(iii) les fibres géométriques de f sont intègres.

Sous ces conditions, $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe.

La démonstration, qui sera esquissée dans les deux numéros qui suivent, montrera en même temps ceci : Soit ξ la section de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ correspondant à un faisceau très ample $\mathcal{O}_X(1)$ sur X/S (i. e. induit par une immersion projective $X \to P(\mathcal{E})$) ; il existe alors une partie ouverte U de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, réunion disjointe de parties ouvertes quasi-projectives sur S, telle que U soit stable par la translation par ξ, et que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ soit réunion croissante des ouverts $U - n\xi$ (tous isomorphes à U). Il en résulte en particulier que sous les conditions de 3.1, $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est <u>séparé</u> sur S.

<u>Remarque</u> 3.2. - On voit sur des exemples (avec S le spectre d'un anneau de valuation discrète, et X de dimension relative 1 sur S, par exemple), que si dans 3.1 on omet l'hypothèse (iii) en la remplaçant par l'hypothèse plus faible que, pour tout $s \in S$, l'homomorphisme $k(s) \to H^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$ est un isomorphisme, alors $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ n'est pas nécessairement séparé sur S ; tant dans le cas où les fibres géométriques de f sont réduites, mais où une fibre géométrique générique intègre "éclate" par spécialisation en deux composantes irréductibles, que dans le cas où les fibres géométriques de f sont irréductibles, mais où une fibre géométrique générique intègre se spécialise en une "fibre multiple". Le premier cas se présente par exemple avec une conique dégénérant en deux droites concourrantes, un exemple du deuxième m'a été fourni par D. MUMFORD, avec une courbe elliptique dégénérant en une courbe elliptique double. Ces exemples sont valables en toute caractéristique.

<u>Remarque</u> 3.3. - Sous les conditions de 3.1, j'ignore si $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est réunion disjointe d'ouverts qui sont de type fini, donc quasi-projectifs, sur S. On notera que la considération des polynômes de Hilbert $Q \in \underline{\mathbb{Q}}[t]$ permet, comme dans le cas des schémas de Hilbert ([4], IV), de donner une décomposition de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ en somme disjointe d'ouverts $\underline{\mathrm{Pic}}^{Q}_{X/S}$, et il semble plausible que ces derniers sont quasi-projectifs sur S ; c'est ce qu'on verra du moins dans le prochain exposé lorsque f est un morphisme simple. On fera attention que si on remplace l'hypothèse (i) par l'hypothèse : X est projectif <u>localement</u> au-dessus de S (ce qui est suffisant pour la validité de 3.1, puisque la question d'existence de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est visiblement locale sur S), il est facile par contre

de donner des exemples où $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ contient des composantes connexes qui ne sont pas de type fini sur S. Soit par exemple X_o une variété algébrique non singulière projective sur un corps k algébriquement clos, munie d'un automorphisme u et d'un élément ξ dans le groupe de Néron-Severi de X_o, tels que les $u^n(\xi)$ soient deux à deux distincts. On peut par exemple prendre pour X_o le produit d'une courbe elliptique E par elle-même, pour u l'automorphisme $(x , y) \rightsquigarrow (x , y + x)$ de $E \times E$. Soit S la réunion de deux courbes irréductibles non singulières se coupant en deux points a et b. Il y a sur S un revêtement principal connexe P de groupe $\underline{\underline{Z}}$, et utilisant les opérations de $\underline{\underline{Z}}$ sur X_o définies par u, on en conclut un fibré associé sur S, de fibré X_o (trivial sur $S - a$ et $S - b$), en fait un schéma abélien sur S dans le cas particulier envisagé. On voit facilement que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, qui est aussi le fibré associé à P et aux opérations de $\underline{\underline{Z}}$ sur $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_o/k}$ via u, contient une composante connexe isomorphe à $P \times \underline{\mathrm{Pic}}^o_{X_o/k}$ (où $\underline{\mathrm{Pic}}^o$ dénote la composante connexe de l'élément neutre dans $\underline{\mathrm{Pic}}$), laquelle n'est pas de type fini sur S. [Il se produit également des phénomènes analogues dans divers cas de préschémas de Picard non séparés sur S, comme envisagés dans 3.3.]

4. Diviseurs de Cartier relatifs et fibrés projectifs.

Nous n'aurons à utiliser que des diviseurs positifs, et omettrons ce qualificatif supplémentaire dans la suite du numéro.

Soit X un préschéma. Un diviseur de Cartier sur X, ou simplement diviseur sur X pour simplifier, est un sous-préschéma fermé D de X, défini par un Idéal $\mathfrak{J}$ qui est un Module inversible, i. e. engendré localement par une section non diviseur de zéro de $\mathcal{O}_X$. À D nous associons un Module inversible, à savoir

$$\mathcal{L}(D) = \mathfrak{J}^{-1} \quad ,$$

et l'injection canonique $\mathfrak{J} \to \mathcal{O}_X$ donne un homomorphisme canonique

$$s_D : \mathcal{O}_X \to \mathfrak{J}^{-1} = \mathcal{L}(D) \ , \qquad \text{i. e.} \quad s_D \in \Gamma(X , \mathcal{L}(D)) \quad .$$

D'ailleurs, la donnée d'un diviseur est essentiellement équivalente à la donnée d'un Module inversible $\mathcal{L}$ sur X, munie d'une section s qui soit partout non diviseur de zéro, en associant inversement à un tel couple $(\mathcal{L} , s)$ le "diviseur" de s, noté $\mathrm{div}(s)$. Pour un $\mathcal{L}$ inversible donné sur X, l'ensemble des diviseurs D définissant $\mathcal{L}$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble quotient $\Gamma(X, \mathcal{L})^*/\Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$, où $\Gamma(X, \mathcal{L})^*$ désigne la partie de $\Gamma(X, \mathcal{L})$ formée des sections qui sont partout non diviseur de zéro.

Supposons maintenant que l'on ait un morphisme localement de type fini $f : X \to S$, et supposons pour simplifier S localement noethérien. Soient $\mathfrak{J}$ un Idéal cohérent sur X, D le sous-schéma de X qu'il définit, $x \in X$, et $s = f(x)$. On montre que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathfrak{J}$ est inversible en x (i. e. $\mathfrak{J}_x$ engendré par un élément régulier de $\mathcal{O}_{X,x}$) et D est plat sur S en x.

(ii) X et D sont plats sur S en x, et D_s est un diviseur de Cartier sur la fibre X_s en le point x.

(iii) X est plat sur S en x, et $\mathfrak{J}_x$ est engendré par un élément f_x induisant sur X_s un germe non diviseur de zéro.

On dit alors que D est un <u>diviseur de Cartier relatif</u> sur X/S, (ou simplement diviseur relatif sur X/S), au point envisagé. On notera sur (i) qu'alors D est également un diviseur relatif aux points voisins de x, donc si X et D sont plats sur S, et D propre sur S, alors l'ensemble des $s \in S$ tels que D_s soit un diviseur de Cartier dans X_s (i. e. tels que D soit un diviseur de Cartier relatif aux points de X_s) est une partie ouverte de S. D'autre part, on a fait ce qu'il fallait dans la définition précédente pour que la notion de diviseur de Cartier relatif soit stable par un changement de base quelconque $S' \to S$. Considérons alors, l'ensemble $\mathrm{Div}(X/S)$ des diviseurs relatifs sur X/S, puis le foncteur contravariant en S' variable sur S défini par

$$\underset{\sim}{\mathrm{Div}}_{X/S}(S') = \mathrm{Div}(X \times_S S'/S') \quad .$$

Supposons X plat et propre sur S. Alors par la caractérisation (ii) des diviseurs de Cartier relatifs, $\underset{\sim}{\mathrm{Div}}_{X/S}$ peut être considéré comme un sous-foncteur du foncteur $\underset{\sim}{\mathrm{Hilb}}_{X/S}$ défini dans [4], IV, et le morphisme d'inclusion

$$\underset{\sim}{\mathrm{Div}}_{X/S} \to \mathrm{Hilb}_{X/S}$$

est "représentable par des immersions ouvertes", (cf. [5], IV, 3.13) en vertu des remarques qui précèdent. Utilisant le théorème d'existence principal de [4], IV, on trouve :

PROPOSITION 4.1. - Supposons $f : X \to S$ projectif et plat. Alors le foncteur $\underline{\mathrm{Div}}_{X/S}$ est représentable, et, de façon précise, est représentable par un ouvert de $\underline{\mathrm{Hilb}}_{X/S}$.

Utilisant (pour un faisceau $\mathcal{O}_X(1)$ très ample donné sur X/S) la décomposition canonique de $\underline{\mathrm{Hilb}}_{X/S}$ en somme des ouverts $\underline{\mathrm{Hilb}}^Q_{X/S}$ correspondants aux polynômes de Hilbert $Q \in \underline{Q}[t]$, on en conclut d'ailleurs une décomposition analogue

$$\underline{\mathrm{Div}}_{X/S} = \coprod_{Q \in \underline{Q}[t]} \underline{\mathrm{Div}}^Q_{X/S}$$

en somme d'ouverts disjoints quasi-projectifs sur S.

Utilisant l'application $D \rightsquigarrow \mathcal{L}(D)$, on trouve d'autre part un homomorphisme fonctoriel

$$(+) \qquad \underline{\mathrm{Div}}_{X/S} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$$

que nous nous proposons d'étudier ; il apparaîtra qu'il est relativement représentable ([5], IV, 3) sous des conditions assez générales. Partons donc avec un élément ξ de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(S')$, en supposant pour simplifier les notations que $S' = S$, et montrons que le sous-foncteur correspondant de $\underline{\mathrm{Div}}_{X/S}$ est représentable. Prenons d'abord le cas où ξ est défini par un Module inversible $\mathcal{L}$ sur X. Nous supposerons X propre et plat sur S, et que les fibres géométriques de X sur S sont intègres, ce qui implique aussi ([2], III, par. 7) que l'on a $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{O}_X)$ et que cette relation reste valable après tout changement de base $S' \to S$. Alors les diviseurs de Cartier relatifs D sur X/S tels que $\mathcal{L}(D)$ et $\mathcal{L}$ définissent le même élément de $\mathrm{Pic}(X/S) = \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(S)$, i. e. en vertu de 2.4, tels que $\mathcal{L}(D)$ et $\mathcal{L}$ soient isomorphes localement au-dessus de S, sont en correspondance biunivoque avec les sections du faisceau quotient $f_*(\mathcal{L})^*/\mathcal{O}_S^*$. Cette correspondance est compatible avec les changements de base. D'autre part, des considérations générales du type "Künneth" de loco citato (cf. aussi [6]) montrent que la propreté de X/S et la platitude de $\mathcal{L}$ sur S impliquent l'existence d'un Module cohérent $\mathcal{Q}$ sur S, défini à un isomorphisme unique près, et un isomorphisme de faisceaux

$$f_*(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{Q}, \mathcal{O}_S) \qquad ,$$

la formation de $\mathcal{Q}$ étant par ailleurs compatible avec les changements de base. Ici $f_*(\mathcal{L})^*$ désigne le sous-faisceau d'ensembles de $f_*(\mathcal{L})$ dont les sections sur U sont les sections de $\mathcal{L}$ sur $f^{-1}(U)$ qui définissent des diviseurs de

Cartier relatifs sur $f^{-1}(U)/U$, i. e. qui induisent des sections non diviseurs de 0 sur les X_s $(s \in U)$. Utilisant l'hypothèse que les fibres X_s sont intègres, cela signifie simplement que les sections induites sur les fibres X_s ne sont pas identiquement nulles, ou encore en termes d'homomorphismes locaux $\mathcal{Q} \to \mathcal{O}_S$, que lesdits homomorphismes soient surjectifs (NAKAYAMA). Cela montre que l'ensemble des sections de $f_*(\mathcal{L})^*/\mathcal{O}_S^*$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des Modules quotients inversibles de $\mathcal{Q}$, ou encore, par définition du fibré projectif $P(\mathcal{Q})$ associé au Module cohérent $\mathcal{Q}$ (cf. [5], V, 2), avec l'ensemble des sections de $P(\mathcal{Q})$ sur S . Cette description est compatible avec la formation des images inverses, et on obtient par suite le théorème ci-après.

THÉORÈME 4.3. - Soient $f : X \to S$ un morphisme propre et plat à fibres géométriques intègres, avec S localement noethérien, $\mathcal{L}$ un Module inversible sur X . Pour tout S' sur S , soit $T(S')$ l'ensemble des diviseurs relatifs D sur $X \times_S S'/S'$ tels que $\mathcal{L}(D)$ soit isomorphe à $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ localement au-dessus de S' (i. e. tels que $\mathcal{L}(D)$ et $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ définissent le même élément de $\mathrm{Pic}(X \times_S S'/S')$. Alors il existe un Module cohérent $\mathcal{Q}$ sur S , déterminé à un isomorphisme unique près, tel que le foncteur T soit représentable par le fibré projectif $P(\mathcal{Q})$.

COROLLAIRE 4.4. - Si on suppose même f projectif, alors l'homomorphisme fonctoriel $\underset{\sim}{\mathrm{Div}}_{X/S} \to \underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est représentable par morphismes projectifs.

En fait, lorsque X admet une section (resp. localement une section) sur S , alors l'homomorphisme précédent est représentable par des fibrés projectifs (resp. par des fibrés projectifs locaux), grâce à 4.3 et 2.1. Dans le cas où f est quasi-projectif, on se ramène facilement au cas précédent par une méthode de descente, utilisant des quasi-sections finies et plates de X localement sur S .

Remarque 4.5. - Sous les conditions de 4.3, le Module $\mathcal{Q}$ sur S n'est en général pas localement libre, ce qui s'exprime par le fait que la dimension des fibres réduites de $\mathcal{Q}$, i. e. celle des $H^0(X_s , \mathcal{L}_s)$ pour $s \in S$ variable, peut faire des sauts. Etant donné un Module cohérent $\mathcal{Q}$ sur le préschéma localement noethérien S , on vérifie facilement que pour un $s \in S$ donné, $\mathcal{Q}$ est libre en s si et seulement si $P(\mathcal{Q})$ est plat sur S en les points au-dessus de s , (auquel cas il sera donc même simple sur S en les points au-dessus de s) ; en l'occurence, $\mathcal{Q}$ étant défini en termes de $\mathcal{L}$ comme ci-dessus, cela signifie aussi que la formation de l'image directe $f_*(\mathcal{L})$ "commute avec le changement de base au voisinage de s ", ou encore que $f_*(\mathcal{L})_s \to H^0(X_s , \mathcal{L}_s)$ est surjectif. Il en sera ainsi par exemple si $H^1(X_s , \mathcal{L}_s) = 0$. Sous réserve d'existence des préschémas en jeu, ces critères s'appliquent en particulier à la situation universelle $\underline{\mathrm{Div}}_{X/S} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, et donnent une condition nécessaire et suffisante, resp. suffisante, pour que ce morphisme soit simple en un point donné de $\underline{\mathrm{Div}}_{X/S}$.

5. Démonstration du théorème principal d'existence.

Sous les conditions de 3.1, choisissons un Module $\mathcal{O}_X(1)$ très ample sur X/S , soit ξ l'élément correspondant de $\mathrm{Pic}(X/S)$. Posons pour abréger $\underline{P}(S') = \mathrm{Pic}(X \times_S S'/S')$, et supposons d'abord pour simplifier que X/S admette une section. Soit $\underline{P}^+(S')$ la partie de $\underline{P}(S')$ formée des classes des $\mathcal{L}$ inversibles sur $X \times_S S'$ tels que

$$R^i f'_*(\mathcal{L}(n)) = 0 \quad \text{pour} \quad i > 0 \quad \text{et tout} \quad n \geq 0$$

$$f'_*(\mathcal{L}(n)) \neq 0 \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0 \quad .$$

Ce sont là des conditions stables par changement de base, donc qui définissent un sous-foncteur $\underline{P}^+$ de $\underline{P}$, évidemment stable par translation par ξ . Utilisant les "théorèmes A et B" de SERRE ([2], III, 2) et les généralités ([5], IV, 5), on voit facilement que $\underline{P}$ est représentable si et seulement si $\underline{P}^+$ l'est, et alors $\underline{P}^+$ sera représentable par un ouvert U du préschéma $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ représentant $\underline{P}$, et ce dernier sera réunion croissante des ouverts $U - n\xi$.

Soit pour abréger $\underline{D} = \underline{\mathrm{Div}}_{X/S}$, et soit $\underline{D}^+$ l'image inverse de $\underline{P}^+$ par le morphisme canonique $\underline{D} \to \underline{P}$. Donc on a un morphisme

$$(+) \qquad \underline{D}^+ \to \underline{P}^+ \quad ,$$

et on sait déjà que $\underline{D}^+$ est représentable par un ouvert D^+ du préschéma $D = \underline{\mathrm{Div}}_{X/S}$ (dont l'existence est garantie par 4.1). Il résulte facilement de 4.3 que le morphisme (+) est représentable par morphismes <u>simples projectifs surjectifs</u> (et de façon précise par des <u>fibrés projectifs associés à des Modules localement libres</u> partout non nuls) : cela tient au fait que, lorsque $\mathcal{L}$ sur $X \times_S S'$ est, comme au début du présent numéro, alors $f'_*(\mathcal{L})$ est un Module <u>localement libre</u> $\neq 0$, dont la formation commute au changement de base ; avec les notations de 4.3, $\mathfrak{Q}$ sera alors isomorphe au dual de $f'_*(\mathcal{L})$. Utilisant le critère général ([5], IV, 4.7), nous allons en conclure la représentabilité de P^+ . Dans loco citato, nous prendrons pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble des morphismes fidèlement plats et quasi-compacts de préschémas (qui sont bien des épimorphismes effectifs en vertu de [4], I B). La condition (a) de loco citato, à savoir que (+) est représentable par morphismes éléments de $\mathfrak{S}$, est vérifiée comme on vient de le voir ; de même la condition (b), qui signifie que le foncteur $\underset{\sim}{P}^+$ est compatible avec la descente fidèlement plate quasi-compacte, ce qui est immédiat. Reste à prouver la condition (c) de loco citato, à savoir que l'équivalence R dans le préschéma D^+ déduite du morphisme $\mathfrak{S}$-représentable (+) est $\mathfrak{S}$-effective, i. e. est effective et telle que $D^+ \to D^+/R$ soit $\in \mathfrak{S}$. Pour ceci on note d'abord que les ouverts D^{+Q} de D^+ correspondants aux divers polynômes de Hilbert virtuels $Q \in \underset{\sim}{Q}[t]$ sont stables par R (car les fibres de R sont connexes), ce qui nous ramène à montrer que pour tout Q , la relation d'équivalence R^Q induite dans D^{+Q} est $\underset{\sim}{S}$-effective. Or maintenant D^{+Q} est quasi-projectif, et d'autre part la relation d'équivalence R^Q est projective et plate. On est donc sous les conditions d'application de [4], III, 6.1, qui implique le résultat voulu.

Dans le cas général où X/S n'admet pas nécessairement de section, on se ramène facilement au cas précédent par la technique de descente, ou on reprend la démonstration précédente avec la modification qui s'impose dans la définition de $\underset{\sim}{P}^+$.

Remarques 5.1. - La méthode suivie est essentiellement celle de MATSUSAKA pour la construction projective des variétés de Picard. Le résultat invoqué de [4], III pour la possibilité de passage au quotient effectif peut se déduire facilement aussi du théorème d'existence des schémas de Hilbert, (cf. par exemple [6]) (Classiquement, ces quotients se construisaient par utilisation des coordonnées de Chow). On notera que la formation de l'ouvert $\underline{\mathrm{Pic}}^+_{X/S}$ de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ et sa décomposition en ouverts $\underline{\mathrm{Pic}}^{+Q}_{X/S}$ quasi-projectifs sur S , suivant les polynômes de Hilbert pour les diviseurs définissant les Modules inversibles envisagés, est compatible avec le changement de base (ce qui permet l'application de la technique de descente).

Remarques 5.2. - Il n'est pas exclu que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe chaque fois que $f : X \to S$ est propre et plat et tel que les homomorphismes $k(s) \to H^0(X_s , \mathcal{O}_{X_s})$ $(s \in S)$ sont des isomorphismes (cette dernière condition signifiant alors aussi que $\mathcal{O}_S \overset{\sim}{\to} f_*(\mathcal{O}_X)$ et que cette relation reste valable après tout changement de base $S' \to S$). C'est du moins ce qu'on prouve dans le cadre des espaces analytiques lorsque f est de plus projectif, par une méthode différente (celle de CHOW sauf erreur) expliquée dans [5], IX, 3.1. Dans cette méthode, le passage au quotient par une relation d'équivalence propre et plate dans un ouvert du schéma des diviseurs, est remplacée par un passage au quotient par le groupe projectif dans le schéma des immersions de X dans $\underline{P}^r_S$. Cette méthode pourra probablement s'adapter au cas des schémas, en utilisant les résultats de MUMFORD sur le passage au quotient par le groupe projectif [8] ; pour l'instant, il n'y a de démonstration écrite que lorsque X a "beaucoup de sections locales" au-dessus de S, par exemple lorsque X est séparable sur un anneau local complet. En principe, la méthode en question serait de portée plus générale, puisqu'elle donne également l'existence de préschémas de Picard dans des cas où ceux-ci ne sont pas séparés, et où la première méthode échoue donc nécessairement. (Techniquement, la difficulté provient du fait que lorsque les fibres géométriques de f ne sont plus intégres, alors le foncteur envisagé dans 4.3 n'est plus représentable par le fibré projectif $P(\mathcal{Q})$ lui-même, mais par un ouvert dudit, ce qui conduit à la question délicate du passage au quotient par une relation d'équivalence plate mais non propre.)

Remarque 5.3. - On notera que la démonstration donnée ici ne fait appel, ni à la construction préalable des jacobiennes des courbes ou familles de courbes, ni à la théorie des variétés abéliennes ou schémas abéliens, et par là se distingue de façon essentielle d'exposés traditionnels comme dans le livre de LANG [7] ou l'exposé de CHEVALLEY [1], qui suivent la voie esquissée par A. WEIL. Même dans le cas des jacobiennes des courbes non singulières sur un corps algébriquement clos (le corps des complexes disons), la construction donnée ici pour la jacobienne est la seule connue qui en fournisse les propriétés très fortes que nous avons pris comme définition au numéro 1, (essentiellement celles de CHEVALLEY, mais en tenant compte de "variétés de paramètres" à éléments nilpotents). Que la construction des schémas de Picard doive précéder et non suivre la théorie des variétés abéliennes, est clair a priori par le fait qu'en général les schémas de Picard ne sont ni ne se ramènent à des schémas abéliens, comme on voit déjà dans le cas de courbes singulières sur un corps algébriquement clos, où on trouve les "jacobiennes généralisées" de Rosenlicht, qui ne sont pas des variétés abéliennes. De plus, la théorie des variétés abéliennes, et plus généralement des schémas abéliens, gagne beaucoup en simplicité une fois qu'on dispose d'une théorie des schémas de Picard en général. En particulier, la théorie de dualité pour les schémas abéliens, et notamment les résultats du type Cartier, deviennent à peu près formels à partir de là (cf. par exemple [10]).

Remarques 5.4. - Le "principe de compatibilité" de Igusa pour la jacobienne d'une courbe dégénérant en une courbe singulière, ne peut être bien compris que comme un théorème d'existence du schéma de Picard d'un schéma relatif en courbes X/S , non nécessairement simple sur S . C'est donc un cas particulier du théorème d'existence principal 3.1 lorsque la courbe spécialisée est intègre (i. e. en termes classiques, irréductible de multiplicité 1). On notera que pour l'instant, le cas d'une courbe spéciale réductible (même lorsque les composantes sont de multiplicité 1, i. e. lorsque la courbe spéciale est séparable sur le corps résiduel) échappe aux théorèmes d'existence connus, sauf dans le cas où on est sur un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel algébriquement clos, comparer 5.2. Cette question d'existence se posera certainement à l'occasion d'une construction géométrique, en théorie des schémas, des "compactifications" de Baily-Satake des schémas modulaires des courbes de genre g . (Cette compactification est connue pour l'instant seulement pour $g = 1$, grâce aux travaux de IGUSA) .

6. Théorèmes d'existence relatifs.

Nous allons esquisser ici quelques cas utiles où l'existence de certains schémas de Picard implique l'existence de certains autres, ce qui permet de déduire du théorème principal 3.1 divers autres théorèmes d'existence.

PROPOSITION 6.1. - Soit $f : X \to S$ un morphisme plat projectif tel que dans la factorisation de Stein $f = f'' f'$, le morphisme $f' : X \to S'$ soit plat et à fibres géométriques intègres (donc satisfait aux hypothèses de 3.1), et le morphisme fini. $f'' : S' \to S$ soit plat. Alors $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe et (avec les notations introduites dans [4], II, C 2 on a un isomorphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} \xrightarrow{\sim} \prod_{S'/S} \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S'} \quad .$$

Pour le montrer, on établit d'abord un isomorphisme de foncteurs

$$\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S} \xrightarrow{\sim} \prod_{S'/S} \underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S'} \quad ,$$

on utilise 3.1, qui implique que $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S'}$ est représentable, et on utilise la structure signalée dans le n° 3 de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S'}$ (impliquant que toute partie finie d'une fibre de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S'}$ sur S est contenue dans un ouvert affine) pour l'existence de $\prod_{S'/S} \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S'}$.

Par exemple, lorsque X est un schéma <u>somme</u> de schémas X_i sur S satisfaisant les conditions de 3.1, l'énoncé 6.1 se réduit à l'énoncé trivial

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} \xrightarrow{\sim} \prod_i \underline{\mathrm{Pic}}_{X_i/S} \quad .$$

COROLLAIRE 6.2. - Soit $f : X \to S$ un morphisme projectif et plat à fibres géométriques localement intègres (par exemple un morphisme projectif et normal), alors $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe.

Dans ce cas d'ailleurs, S' est un revêtement étale de S (vrai chaque fois que f est séparable, i. e. plat à fibres géométriques réduites), et on vérifie que le théorème de structure énoncé dans le n° 3 pour $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est encore valable, grâce à la structure analogue de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S'}$.

D'autre part, un procédé de descente donne un théorème d'existence relatif, dont la portée dépend d'ailleurs de la solution des questions de descente non plate soulevées dans [4], I, A (c), et dont nous nous contentons d'expliciter ici un cas particulier :

PROPOSITION 6.3. - Soit $f : X \to S$ un morphisme propre, soient X_1 et X_2 deux sous-préschémas de X plats sur S, définis par deux Idéaux cohérents $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ tels que $\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2 = (0)$ et que $\mathcal{O}_X/(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2)$ soit plat sur S (i. e. le sous-préschéma de X sup de X_1 et X_2 est X, tandis que leur inf Z est plat sur X). Supposons de plus que, pour tout $s \in S$, les Hom $k(s) \to H^0(X_{i_s}, \mathcal{O}_{X_{i_s}})$, $i = 1, 2$, soient bijectifs. Alors l'homomorphisme naturel de foncteurs

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X_1/S} \times \underline{\mathrm{Pic}}_{X_2/S}$$

est représentable par des morphismes affines, donc si $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_1/S}$ et $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_2/S}$ existent, il en est de même de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, et le morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X_1/S} \times \underline{\mathrm{Pic}}_{X_2/S}$$

est affine.

Par descente fidèlement plate, on est ramené au cas où Z admet une section sur S, définissant donc des sections de X, X_1, X_2 sur S, permettant d'éliminer les automorphismes dans les structures considérées comme expliqué dans 2.5. La démonstration consiste alors à noter que la donnée d'un Module inversible "rigidifié" $\mathcal{L}$ sur X équivaut à la donnée d'un triple $(\mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 , u)$, où $\mathcal{L}_i$ est un Module inversible "rigidifié" sur X_i , et u un isomorphisme de $\mathcal{L}_1|Z$ avec $\mathcal{L}_2|Z$, compatible avec les rigidifications. Il y a seulement à vérifier que pour $\mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2$ fixés, la donnée de u s'exprime par une section d'un schéma convenable sur S affine sur S , ce qui est facile. On conclut facilement de 6.3 :

COROLLAIRE 6.4. - Soit X un schéma propre et séparable sur un corps k , et soient X_i les composantes irréductibles de X . Si les $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_i/k}$ existent, il en est de même de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$, et le morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k} \to \prod_i \underline{\mathrm{Pic}}_{X_i/k}$$

est affine.

Combiné à 6.2, cela montre par exemple l'existence de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ chaque fois que X est un schéma projectif et séparable sur un corps k . Lorsque X n'est plus séparable sur k , on a également un résultat de réduction, en utilisant un raisonnement dû à OORT [11]. La méthode s'applique également sur un schéma de base quelconque (cas utile par exemple pour démontrer dans l'exposé suivant le résultat de finitude annoncé dans 3.3). Pour éviter un énoncé trop technique, bornons-nous au cas où l'on est sur un corps de base :

PROPOSITION 6.5. - Soient X un schéma propre sur un corps k , X_o un sous-schéma ayant même ensemble sous-jacent (donc défini par un Idéal nilpotent sur X). Alors le morphisme fonctoriel $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X_o/k}$ est représentable par morphismes affines. En particulier, si $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_o/k}$ existe, il en est de même de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$, et le morphisme $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X_o/k}$ est affine.

Combinant avec 6.4, on conclut facilement :

COROLLAIRE 6.6. - Soit X un préschéma projectif sur un corps k , alors $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ existe.

<u>Remarque</u> 6.6. - Il est extrêmement plausible que pour tout schéma X <u>propre</u> sur un corps k , $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ existe. Les résultats qui précèdent nous ramènent, dans cette question, au cas où k est algébriquement clos, et où X est intègre. On sait alors qu'il existe un schéma intègre X' <u>projectif</u> sur k et un morphisme dominant $g : X' \to X$ (lemme de Chow). Il suffirait donc de montrer que le

morphisme fonctoriel correspondant $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X'/k}$ est représentable (et sans doute, représentable par morphismes affines), puisqu'on sait par ailleurs que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X'/k}$ est représentable. Cela soulève des questions de descente non plate non résolues pour l'instant. On notera que lorsqu'on se borne à considérer la restriction du foncteur $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ aux préschémas réduits, (X étant propre intègre sur k algébriquement clos), on obtient bien un foncteur représentable, comme l'a montré CHEVALLEY [1] dans le cas où X est normal, et SESHADRI [12] par une méthode de descente dans le cas général. Mais avec nos notations, le schéma construit par ces auteurs n'est pas $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$, mais $(\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k})_{\mathrm{réd}}$, le schéma réduit correspondant à $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$.

Remarque 6.7. - Soit plus généralement $f : X' \to X$ un morphisme surjectif de préschémas propres sur k. Alors des considérations de descente non plate conduisent à conjecturer que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X'/k}$ est un morphisme affine, ce qui impliquerait en particulier (en divisant par les composantes connexes des éléments neutres) que l'homomorphisme correspondant sur les groupes de Néron-Severi est injectif modulo torsion. C'est ce qu'on peut vérifier par la théorie des intersections lorsque X et X' sont non singuliers. La réponse ne semble pas connue dans tout autre cas.

Remarque 6.8. - Contrairement à ce qu'on pourrait penser, la considération des schémas de Picard de schémas algébriques à éléments nilpotents est utile, et même indispensable, dans diverses questions. Ainsi, lorsque X est un schéma projectif, disons régulier, et Y une section hyperplane, il y a lieu de considérer les "voisinages infinitésimaux" de tous ordres X_n de Y, et les schémas de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_n/k}$; lorsque X est irréductible de dimension $\geqslant 4$ (resp. $\geqslant 3$), le morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X_n/k} \qquad (n \text{ grand})$$

est un isomorphisme (resp. induit un isomorphisme pour les images inverses des sous-groupes de torsion de Néron-Severi), résultat qui nous sera utile dans l'étude qualitative des schémas de Picard dans l'exposé suivant. De même, la considération des schémas de Picard de certaines courbes à éléments nilpotents et les théorèmes fondamentaux de géométrie formelle [3], permettent de vérifier, dans le cas d'égales caractéristiques, une conjecture de MUMFORD, savoir que pour tout anneau local noethérien normal complet A de dimension 2, le groupe des classes de diviseurs de A peut être considéré comme l'ensemble des points rationnels sur k d'un groupe algébrique G sur le corps résiduel k (G étant d'ailleurs déterminé canoniquement une fois qu'on se donne un corps de représentants dans A). Dans le cas où A est de dimension quelconque, il est plausible qu'il existe un pro-groupe algébrique sur k jouant le même rôle que G ci-dessus, qui se construit, dans le cas où on peut "désingulariser" Spec(A) , comme une limite projective de schémas de Picard de schémas projectifs (à éléments nilpotents) convenables sur k .

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (Claude). - Sur la théorie de Picard, Amer. J. of Math., t. 82, 1960, p. 435-490.

[2] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - Eléments de géométrie algébrique, Chapitre I et suivants. - Paris, Presses universitaires de France, 1960-1961 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques 4, 8, ...).

[3] GROTHENDIECK (Alexander). - Géométrie formelle et géométrie algébrique, Séminaire Bourbaki, t. 11, 1958/59, n° 182, 28 p.

[4] GROTHENDIECK (Alexander). - Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, I-IV., Séminaire Bourbaki, t. 12, 1959/60, n° 190, 29 p. et n° 195, 22 p. ; t. 13, 1960/61, n° 212, 20 p. et n° 221, 28 p.

[5] GROTHENDIECK (Alexander). - Techniques de construction en géométrie analytique, I-X, Séminaire Cartan, t. 13, 1960/61 : Déformation des structures analytiques complexes, n° 7-17.

[6] GROTHENDIECK (Alexander). - Séminaire de géométrie algébrique, rédigé par Lichtenbaum, Harvard University, 1961 (à paraître).

[7] LANG (Serge). - Abelian varieties. - New York, Interscience Publishers, 1959 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 7).

[8] MUMFORD (D.). - An elementary theorem in geometric invariant theory, Bull. Amer. math. Soc., t. 67, 1961, p. 483-486.

[9] MUMFORD (D.). - The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. - Paris, Presses universitaires de France, 1961 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 9).

[10] MUMFORD (D.) and TATE (J.). - Séminaire de géométrie algébrique, Harvard University, Spring Term 1962 (à paraître).

[11] OORT (F.). - Sur le schéma de Picard, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962 (à paraître).

[12] SESHADRI (C. S.). - Thèse à paraître dans Annali di Matematica.