PIERRE CARTIER

Classes de formes bilinéaires sur les espaces de Banach

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. nº 211, p. 85-98
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__85_0>

Séminaire BOURBAKI
13e année, 1960/61, n° 211

Février 1961

CLASSES DE FORMES BILINÉAIRES SUR LES ESPACES DE BANACH

par Pierre CARTIER

Introduction.

Cet exposé est un résumé d'un long article de GROTHENDIECK [3] consacré aux produits tensoriels d'espaces de Banach. On a choisi ici le point de vue dual des formes bilinéaires qui nécessite moins de développements préliminaires ; ceci a amené à modifier quelquefois la terminologie et les notations.

Les problèmes étudiés ont peu de rapport avec ceux dont traite la thèse de GROTHENDIECK [2], consacrée surtout aux espaces localement convexes les plus généraux. De même ils n'ont guère de rapport avec les travaux de SCHATTEN [4], qui s'intéresse avant tout aux opérateurs dans les espaces de Hilbert.

On a divisé cet exposé en deux parties : dans la première, on a fait l'étude des classes de formes bilinéaires sur les espaces de Banach ; les démonstrations ne présentent en général, pas de difficulté, et nous n'en donnons aucune, imitant en cela GROTHENDIECK lui-même. Dans la deuxième partie se trouvent des résultats sur les formes bilinéaires définies dans certains espaces fonctionnels usuels. A notre avis, c'est dans cette deuxième partie que se trouvent les résultats nouveaux les plus susceptibles d'applications ; aussi leurs démonstrations ont-elles été rendues indépendantes de la première partie.

I. CLASSES DE FORMES BILINÉAIRES

1. Notations.

On prend pour scalaires les nombres réels.

On note E , F , E_1 , F_1 , ... des espaces de Banach (réels).

On note $L(E , F)$ l'ensemble des applications linéaires u de E dans F pour lesquelles il existe une constante $M \geqslant 0$ avec $\|u(x)\| \leqslant M.\|x\|$ pour tout x dans E ; la plus petite des constantes M qui conviennent est notée $\|u\|$; muni de cette norme, $L(E , F)$ est un espace de Banach. Lorsque $F = \mathbb{R}$ (corps des scalaires), l'espace de Banach $L(E , \mathbb{R})$ est le dual E' de E. Une application linéaire $u \in L(E , F)$ est appelée un morphisme si $\|u\| \leqslant 1$, un monomorphisme si $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout x dans E , un épimorphisme si tout y dans F de norme < 1 est l'image $u(x)$ d'un vecteur x de E de norme < 1.

Soit A une forme bilinéaire sur $E_1 \times E_2$; si $u_i : F_i \to E_i$ est un morphisme pour $i = 1, 2$, on définit une forme bilinéaire $u_1 . A . u_2$ sur $F_1 \times F_2$ par la formule $(u_1 . A . u_2)(x_1, x_2) = A(u_1(x_1), u_2(x_2))$; on définit de plus une forme bilinéaire ${}^tA$ sur $E_2 \times E_1$ par ${}^tA(x_2, x_1) = A(x_1, x_2)$. La topologie considérée sur l'ensemble des formes bilinéaires est celle de la convergence simple : des formes A_ι ont A pour limite (suivant un filtre donné sur l'ensemble des indices ι) si $A_\iota(x_1, x_2)$ a pour limite $A(x_1, x_2)$ pour tout $x_1 \in E_1$ et tout $x_2 \in E_2$.

Soit M un espace compact. On note $C(M)$ l'espace de Banach formé des fonctions continues sur M, avec la norme $\|f\| = \sup|f(m)|$. Les éléments du dual de $C(M)$ sont les mesures sur M. Si μ est une mesure positive sur un espace localement compact M et si $p \geqslant 1$, l'expression $(\mu|f|^p)^{1/p}$ est une semi-norme sur l'espace $K(M)$ des fonctions continues à support compact ; l'espace de Banach obtenu par complétion de $K(M)$ pour cette semi-norme se note $L^p(\mu)$. Un espace de Banach E est dit de type $\mathcal{C}$ s'il est isomorphe à un espace $C(M)$, de type $\mathcal{L}$ s'il est isomorphe à un espace $L^1(\mu)$, de type $\mathcal{H}$ s'il existe un produit scalaire hermitien $(x|y)$ sur E tel que $(x|x) = \|x\|^2$ (i. e. si E est un espace de Hilbert).

2. Classes de formes bilinéaires.

Une classe α de formes bilinéaires est définie par la donnée, pour chaque couple d'espaces de Banach E_1 et E_2, d'un ensemble fermé convexe de formes bilinéaires sur $E_1 \times E_2$, les axiomes suivants étant vérifiés :

(C_1) Si A est une forme de classe α sur $E_1 \times E_2$ et si $u_i : F_i \to E_i$ est un morphisme pour $i = 1, 2$, la forme $u_1 . A . u_2$ sur $F_1 \times F_2$ est de classe α.

(C_2) Soit A une forme bilinéaire sur $E_1 \times E_2$; supposons que, pour tout sous-espace de dimension finie F_i de E_i, la restriction de A à $F_1 \times F_2$ soit de classe α ; alors A est de classe α.

(C_3) La forme bilinéaire $\lambda . xy$ sur $\underset{\sim}{R} \times \underset{\sim}{R}$ est de classe α si et seulement si $|\lambda| \leqslant 1$.

Cette définition axiomatise les propriétés des "applications c-intégrales de norme α-intégrale ≤ 1" de GROTHENDIECK.

Si α et β sont deux classes, on écrit $\alpha \subset \beta$ si toute forme de classe α est aussi de classe β.

Il y a une "plus grande" classe ε ; une forme bilinéaire A sur $E_1 \times E_2$ est de classe ε si l'on a $|A(x_1, x_2)| \leq \|x_1\| \cdot \|x_2\|$ quel que soit x_i dans E_i pour $i = 1, 2$; l'ensemble des formes bilinéaires de classe ε sur $E_1 \times E_2$ est compact, et il en est par suite de même de l'ensemble des formes de classe α quelle que soit la classe α. Si M et N sont deux espaces compacts, μ une mesure positive de masse 1 sur M et ν une mesure positive de masse 1 sur N, les formes de classe ε sur $L^1(\mu) \times L^1(\nu)$ sont définies par la formule $A(f, g) = \iint f(m)\, g(n)\, K(m, n)\, d\mu(m)\, d\nu(n)$ où K parcourt l'ensemble des fonctions mesurables sur $M \times N$ (pour la mesure produit de μ et ν) telles que $|K(m, n)| \leq 1$.

Il y a aussi une "plus petite" classe π ; les formes de classe π sur $E_1 \times E_2$ sont les limites de formes décomposées du type $\sum_i f_i(x_1)\, g_i(x_2)$ avec des $f_i \in E_1'$ et $g_i \in E_2'$ en nombre fini tels que $\sum_i \|f_i\| \cdot \|g_i\| \leq 1$. Si μ est une mesure positive de masse 1 sur un espace compact M, la forme bilinéaire $I_\mu(f, g) = \mu(fg)$ sur $C(M) \times C(M)$ est de classe π. Si la forme A sur $E_1 \times E_2$ est de classe π, il existe un espace compact M, une mesure positive μ de masse 1 sur M et des morphismes $u_i : E_i \to C(M)$ tels que $A = u_1 \cdot I_\mu \cdot u_2$. Si M et N sont deux espaces compacts, les formes de classe π sur $C(M) \times C(N)$ sont données par la formule $A(f, g) = \iint f(m)\, g(n)\, d\rho(m, n)$ où ρ parcourt l'ensemble des mesures de norme ≤ 1 sur $M \times N$.

3. Formes bilinéaires sur les espaces de Hilbert.

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Les formes de classe ε sur $H_1 \times H_2$ sont données par la formule $A(x_1, x_2) = (u(x_1)|x_2)$ avec un morphisme arbitraire u de H_1 dans H_2 ; la forme A est de classe π si et seulement si l'on a $|\mathrm{Tr}(v, u)| \leq 1$ pour tout morphisme de rang fini v de H_2 dans H_1. Les formes de classe π sont aussi les formes qui admettent le développement en série :

$$A(x_1, x_2) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n \cdot (e_n|x_1) \cdot (f_n|x_2)$$

avec une suite de nombres réels $\lambda_n \geq 0$ de somme ≤ 1, et des suites orthonormales de vecteurs e_n dans H_1 et f_n dans H_2 (théorème de Dixmier-Schatten).

On étend les propriétés des formes bilinéaires sur les espaces de Hilbert aux espaces de Banach généraux, au moyen de deux nouvelles classes. Soient E_1 et

E_2 deux espaces de Banach, et A une forme bilinéaire sur $E_1 \times E_2$. On dit que A est de classe η s'il existe des espaces de Hilbert H_i et des morphismes $u_i : E_i \to H_i$ tels que A soit de la forme $u_1 . B . u_2$ pour une forme convenable B de classe ε sur $H_1 \times H_2$. On peut caractériser de la manière suivante les forme de classe η. Introduisons l'espace de Banach F somme directe de E_1 et E_2 dont la norme est définie par $\|x_1 \oplus x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$; alors les formes de classe η sur $E_1 \times E_2$ sont les restrictions à $E_1 \times E_2$ des formes symétriques positives B sur $F \times F$ telles que $B(x , x) \leqslant \|x\|^2$.

On dira que A est de classe θ si pour tout couple de morphismes $u_i : H_i \to E_i$ (où les H_i sont de type $\mathcal{H}$), la forme $u_1 . A . u_2$ sur $H_1 \times H_2$ est de classe π. Il revient au même de supposer que l'on a $|\sum_i A(x_i , y_i)| \leqslant 1$ quels que soient les vecteurs $x_1 , \ldots , x_n$ de E_1 et les vecteurs $y_1 , \ldots , y_n$ de E_2 vérifiant les inégalités $\sum_i |f(x_i)|^2 \leqslant \|f\|^2$ et $\sum_i |g(y_i)|^2 \leqslant \|g\|^2$ (pour $f \in E_1'$ et $g \in E_2'$). Par exemple, si M et N sont deux espaces compacts, les formes de classe θ sur $C(M) \times C(N)$ sont les formes A telles que $|\sum_i A(f_i , g_i)| \leqslant 1$ quelles que soient les fonctions f_i sur M et g_i sur N avec $\sum_i |f_i|^2 \leqslant 1$ et $\sum_i |g_i|^2 \leqslant 1$.

On peut caractériser autrement les formes de classe θ. Une forme bilinéaire A sur $E_1 \times E_2$ est de classe θ si l'on peut trouver sur E_i (pour $i = 1 , 2$) une forme bilinéaire positive B_i, limite de formes décomposées $\sum_k \lambda_k f_k(x) . f_k(y)$ (avec $\sum_k \lambda_k = 1$, $\lambda_k \geqslant 0$ et f_k dans E_i' de norme $\leqslant 1$), de sorte que l'on ait $|A(x , y)|^2 \leqslant B_1(x , x) . B_2(y , y)$. On montre en effet facilement que les formes bilinéaires vérifiant le critère précédent forment une classe, et que si E_1 et E_2 sont de dimension finie, on obtient les formes de classe θ sur $E_1 \times E_2$.

4. Construction de classes de formes bilinéaires.

Rappelons qu'un espace de Banach E est dit <u>métriquement accessible</u> si pour tout $\varepsilon > 0$ et toute partie finie M de E, il existe un morphisme u de rang fini de E dans E tel que $\|u(x) - x\| < \varepsilon$ pour $x \in M$. Les espaces de type $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{H}$ sont métriquement accessibles ; il est peu vraisemblable que tout espace de Banach ait cette propriété, mais on ne connaît pas de contre-exemple.

Soit α une classe de formes bilinéaires. On peut lui associer un certain nombre d'autres classes. Tout d'abord la classe transposée ${}^t\alpha$ se compose des formes bilinéaires A sur $E_1 \times E_2$ telles que la forme ${}^tA$ sur $E_2 \times E_1$ soit de classe α. La classe α est dite symétrique si $\alpha = {}^t\alpha$; il en est ainsi si $\alpha = \varepsilon, \pi, \theta, \eta$.

La classe duale α' de α se définit ainsi (cf. axiome C_2). Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach de dimension finie ; on a alors la propriété suivante :

(P) Une forme bilinéaire sur $E_1 \times E_2$ est de classe α' si et seulement si, pour toute forme bilinéaire B de classe α sur $E_1' \times E_2'$ du type $B(f, g) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} f(x_i).g(y_i)$, on a $|\sum_{1\leqslant i\leqslant n} A(x_i, y_i)| \leqslant 1$.

La propriété (P) est alors encore satisfaite dans chacun des cas suivants

a) E_1 et E_2 sont métriquement accessibles.

b) E_1 ou E_2 est métriquement accessible et $\alpha = \pi$.

c) E_1 et E_2 sont réflexifs et $\alpha = \pi$.

d) $\alpha = \varepsilon$.

On a $\alpha'' = \alpha$ pour toute classe α et $\varepsilon' = \pi$, $\pi' = \varepsilon$, $\eta' = \theta$, $\theta' = \eta$.

La formation de la classe $\alpha_{\mathcal{L}}$ est analogue à celle d'un 0-ième foncteur dérivé ; on pourrait sans doute définir des foncteurs dérivés de tous ordres (les formes bilinéaires de classe α sur $E_1 \times E_2$ sont les éléments de norme $\leqslant 1$ d'un espace de Banach $B^{\alpha}(E_1, E_2)$ qui est un bifoncteur contravariant en E_1 et E_2 !).

Une forme bilinéaire A sur $E_1 \times E_2$ est dite de classe $\alpha_{\mathcal{L}}$ si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

a) Quels que soient les morphismes $u_i : L_i \to E_i$, où L_i est de classe $\mathcal{L}$, la forme $u_1.A.u_2$ sur $L_1 \times L_2$ est de classe α.

b) Il existe des épimorphismes $v_i : F_i \to E_i$ tels que la forme $v_1.A.v_2$ soit de classe α sur $F_1 \times F_2$.

Pour construire l'ensemble des formes de classe $\alpha_{\mathcal{L}}$ sur $E_1 \times E_2$, on choisit des espaces L_i de classe $\mathcal{L}$ et des épimorphismes $u_i : L_i \to E_i$ et l'on considère l'ensemble des formes A sur $E_1 \times E_2$ telles que $u_1.A.u_2$ soit de classe α.

La classe $\alpha_{\mathcal{C}}$ se définit de manière duale ; une forme A sur $E_1 \times E_2$ est dite de classe $\alpha_{\mathcal{C}}$ si elle satisfait aux deux propriétés équivalentes suivantes :

a') Il existe des morphismes $u_i : E_i \to C_i$, où C_i est de classe $\mathcal{C}$, et une forme B de classe α sur $C_1 \times C_2$ tels que $A = u_1 . B . u_2$.

b') Quels que soient les monomorphismes $v_i = E_i \to F_i$, il existe une forme B sur $F_1 \times F_2$, de classe α, telle que $A = v_1 . B . v_2$.

On a $\alpha_{\mathcal{C}} \subset \alpha \subset \alpha_{\mathcal{L}}$ et $(\alpha_{\mathcal{L}})' = (\alpha')_{\mathcal{C}}$. On dit que la classe α est injective si $\alpha = \alpha_{\mathcal{L}}$ (par exemple ε et η sont injectives) et qu'elle est projective si $\alpha = \alpha_{\mathcal{C}}$ (par exemple π et θ sont projectives). Il est immédiat que $\alpha_{\mathcal{L}}$ est la plus petite classe injective contenant α et que $\alpha_{\mathcal{C}}$ est la plus grande classe projective contenue dans α.

5. Tableau des principales classes.

Le tableau suivant résume les relations connues entre les différentes classes ; un symbole $\alpha \to \beta$ signifie qu'il existe un nombre réel $h > 0$ tel que toute forme de classe α soit de la forme $h . B$ où B est de classe β. Certaines des relations qui suivent sont des cryptographies pour les résultats de la deuxième partie.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & \eta_{\mathcal{C}} & & \theta_{\mathcal{L}} & & & & & & \\
 & & & & \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow & & & & & & \\
\pi_{\mathcal{C}} = \pi & \to & \varepsilon_{\mathcal{C}} & \rightleftarrows & \theta & \to & \eta & \rightleftarrows & \pi_{\mathcal{L}} & \to & \varepsilon = \varepsilon_{\mathcal{L}} \\
 & & & & \| & & \| & & & & & & \\
 & & & & \theta_{\mathcal{C}} & & \eta_{\mathcal{L}} & & & & & &
\end{array}$$

Nous ajoutons un tableau donnant la correspondance entre nos notations et celles de GROTHENDIECK.

ε	π	η	θ	$\alpha_{\mathcal{C}}$	$\alpha_{\mathcal{L}}$	$\pi_{\mathcal{L}}$	$\varepsilon_{\mathcal{C}}$	$\alpha \subset \beta$
$\vee$	$\wedge$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{H}'$	$\backslash\alpha/$	$/\alpha\backslash$	$/\wedge\backslash$	$\backslash\vee/$	$\alpha \gg \beta$

II. CLASSES DE FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

1. Fonctions de type positif.

Soit M un espace compact. Une fonction continue K sur $M \times M$ est dite de type positif si $K(x, y) = K(y, x)$ et si l'on a les inégalités :

$$(1) \qquad \sum_{i,j} K(x_i , x_j)\, \lambda_i \lambda_j \geq 0$$

pour tous les systèmes finis de points x_i de M et de scalaires λ_i. On écrit $K >> L$ pour exprimer que $K - L$ est de type positif.

Les fonctions de type positif interviennent en relation avec les espaces de Hilbert. Tout d'abord, si f est une application continue de M dans un espace de Hilbert H, et si l'on pose $K(x , y) = (f(x)|f(y))$ l'expression (1) est égale à $\|\sum_i \lambda_i f(x_i)\|^2$ donc est positive. Réciproquement, si K est de type positif, considérons l'espace vectoriel H formé des fonctions continues u sur M telles que $K(x , y).m^2 - u(x)\, u(y)$ soit de type positif pour une constante $m \geq 0$ convenable ; si l'on note $\|u\|$ la plus petite des constantes possibles, on définit une norme sur H, pour laquelle H devient un espace de Hilbert. Posons $K_x(y) = K(x , y)$; alors K_x est un élément de H, l'application $x \to K_x$ de M dans H est continue, et l'on a $(K_x|K_y) = K(x , y)$.

Supposons la fonction de type positif K définie au moyen d'une application continue f de M dans un espace de Hilbert ; comme $f(M)$ est un sous-espace compact de H, il admet une suite dénombrable partout dense, et le sous-espace vectoriel fermé H_1 de H engendré par $f(M)$ admet une base orthonormale dénombrable $\{e_n\}$; si l'on pose $f_n(x) = (f(x)|e_n)$, on a $f(x) = \sum_n f_n(x).e_n$, d'où :

$$(2) \qquad K(x , y) = \sum_n f_n(x)\, f_n(y)$$

(série uniformément convergente sur $M \times M$).

De la représentation (2), on déduit l'inégalité :

$$(3) \qquad \iint K(x , y)\, u(x)\, u(y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) \geq 0$$

pour toute mesure μ sur M, et toute fonction u sommable pour $|\mu|$. On notera que (1) est le cas particulier de (3) correspondant à $u = 1$ et $\mu = \sum_i \lambda_i \delta_{x_i}$ (où l'on pose $\delta_x(f) = f(x)$). Réciproquement, si le support de μ est égal à M, et si une fonction continue K sur $M \times M$ vérifie la formule (3) pour toute fonction continue u sur M, alors K est de type positif.

Choisissons maintenant une mesure μ positive sur M. On dira qu'une fonction K sommable sur $M \times M$ pour la mesure produit $\pi = \mu \otimes \mu$ est de type positif si l'on a l'inégalité (3) pour toute fonction continue u sur M ; la même inégalité est alors valable pour u mesurable et bornée. De plus, par des raisonnements analogues aux précédents, on déduit l'existence d'une décomposition $K(x\ ,\ y) = \sum_\alpha f_\alpha(x)\ f_\alpha(y)$, qui converge pour la topologie faible induite par la dualité entre $L^1(\pi)$ et l'espace des fonctions continues sur $M \times M$ (noter que sur toute partie bornée de $L^\infty(\pi)$, cette topologie faible coïncide avec la topologie faible résultant de la dualité entre $L^\infty(\pi)$ et $L^1(\pi)$; nous considérons exclusivement cette topologie faible sur $L^1(\pi)$).

2. Fonctions de type intégral.

On conserve l'espace compact M . On notera Γ l'ensemble des fonctions mesurables et bornées par 1 en module, qui sont limites faibles de fonctions de la forme $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i|\ f_i(x).f_i(y)$ où les scalaires λ_i vérifient $\sum_i |\lambda_i| \leqslant 1$ et où les fonctions mesurables f_i sont majorées par 1 en module. D'après le théorème des bipolaires, Γ n'est autre que l'ensemble des fonctions mesurables et bornées K sur $M \times M$ telles que $|\iint_{M\times M} K.L\ d\pi| \leqslant 1$ pour toute fonction L dans $L^1(\pi)$ vérifiant $|\iint L(x\ ,\ y)\ f(x).f(y)\,|\,d\mu(x)\ d\mu(y)| \leqslant 1$ pour f mesurable et majorée en module par 1 sur M . En utilisant la compacité de la boule unité de $L^\infty(\mu)$ pour la topologie faible, et un théorème de GROTHENDIECK sur la représentation intégrale d'une application linéaire continue d'un espace L^1 dans un espace L^∞ au moyen d'un noyau mesurable et borné, on obtient finalement la caractérisation suivante :

L'ensemble Γ se compose des fonctions de la forme

(4) $$K(x\ ,\ y) = \int_T L(x\ ,\ t)\ L(y\ ,\ t)\ d\nu(t)$$

où ν est une mesure de norme $\leqslant 1$ sur un espace compact T , et où L est une fonction mesurable, pour la mesure produit $\mu \otimes \nu$ sur $M \times T$, bornée par 1 en module.

Il résulte immédiatement de cette caractérisation que Γ est stable par multiplication. On dira qu'une fonction de type positif est intégrale si elle appartient à Γ .

Après ces préliminaires, on peut énoncer le résultat fondamental de GROTHENDIECK.

THÉORÈME 1. - Soit μ une mesure positive sur l'espace compact M . Si la fonction K sur $M \times M$ est mesurable, bornée par 1 en module et de type positif, alors $\mathrm{sh}(\frac{\pi}{2})^{-1}\ K$ est intégrale.

On a vu que K admet une représentation comme somme faiblement convergente $K(x\,,\,y) = \sum_\alpha f_\alpha(x).f_\alpha(y)$; comme Γ est faiblement fermé, on peut se ramener au cas où la série précédente a un nombre fini de termes ; autrement dit, on peut supposer que l'on a $K(x\,,\,y) = (f(x)\,|f(y))$ où f est une application mesurable de M dans un espace de Hilbert H de dimension finie.

Soit S l'ensemble compact formé des vecteurs a de H de norme 1. Sur S, il existe une mesure ν positive de masse 1 invariante par le groupe des automorphismes unitaires de H, et une seule. Notons $\sigma(x)$ le signe du nombre réel x, défini par $\sigma(0) = 0$ et $\sigma(x) = x/|x|$ si $x \neq 0$. Un calcul élémentaire donne alors l'identité :

$$\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arc}\,\sin(a|b) = \int_S \sigma(a|t)\;\sigma(b|t)\;d\nu(t) \tag{5}$$

en convenant que $\mathrm{Arc}\,\sin x$ est l'unique nombre réel compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ dont le sinus soit égal à x. La formule (5) prouve alors que la fonction

$$L(x\,,\,y) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arc}\,\sin(f(x)\,|f(y)) \tag{6}$$

est de type positif et intégrale. Mais en utilisant le développement en série bien connu du sinus, on trouve :

$$K(x\,,\,y) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k\, L(x\,,\,y)^{2k+1}/(2k+1)\,!$$

et, comme Γ est fermé, convexe et stable par multiplication, le théorème résulte immédiatement de là

C. Q. F. D.

REMARQUE. – On ne sait pas si toute fonction mesurable et bornée de type positif sur $M \times M$ est de la forme (4) avec une mesure ν positive sur T. On peut cependant prouver qu'elle est majorée (au sens de la relation d'ordre $\gg$) par une telle fonction. En effet, avec les notations de la démonstration précédente, on peut prouver l'inégalité $K \ll \frac{\pi}{2} L$. Pour démontrer cela, on se ramène d'abord facilement au cas où $M = S$ et $\mu = \nu$; soit E l'espace de Hilbert formé des fonctions de carré sommable sur S pour la mesure ν, et soit E_1 le sous-espace, isomorphe à H, formé des fonctions de la forme $x \to (a|x)$ pour a parcourant H. Le projecteur orthogonal P de E sur E_1 est un opérateur intégral, admettant pour noyau la fonction $n.(x|y)$, si l'on note n la dimension de H. Si l'on note A l'opérateur continu dans E ayant pour noyau la fonction mesurable $\sigma(x|y)$, notre assertion équivaut à dire que l'opérateur $\frac{\pi}{2} A^* A - P/n$ dans E est hermitien positif. Comme E_1 est stable par A et A^*, et que ces opérateurs induisent dans E_1 des homothéties (cela résulte d'un argument facile de théorie des groupes), on voit facilement que notre assertion équivaut à l'inégalité

$$\frac{\pi}{2}|\mathrm{Tr}(AP)|^2 \geqslant n \ ;$$

or on a

$$\mathrm{Tr}(AP) = n \iint |(x|y)|d\nu(x)\, d\nu(y) = n \int_S |(a|x)|d\nu(x) \qquad ,$$

et l'on achève la démonstration en calculant explicitement ces intégrales, ce qui ramène à une inégalité sur la fonction Γ d'Euler.

3. Formes bilinéaires sur les espaces de fonctions continues.

Pour les fonctions continues de type positif, on peut donner une représentation au moyen d'une série analogue à (2), mais avec de meilleures propriétés de convergence.

THÉORÈME 2. - Soit M un espace compact et soit $\varepsilon > 0$. Toute fonction K de type positif sur $M \times M$, continue et bornée par 1 en module, admet une représentation sous forme de série :

$$K(x\,,\,y) = \sum_n \lambda_n f_n(x) \cdot f_n(y) \tag{7}$$

où les fonctions f_n, continues sur M, sont majorées par 1 en module, et où $\sum_n |\lambda_n| \leqslant \mathrm{sh}(\pi/2) + \varepsilon$.

Soit C l'espace des fonctions continues sur M, muni de la norme usuelle $\|f\| = \sup|f(x)|$. Par ailleurs soit E l'ensemble des fonctions sur $M \times M$ qui sont "symétriques" et "décomposées", c'est-à-dire de la forme $h(x\,,\,y) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i f_i(x)\cdot f_i(y)$; on notera Δ le sous-ensemble de E formé des fonctions h telles que $\|f_i\| \leqslant 1$ et $\sum_i |\lambda_i| < 1$. Au moyen de la formule $\tilde{u}(h) = \sum_i \lambda_i u(f_i\,,\,f_i)$, on définit une correspondance bijective entre les formes linéaires $\tilde{u}$ sur E et les formes bilinéaires symétriques u sur $C \times C$;

l'inégalité $|\tilde{u}(h)| \leq 1$ pour tout h dans Δ équivaut alors à $|u(f\,,f)| \leq \|f\|^2$ pour tout f dans C, ou encore à $\|u(f\,,g)\| \leq \|f\|\|g\|$ pour f et g dans C (démonstration immédiate). Le théorème de Hahn-Banach montre alors que la relation $h \in m.\Delta$ équivaut à $|\tilde{u}(h)| < m$ pour toute forme bilinéaire symétrique u sur $C \times C$ telle que $|u(f\,,f)| \leq \|f\|^2$ pour tout f dans C.

On sait qu'on peut représenter K sous la forme d'une série uniformément convergente

$$K(x\,,y) = \sum_i g_i(x).g_i(y) \tag{8}$$

et chaque somme partielle est majorée en module par 1 sur $M \times M$. Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'un nombre fini n de termes dans la série (8). Soit u une forme bilinéaire symétrique sur $C \times C$ telle que $|u(f\,,f)| \leq \|f\|^2$. On va prouver $\tilde{u}(K) < \mathrm{sh}(\frac{\pi}{2}) + \varepsilon$. Comme les g_i sont continues et en nombre fini, on peut trouver un recouvrement ouvert fini $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M tel que l'oscillation de chaque g_i dans chaque U_α soit $< \varepsilon/4n$. On choisira un point x_α dans chaque U_α et une partition continue de l'unité $\{\varphi_\alpha\}$ subordonnée au recouvrement $\{U_\alpha\}$. Alors l'opérateur linéaire P dans C défini par $P(f) = \sum_{\alpha\in A} f(x_\alpha).\varphi_\alpha$ vérifie $\|P(f)\| \leq \|f\|$ et $\|P(g_i) - g_i\| < \varepsilon/4n$, d'où

$$\Big|\sum_i u(g_i\,,g_i) - \sum_i u(Pg_i\,,Pg_i)\Big| < \varepsilon/2 \tag{9}$$

Par ailleurs, il existe une matrice symétrique $T = \|t_{\alpha\beta}\|$ telle que $u(Pf\,,Pg) = \sum_{\alpha,\beta} f(x_\alpha)\,t_{\alpha\beta}\,g(x_\beta)$ et telle que $|{}^t v.T.v| \leq 1$ pour tout vecteur $v = (v_\alpha)$ dont les composantes sont ≤ 1 en module. On a alors $\sum_i u(Pg_i\,,Pg_i) = \sum_{\alpha,\beta} t_{\alpha\beta}.K(x_\alpha\,,x_\beta)$. Mais la matrice $\|K(x_\alpha\,,x_\beta)\|$ est symétrique, positive et ses éléments sont majorés par 1 en module. En appliquant le théorème 1 à l'espace discret A, on voit qu'il existe un espace compact T avec une mesure ν positive de norme $\leq \mathrm{sh}(\pi/2)$ et une fonction mesurable L sur $A \times T$ de module ≤ 1 telles que

$$K(x_\alpha\,,x_\beta) = \int_T L(\alpha\,,t)\,L(\beta\,,t)\,d\nu(t) \quad .$$

Un calcul facile montre alors qu'on a $|\sum_i u(Pg_i\,,Pg_i)| \leq \mathrm{sh}(\pi/2)$ et finalement $\tilde{u}(K) < \mathrm{sh}(\pi/2) + \varepsilon/2$.

On règle facilement le cas général. Comme la série (8) converge uniformément, on voit qu'on peut trouver une suite strictement croissante $\{i_k\}$ telle que

$\left|\sum_{i_k<i<i_{k+1}} g_i(x)\cdot g_i(y)\right| \leqslant \varepsilon/20.2^k$, et on appliquera à chacune de ces sommes partielles le résultat précédent.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - Soit u une forme bilinéaire symétrique sur $C \times C$ telle que $|u(f\,,\,g)| \leqslant \|f\|\,\|g\|$. Il existe alors une mesure μ positive de masse $\leqslant \mathrm{sh}(\frac{\pi}{2})$ sur M telle que $|u(f\,,\,f)| \leqslant \mu(f^2)$, et la forme bilinéaire u se prolonge par continuité en une forme bilinéaire sur $L^2(\mu) \times L^2(\mu)$.

[Démonstration copiée de [1]].

Posons $v = \mathrm{sh}(\frac{\pi}{2})^{-1}.u$. Le théorème 2 montre que l'on a alors $|\sum_i v(f_i\,,\,f_i)| \leqslant \|\sum_i f_i^2\|$, et par conséquent la quantité

$$Q(g\,,\,f_1\,,\,\ldots\,,\,f_n) = \|g + \sum_i f_i^2\| - |\sum_i v(f_i\,,\,f_i)|$$

reste bornée en module par $\|g\|$ lorsque n et les f_i varient. On notera $Q(g)$ la borne inférieure de $Q(g\,,\,f_1\,,\,\ldots\,,\,f_n)$ lorsque n et les f_i varient ; on vérifie immédiatement les relations suivantes :

(9) $$Q(\lambda.g) = \lambda.Q(g) \qquad \text{si} \quad \lambda > 0$$

(10) $$Q(g_1 + g_2) \leqslant Q(g_1) + Q(g_2)$$

(11) $$|Q(g)| \leqslant \|g\|$$

(12) $$Q(-\,|g|^2) \leqslant -\,|v(g\,,\,g)| \quad .$$

D'après les deux premières propriétés et le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire μ' sur C telle que $\mu'(g) \leqslant Q(g)$. D'après (11), μ' est de norme $\leqslant 1$, et l'on a $|v(g\,,\,g)| < \mu'|g|^2$ d'après (12). Il en résulte que μ' est une mesure positive de masse $\leqslant 1$, et si l'on pose $\mu = \mu'\ \mathrm{sh}(\pi/2)$. , on a bien $|u(g\,,\,g)| < \mu|g|^2$.

C. Q. F. D.

REMARQUES.

1) Si M est un groupe compact, et si la forme bilinéaire v est invariante par les translations à gauche, il en sera de même de la fonctionnelle Q ; si μ' est une mesure telle que $\mu'(g) \leqslant Q(g)$, on aura encore $\nu(g) \leqslant Q(g)$, en notant ν la moyenne des translatées à gauche de μ' ; ceci prouve que l'on peut alors supposer que μ' est une mesure de Haar sur G , et que u se prolonge par continuité en une forme bilinéaire sur $L^2(\mu) \times L^2(\mu)$ pour une mesure

de Haar μ.

2) Le corollaire s'étend facilement au cas des formes bilinéaires continues sur $C(M) \times C(N)$ où M et N sont deux espaces compacts ; il suffit d'appliquer le corollaire à l'espace compact P somme topologique de M et N et à une forme bilinéaire symétrique sur $C(P) \times C(P)$ convenablement déduite de u.

4. Conséquences diverses.

Les théorèmes précédents permettent de prouver un certain nombre de résultats d'analyse fonctionnelle. Nous donnerons seulement quelques exemples.

A) Opérateurs linéaires.

Soient H_1, H_2 des espaces de Hilbert, C_1, C_2 des espaces de type $\mathcal{C}$ et L_1, L_2 des espaces de type $\mathcal{L}$. Rappelons qu'une application linéaire $u : E \to F$ où E et F sont des espaces de Banach est dite <u>nucléaire</u> si elle se représente sous la forme $u(x) = \sum_{n \geqslant 0} f_n(x) . e_n$ avec $f_n \in L'$ et $e_n \in F$ tels que $\sum_{n \geqslant 0} \|e_n\| \, \|f_n\|$ soit fini.

Toute application composée :

$$C_1 \to L_1 \to C_2 \to L_2$$

$$H_1 \to C_1 \to L_1$$

$$C_1 \to L_1 \to H_1$$

est nucléaire. Toute application composée : $H_1 \to C_1 \to H_2$ ou $H_1 \to L_1 \to H_2$ est du type de Hilbert-Schmidt.

B) Intégration.

Soit M un espace compact et C l'espace de Banach des fonctions continues sur M. Si u est une application linéaire de C dans un espace de Banach E de type $\mathcal{H}$ ou $\mathcal{L}$, il existe une mesure positive μ sur M telle que u se prolonge par continuité en une application linéaire de $L^2(\mu)$ dans E.

Si μ est une mesure positive sur M et si u est une application linéaire continue d'un espace de Hilbert H à valeurs dans $L^1(\mu)$, il existe une fonction $f \in L^2(\mu)$ telle que u se factorise en une application linéaire continue de H dans $L^2(\mu)$ suivie de la multiplication par f (qui applique $L^2(\mu)$ dans $L^1(\mu)$).

C) Théorème de Littlewood.

Si μ est une mesure positive sur un espace localement compact M, et si la série $\sum_n f_n$ des fonctions sommables est commutativement convergente dans $L^1(\mu)$, la somme des carrés des normes des f_n est sommable.

En corollaire, si f est une fonction sur un groupe discret G et si le produit de f par toute fonction f' de carré égal à 1 est combinaison linéaire de fonctions de type positif, alors f est de carré sommable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMEMIYA (I.) and SHIGA (K.). - On tensor products of Banach spaces, Kodai math. Semin. Reports, t. 9, 1957, p. 161-186.

[2] GROTHENDIECK (Alexander). - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Memoirs of the American mathematical Society, 16).

[3] GROTHENDIECK (Alexander). - Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, Bol. Soc. Mat. Sao Paulo, t. 8, 1956, p. 1-79.

[4] SCHATTEN (Robert). - A theory of cross-spaces. - Princeton, Princeton University Press, 1950 (Annals of Mathematics Studies, 26).