

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ALAIN GUICHARDET

Représentations des algèbres involutives

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. n° 207, p. 33-40

http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__33_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATIONS DES ALGÈBRES INVOLUTIVES

par Alain GUICHARDET

(d'après un article de James GLIMM [6])

Il me sera question ici que de C^* -algèbres et de représentations dans des espaces hilbertiens. Si \mathfrak{A} est une telle algèbre, l'espace de ses idéaux primitifs, muni de la topologie de Jacobson, est toujours un T_0 -espace ; on munit le spectre $\hat{\mathfrak{A}}$ de \mathfrak{A} de la topologie image réciproque de la précédente par l'application $\varphi \rightarrow \text{Ker } \varphi$; $\hat{\mathfrak{A}}$ est évidemment un T_0 -espace si et seulement si deux représentations irréductibles de \mathfrak{A} de même noyau sont équivalentes.

Supposons \mathfrak{A} séparable ; soient H_n un espace hilbertien de dimension n ($n = 1, 2, \dots, \infty$, où ∞ désigne la puissance du dénombrable). $\hat{\mathfrak{A}}_n$ l'espace des représentations (concrètes) irréductibles de \mathfrak{A} dans H_n et $\hat{\mathfrak{A}}_n$ l'espace de leurs classes d'équivalence ; l'ensemble $\hat{\mathfrak{A}}$ est la somme des $\hat{\mathfrak{A}}_n$ et la topologie de Jacobson sur $\hat{\mathfrak{A}}_n$ est identique à la topologie quotient de la topologie simple faible sur $\hat{\mathfrak{A}}_n$.

On peut considérer [8] sur $\hat{\mathfrak{A}}_n$ la structure borélienne (séparée, plus fine que la structure borélienne sous-jacente à la topologie de Jacobson) quotient de la structure borélienne sous-jacente à la topologie simple faible et sur $\hat{\mathfrak{A}}$ la structure borélienne somme des précédentes ; et on dit que $\hat{\mathfrak{A}}$ est lisse si, muni de cette structure borélienne, il est dénombrablement séparé, et métriquement lisse si pour toute mesure borélienne finie sur $\hat{\mathfrak{A}}$ il existe un sous-ensemble borélien de $\hat{\mathfrak{A}}$ de complémentaire négligeable qui soit dénombrablement séparé.

Une C^* -algèbre \mathfrak{A} est dite CCR-algèbre (ou de Kaplansky) si pour toute représentation irréductible φ de \mathfrak{A} , $\varphi(\mathfrak{A})$ est l'algèbre des opérateurs compacts ; alors \mathfrak{A} admet une suite de composition dont les quotients ont des spectres séparés. Une C^* -algèbre est dite GCR-algèbre si elle admet une suite de composition à quotients CCR ou encore une suite de composition dont les quotients ont des spectres séparés. On démontre [7] que toute C^* -algèbre contient un plus grand idéal GCR et que le quotient est sans idéaux GCR ..

Exemples de CCR-algèbres : Les C^* -algèbres des groupes de Lie connexes semi-simples et des groupes de Lie réels nilpotents simplement connexes.

Exemples de GCR-algèbres : Les C^* -algèbres des groupes algébriques réels.

Exemples de C^* -algèbres sans idéaux GCR : Toute C^* -algèbre d'opérateurs dont l'adhérence faible n'a pas de composante de type I [5].

Propriétés relatives aux C^* -algèbres.

- (a) \mathfrak{A} est GCR .
- (b) \mathfrak{A} est de type I (i. e. toute représentation factorielle de \mathfrak{A} est de type I).
- (c) $\hat{\mathfrak{A}}$ est un T_0 -espace.
- (d) Pour toute représentation irréductible φ de \mathfrak{A} , $\varphi(\mathfrak{A})$ contient l'algèbre des opérateurs compacts.
- (e) $\hat{\mathfrak{A}}$ est lisse.
- (f) $\hat{\mathfrak{A}}$ est métriquement lisse.

Les implications (a) \Rightarrow (d) et (d) \Rightarrow (c) se démontrent relativement facilement (voir par exemple le présent article).

(a) \Rightarrow (b) : voir [7].

(c) \Rightarrow (a), (c) \Rightarrow (e) et (e) \Rightarrow (c) pour les C^* -algèbres séparables : voir respectivement [3], [4] et [2].

Enfin l'implication (e) \Rightarrow (f) est évidente.

On va démontrer ici, pour les C^* -algèbres séparables, les résultats suivants :

THÉOREME 1.

(i) (b) \Rightarrow (a) . Plus précisément, toute C^* -algèbre séparable non GCR admet des représentations factorielles de types II et III .

(ii) (c) \Rightarrow (a) .

THÉOREME 2. - (f) \Rightarrow (a) .

L'outil essentiel pour leur démonstration sera le lemme suivant.

LEMME. - Soit \mathfrak{A} une C^* -algèbre séparable à unité sans idéaux GCR et soit S_0, S_1, S_2, \dots une suite d'éléments hermitiens de \mathfrak{A} ; on suppose $S_0 \geq 0$ et $\|S_0\| = 1$. Pour tout entier $n \geq 1$, il existe des éléments de \mathfrak{A} non nuls et de norme ≤ 1 $\forall (a_1, \dots, a_n)$ ($a_i = 0$ ou 1) et une matrice hermitienne $\alpha(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)$ tels que si on pose

$$T_n = \sum_{\substack{a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_n}} \alpha(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \cdot V(a_1, \dots, a_n) \cdot V(b_1, \dots, b_n)^*$$

$$E(n) = \sum_{a_1, \dots, a_n} V(a_1, \dots, a_n) \cdot V(a_1, \dots, a_n)^*$$

les conditions suivantes soient vérifiées :

(1) si $i \geq 2$, $\|E(i) \cdot (S_{i-1} - T_{i-1}) \cdot E(i)\| < \frac{1}{i}$

(2) $S_0 + \frac{1}{4} I \geq V(0) \cdot V(0)^*$.

(3) si $j \leq i$ et si $a_1, \dots, a_j \neq b_1, \dots, b_j$, alors

$$V(a_1, \dots, a_j)^* \cdot V(b_1, \dots, b_j) = 0 .$$

(4) si $i \geq 2$, $V(a_1, \dots, a_i) = V(a_1, \dots, a_{i-1}) \cdot V(0, \dots, 0, a_i)$

(5) si $j < i$

$$V(a_1, \dots, a_j)^* \cdot V(a_1, \dots, a_j) \cdot V(0, \dots, 0, a_i) = V(0, \dots, 0, a_i)$$

(6) $V(0, \dots, 0) \geq 0$.

De plus si $\mathfrak{M}(n)$ est l'espace vectoriel engendré par les
 $V(a_1, \dots, a_n) \cdot V(b_1, \dots, b_n)^*$, si φ est une représentation de \mathfrak{A} qui n'an-
nule aucun $E(n)$ et si $F(n)$ est l'adhérence de l'image de $\varphi(E(n))$, $F(n)$ est
une fonction décroissante de n , $\varphi(\mathfrak{M}(n))$ conserve $F(n+1)$ et l'algèbre in-
duite $\varphi(\mathfrak{M}(n))_{F(n+1)}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices à 2^n dimensions, les
opérateurs $\varphi(V(a_1, \dots, a_n) \cdot V(b_1, \dots, b_n)^*)_{F(n+1)}$ correspondant aux éléments
de base habituels.

Nous esquisserons seulement la construction des $V(a_1, \dots, a_n)$ et des
 $\alpha(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ et la vérification de la condition (1), le reste ne pré-
 sentant pas de difficultés majeures.

On va construire en plus des éléments $B(n)$ positifs de norme 1 tels que :

(7) $V(a_1, \dots, a_n)^* \cdot V(a_1, \dots, a_n) \cdot B(n) = B(n)$.

Procédant par récurrence, on pose $B(0) = S_0^{1/2}$, $V(\emptyset) = I$ et on suppose construits
 $B(n)$, les $V(a_1, \dots, a_i)$ pour $i = 1, \dots, n$ et les $\alpha(a_1, \dots, a_i, b_1, \dots, b_i)$

pour $i = 1, \dots, n-1$, de façon que l'on ait (7) et (1) à (6) pour $0 < j \leq i \leq n$; on va construire les $\alpha(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)$, $V(0, \dots, 0, 0)$, $V(0, \dots, 0, 1)$ et $B(n+1)$ et on définira $V(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ par (4) pour $n \geq 0$.

Le spectre de $B(n)$ contient 1, par suite, il existe une forme linéaire positive élémentaire μ sur \mathfrak{A} telle que

$$\mu(I) = \mu(B(n)) = 1 \quad .$$

On pose

$$\alpha(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) = \mu(V(a_1, \dots, a_n)^* \cdot S_n \cdot V(b_1, \dots, b_n)) \quad .$$

μ définit une représentation irréductible φ dans un hilbertien H et un vecteur $x \in H$ de norme 1 tels que

$$\mu(A) = (\varphi(A) x | x) \quad \text{pour tout } A \in \mathfrak{A} \quad .$$

Soit K le sous-espace vectoriel fermé de H engendré par les $\varphi(V(a_1, \dots, a_n)) x$; on a

$$K \cdot \varphi(S_n) \cdot K = K \cdot \varphi(T_n) \cdot K$$

donc

$$(\varphi(S_n - T_n) \cdot y | y) = 0 \quad \text{pour tout } y \in K \quad .$$

Il existe $B \in \mathfrak{A}$ tel que $0 \leq B \leq I$ et que $\varphi(B)$ conserve les $V(a_1, \dots, a_n) \cdot x$.

Posons

$$A = B(n) \cdot \prod_{a_1, \dots, a_n} V(a_1, \dots, a_n)^* \cdot B \cdot V(a_1, \dots, a_n)$$

ce produit étant pris dans un ordre quelconque.

Il existe un nombre réel positif γ tel que pour toute forme linéaire positive normée λ sur \mathfrak{A}

$$\lambda(B) > 1 - \gamma \implies |\lambda(S_n - T_n)| < \frac{1}{n+1} \quad .$$

Puis il existe un nombre réel positif δ tel que pour toute suite A_i ($i = 1, \dots, 2^{n+1} + 2$) d'éléments de $\mathfrak{E}(H)$ tels que $0 \leq A_i \leq I$ et pour

tout vecteur unitaire $t \in H$:

$$(A_1 \dots A_{2^{n+1}+2} A_{2^{n+1}+2} \dots A_1 t | t) > 1 - \delta$$

implique

$$(A_i t | t) > 1 - \frac{\gamma}{2} \text{ et } \|A_i t - t\| < \frac{\gamma}{2} \text{ pour tout } i \text{ .}$$

Posons $\sigma = \inf \left(\frac{1}{16}, \delta \right)$.

Pour tout ε tel que $0 < \varepsilon < 1$ on note f_ε la fonction égale à 0 entre $-\infty$ et $1 - \varepsilon$, à 1 entre $1 - \frac{\varepsilon}{2}$ et $+\infty$ et linéaire entre $1 - \varepsilon$ et $1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $B_\varepsilon = f_\varepsilon(A A^*)$; alors $B_\sigma \neq 0$ et, comme \mathfrak{A} est sans idéaux GCR , il existe une représentation irréductible ψ de \mathfrak{A} telle que $\text{rang } \psi(B_\sigma) \geq 2$; soient y et z des vecteurs orthogonaux unitaires appartenant à l'image de $\psi(B_\sigma)$; il existe $C \in \mathfrak{A}$ tel que $0 \leq C \leq 1$ et que $\psi(C)y = y$ et $\psi(C)z = 0$.

Posons $D_0 = B_{2\sigma} \cdot C \cdot B_{2\sigma}$ et $D_1 = B_{4\sigma} - D_0$. Il existe un élément unitaire $U \in \mathfrak{A}$ tel que $\psi(U)y = z$. Posons $V = f_\sigma(D_1) \cdot U \cdot f_\sigma(D_0)$ et notons $k(x)$ la fonction égale à $(f_{1/2}(x) \cdot x^{-1})^{1/2}$ pour $x \neq 0$ et à 0 pour $x = 0$.

On pose enfin

$$V(0, \dots, 0, 0) = (f_{1/2}(V^*V))^{1/2}$$

$$V(0, \dots, 0, 1) = V \cdot k(V^*V)$$

$$B(n+1) = f_{1/4}(V^*V) \text{ .}$$

Principe de la vérification de la condition (1).

On suppose \mathfrak{A} réalisée comme algèbre d'opérateurs dans un hilbertien. On montre facilement que pour tout vecteur unitaire w appartenant à l'image de $V(a_1, \dots, a_{n+1})$:

$$(A A^* \cdot V(a_1, \dots, a_{n+1})^* \cdot w | V(a_1, \dots, a_{n+1})^* \cdot w) \geq 1 - \delta$$

d'où, d'après la définition de δ

$$(V(a_1, \dots, a_{n+1})^* \cdot B \cdot V(a_1, \dots, a_{n+1}) \cdot V(a_1, \dots, a_{n+1})^* \cdot w | V(a_1, \dots, a_{n+1})^* \cdot w) > 1 - \frac{\gamma}{2}$$

et enfin

$$(Bw | w) > 1 - \frac{\gamma}{2} \text{ .}$$

Puis, pour tout s unitaire appartenant à l'image de $E(n+1)$:

$$(Bs |s) > 1 - \gamma$$

d'où, par définition de γ :

$$|((S_n - T_n) s |s)| < \frac{1}{n+1}$$

d'où enfin la condition (1).

Démonstration du théorème 1, (i) (esquisse).

Il suffit de montrer que si \mathcal{A} est sans idéaux GCR, \mathcal{A} a des représentations factorielles de types II et III ; on peut supposer que \mathcal{A} possède un élément unité.

On applique le lemme avec des S_i partout denses dans l'ensemble des éléments hermitiens de \mathcal{A} et tels que pour tout i il existe $j > i$ avec $S_i^- = S_j$.

Soit h un prolongement à \mathcal{A} de la forme linéaire positive sur $\mathcal{M} (= C^*$ -algèbre engendrée par les $\mathcal{M}(n)$) définie par $h(I) = 1$ et

$$h(V(a_1, \dots, a_n) \cdot V(b_1, \dots, b_n)^*) = \delta_{\substack{b_1, \dots, b_n \\ a_1, \dots, a_n}}^{\substack{b_1, \dots, b_n \\ a_1, \dots, a_n}} \sum_{i=1}^n a_i \cdot p^{n-\sum a_i}$$

où p est un nombre réel fixe, $0 < p \leq \frac{1}{2}$ et $q = 1 - p$. h définit une représentation φ de \mathcal{A} dans un espace hilbertien H séparable et un vecteur totalisateur $x \in H$ tel que $\|x\| = 1$ et $h(A) = (\varphi(A) \cdot x | x)$ pour $A \in \mathcal{A}$. On a $\varphi(S_0) \neq 0$ d'après le choix de h et la condition (2) du lemme. Posons $F = \inf F(n)$; on a $F \in \overline{\varphi(\mathcal{A})}$ (dans la suite, la barre désignera l'adhérence faible), $x \in F$; $\varphi(\mathcal{M}(n))$ conserve F et $\varphi(\mathcal{M}(n))_F$ est isomorphe à l'algèbre des matrices à 2^n dimensions. $\varphi(\mathcal{M})_F$ est dense dans $\varphi(\mathcal{A})_F$ pour la topologie de la norme d'après la condition (1) du lemme et le choix des S_i , donc $\overline{\varphi(\mathcal{A})}_F = \overline{\varphi(\mathcal{M})}_F$.

Si on montre que $\overline{\varphi(\mathcal{M})}_F$ est un facteur de type II ou III, il en sera de même de $\varphi(\mathcal{A})_F$; comme F contient x (totalisateur pour $\varphi(\mathcal{A})$), $\varphi(\mathcal{A})'$ est isomorphe à $\varphi(\mathcal{A})_F'$; enfin $\overline{\varphi(\mathcal{A})}$ sera un facteur de type II ou III.

On va montrer que $\overline{\varphi(\mathcal{M})}_F$ est un facteur de type II ou III suivant que $p = \frac{1}{2}$ ou $p \neq \frac{1}{2}$, et pour cela, on va utiliser des exemples connus de facteurs.

Soit $X = [0, 1[$ dont les points seront représentés par leurs développements binaires normalisés ; soit μ la mesure positive définie par $\mu(X) = 1$, $\mu([0, \frac{1}{2}[) = p$

$$\mu\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right]\right) = p \cdot \mu\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right) \quad .$$

Soit Δ l'ensemble des points de X dont le développement ne contient qu'un nombre fini de 1 ; avec l'addition modulo 2 indice par indice, Δ devient un groupe de permutations de X , engendré par les éléments γ_n correspondant à $\frac{1}{2^n}$. Δ laisse μ quasi-invariante.

Soit $\mathcal{K} = L^2(\Delta) \otimes L^2(X, \mu)$ dont les éléments seront notés $F(\gamma, x)$; soit L_{a_1, \dots, a_n} l'opérateur de multiplication par la fonction caractéristique du sous-ensemble de X défini par $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$; soit enfin U_a ($a \in \Delta$) l'opérateur unitaire défini par

$$(U_a F)(\gamma, x) = \left(\frac{d\mu_a}{d\mu}(x)\right)^{1/2} \cdot F(\gamma + a, xa) \quad .$$

Ces opérateurs engendrent un facteur de type II ou III suivant que $p = \frac{1}{2}$ ou $p \neq \frac{1}{2}$. ([1] et [9]).

En associant L_{a_1, \dots, a_n} à $\varphi(V(a_1, \dots, a_n) V(a_1, \dots, a_n)^*)_{\mathbb{F}}$, et U_{γ_n} à $\sum_{a_1, \dots, a_{n-1}} \varphi(V(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) V(a_1, \dots, a_{n-1}, 1)^* + V(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) V(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)^*)_{\mathbb{F}}$,

on définit un isomorphisme θ de $\varphi(\mathcal{M})_{\mathbb{F}}$ sur la C^* -algèbre N engendrée par les L_{a_1, \dots, a_n} et les U_a . x est totalisateur pour $\varphi(\mathcal{M})_{\mathbb{F}}$ et l'élément de \mathcal{K} défini par

$$F(\gamma, x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \gamma = \text{unité de } \Delta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

l'est pour N ; θ fait correspondre les formes linéaires positives associées à ces éléments totalisateurs, donc est spatial et se prolonge aux adhérences faibles.

Démonstration du théorème 1, (ii) (esquisse).

Il suffit de montrer que si \mathcal{A} est sans idéaux GCR, \mathcal{A} admet deux représentations irréductibles de même noyau non équivalentes, et on peut supposer que \mathcal{A} possède un élément unité. On applique le lemme avec des S_i choisis comme précédemment, soit e un prolongement à \mathcal{A} de la forme linéaire positive sur \mathcal{M} définie par $e(I) = 1$.

$$e(V(a_1, \dots, a_n) \cdot V(b_1, \dots, b_n)^*) \equiv \delta_{a_1, \dots, a_n}^{d_1, \dots, d_n} \cdot \delta_{b_1, \dots, b_n}^{d_1, \dots, d_n}$$

où (d_i) est une suite quelconque de 0 et de 1. La forme e est élémentaire et définit une représentation irréductible φ de dimension ∞ telle que $\varphi(S) \neq 0$.

le noyau de φ ne dépend pas de (d_i) , et est égal à l'ensemble des $A \in \mathfrak{A}$ tels que $\|E(n) \cdot B \cdot A \cdot C \cdot E(n)\| \rightarrow 0$ quels que soient B et C dans \mathfrak{A} .

Puis, si les représentations correspondant à deux suites (d_i) et (e_i) sont équivalentes, on a $d_i = e_i$ sauf pour un nombre fini d'indices.

Démonstration du théorème 2 (esquisse).

Il suffit de montrer que si \mathfrak{A} est sans idéaux GCR, $\hat{\mathfrak{A}}$ n'est pas métriquement lisse, car si \mathfrak{A} contient un plus grand idéal GCR, \mathfrak{K} , $(\mathfrak{A}/\mathfrak{K})^\wedge$ s'identifie avec sa structure borélienne à un sous-ensemble borélien de $\hat{\mathfrak{A}}$. De plus, on peut supposer que \mathfrak{A} contient un élément unité. Avec les notations du théorème 1, (ii), on montre que si $d_i = e_i$ sauf pour un nombre fini d'indices, les représentations correspondantes sont équivalentes; si K est l'ensemble des classes d'équivalence des représentations définies par toutes les suites (d_i) , on a donc une correspondance biunivoque entre K et Y/\mathcal{R} , où Y désigne l'ensemble des suites (d_i) et \mathcal{R} la relation d'équivalence: $d_i = e_i$ sauf pour un nombre fini d'indices; on montre enfin que cette correspondance est un isomorphisme borélien et que Y/\mathcal{R} n'est pas métriquement lisse.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DIXMIER (Jacques). - Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. - Paris, Gauthier-Villars, 1957 (Cahiers scientifiques, 25).
- [2] DIXMIER (Jacques). - Sur les structures boréliennes du spectre d'une C^* -algèbre, Publ. math. Inst. H. Et. scient. Paris, n° 6, 1960, 11 p.
- [3] DIXMIER (Jacques). - Sur les C^* -algèbres, Bull. Soc. math. France, t. 88, 1960, p. 95-112.
- [4] FELL (J. M. G.). - C^* -algebras with smooth dual, Illinois J. of Math. t. 4, 1960, p. 221-230.
- [5] GLIMM (J.). - A Stone-Weierstrass theorem for C^* -algebras, Annals of Math., Series 2, t. 72, 1960, p. 216-224.
- [6] GLIMM (J.). - Type I: C^* -algebras (à paraître).
- [7] KAPLANSKY (Irving). - The structure of certain operator algebras, Trans. Amer. math. Soc., t. 70, 1951, p. 219-255.
- [8] MACKEY (George W.). - Borel structure in groups and their duals, Trans. Amer. math. Soc., t. 85, 1957, p. 134-165.
- [9] PUKÁNSKY (L.). - Some examples of factors, Publicationes mathematicae, t. 4, 1956, p. 135-156.