Alexander Grothendieck

Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV : les schémas de Hilbert

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. n° 221, p. 249-276

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__249_0>

Séminaire BOURBAKI
13e année, 1960/61, n° 221

Mai 1961

TECHNIQUES DE CONSTRUCTION ET THÉORÈMES D'EXISTENCE EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
IV : LES SCHÉMAS DE HILBERT

par Alexander GROTHENDIECK

INTRODUCTION. - Les techniques exposées dans [2], I et II, étaient pour l'essentiel indépendantes de toute hypothèse projective sur les schémas envisagés. Malheureusement, elles ne permettent pas à l'heure actuelle de résoudre les problèmes d'existence posés dans l'exposé II de [2]. Dans le présent exposé et le suivant, nous allons résoudre ces problèmes moyennant des hypothèses projectives. Les techniques employées sont typiquement projectives, et ne font pratiquement pas usage des résultats de I et II de [2]. Ici, nous allons construire les "schémas de Hilbert" destinés à remplacer l'utilisation des coordonnées de Chow, comme il a été dit dans [2], II, n° 2. Dans l'exposé suivant, la théorie de passage au quotient dans les schémas développée dans III, jointe à la théorie des schémas de Hilbert, nous permettra par exemple de construire les schémas de Picard (définis dans [2], II, n° 3) sous des conditions assez générales.

En résumé, on peut dire qu'on dispose maintenant d'une technique de constructions projectives à peu près satisfaisante, sauf qu'il manque encore (*) un théorème de passage au quotient par des groupes tels que le groupe projectif, opérant "sans points fixes", (cf. [2], III, n° 8). La situation semble même un peu meilleure en géométrie analytique (lorsqu'on s'y borne à l'étude des espaces analytiques "projectifs" sur un espace analytique donné) , car pour les espaces analytiques la difficulté de passage au quotient par un groupe opérant joliment disparait. Par ailleurs, en géométrie algébrique comme en géométrie analytique, il resterait à mettre au point une technique de construction valable sans hypothèses projectives.

1. Familles limitées de faisceaux : propriétés de permanence.

Soient k un corps, et X un k-préschéma, de type fini pour simplifier. Pour toute extension K/k , on en déduit donc un K-préschéma $X_K = X \otimes_k K$. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X_K , et si K' est une extension de K , alors $\mathcal{F} \otimes_K K' = \mathcal{F}_{K'}$ est un faisceau quasi-cohérent sur $X_K \otimes_K K' = X_{K'}$. Ceci dit, si K et K' sont deux extensions quelconques de k , $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X_K et $\mathcal{F}'$

(*) Voir l'additif à la fin de l'exposé.

un faisceau quasi-cohérent sur $X_{K'}$, on dira que $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ sont <u>équivalents</u> s'il existe des K-homomorphismes de K , K' dans une même extension K" de k , tels que $\mathfrak{F}_{K''}$ et $\mathfrak{F}_{K'}$ soient isomorphes sur $X_{K''}$. C'est là une relation d'équivalence, et on s'intéressera à des classes d'équivalence de faisceaux pour cette relation, et des ensembles de classes d'équivalence. Notons que ci X_o est de type fini sur k , alors toute classe de faisceaux cohérents peut être définie par un faisceau cohérent sur un X_K , où K est une extension <u>de type fini</u> de k . On peut alors, dans la définition des classes de faisceaux cohérents, se borner aux extensions <u>algébriquement closes</u> de k , et on peut aussi se limiter à une extension algébriquement close fixée Ω de k , de degré de transcendance infini, deux faisceaux cohérents $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ sur X_Ω étant équivalents si et seulement s'il existe un K-automorphisme σ de Ω , tel que $\mathfrak{F} \otimes_K (\Omega , \sigma)$ soit isomorphe à $\mathfrak{F}'$. On constate qu'il y a correspondance biunivoque entre les classes de faisceaux cohérents pour l'une ou l'autre définition.

Soient E , E' deux ensembles de classes de faisceaux cohérents sur X . Considérons les classes de tous les faisceaux de la forme $\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}'$, où $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ sont des faisceaux cohérents sur un <u>même</u> X_K , la classe de $\mathfrak{F}$ étant dans E et celle de $\mathfrak{F}'$ dans E' . On trouve ainsi un ensemble de classes de faisceaux cohérents, qu'on notera $E \otimes E'$. On définit de même les $\mathrm{Tor}_i(E , E')$, etc. De façon générale, à toute fonction $\mathfrak{U}$, associant à toute suite $\mathfrak{F}_1 , \dots , \mathfrak{F}_n$ de n faisceaux cohérents sur un même X_K un ensemble $\mathfrak{U}(\mathfrak{F}_1 , \dots , \mathfrak{F}_n)$ de faisceaux cohérents sur X_K , et ayant une propriété évidente de compatibilité avec les isomorphismes de faisceaux et les images inverses par changement de base, on associe une fonction, notée par le même symbôle $\mathfrak{U}$, associant à toute suite de n ensemble $E_1 , \dots , E_n$ de classes de faisceaux cohérents, un ensemble $\mathfrak{U}(E_1 , \dots , E_n)$ de classes de faisceaux cohérents.

Notre but dans ce numéro est de donner une définition de certains ensembles de classes de faisceaux, qualifiés de <u>limités</u>, et de montrer que les opérations $\mathfrak{U}$ les plus courantes, appliquées à des ensembles limités, donnent encore des ensembles limités.

Soit X un préschéma de type fini sur S <u>noethérien</u>. Pour tout $s \in S$, la fibre X_s est un préschéma de type fini sur k(s) , et nous considérerons des classes de faisceaux cohérents sur X_s , au sens précédent. Cela donne un sens à la locution : classe de faisceaux cohérents sur une fibre de X/S , et les locutions analogues. De même, procédant séparément sur chaque fibre, on peut encore considérer des opérations telles que $E \otimes E'$ etc. faisant correspondre à des systèmes d'ensembles de classes de faisceaux cohérents sur les fibres de X/S, un autre ensemble de classes de faisceaux cohérents sur les fibres de X/S.

DÉFINITION 1.1. - <u>Soit</u> E <u>un ensemble de classes de faisceaux cohérents sur les fibres de</u> X/S. <u>On dit que</u> E <u>est</u> limité, <u>s'il existe un préschéma</u> S' <u>de type fini sur</u> S, <u>et un faisceau cohérent</u> $\mathfrak{F}'$ <u>sur</u> $X' = X \times_S S'$, <u>tel que</u> E <u>soit contenu dans l'ensemble des classes de faisceaux sur les fibres de</u> X/S <u>défini par</u> $\mathfrak{F}'$.

Ce dernier, par définition, fait correspondre à un $s \in S$ les classes des faisceaux $\mathfrak{F}' \otimes_{S'} k(s')$, où s' parcourt les points de S' au-dessus de s (de sorte que $k(s')$ est une extension de $k(s)$, et $X \otimes (X_s)_{k(s')}$ s'identifie à la fibre $X' \otimes_{S'} k(s') = X'_{s'}$ de X' en s'). On peut dire que les familles limitées sont celles qui sont contenues dans une <u>famille algébrique</u> de faisceaux cohérents, paramétrée par un S' de type fini sur S.

Une réunion finie de familles limitées est limitée (prendre le préschéma somme des préschémas de paramètres S_i définissant les familles algébriques majorantes). Un changement de base $T \to S$ transforme une famille limitée relative à X/S en une famille limitée relative à X_T/T, et la réciproque est vraie si $T \to S$ est surjectif (ou plus généralement, si son image contient les s qui interviennent effectivement dans la famille donnée E pour X/S). Cela ramène théoriquement la détermination des familles limitées au cas où S est le spectre d'une algèbre de type fini sur l'anneau des entiers Z.

Si E et E' sont des familles limitées de classes de faisceaux relatives à X/S, alors $E \otimes E'$ est également limité : en effet, si E et E' sont majorés respectivement par les familles algébriques définies par des $T \to S$ et F sur X_T, $T' \to S$ et F' sur $X_{T'}$, on voit que $E \otimes E'$ est majoré par la famille algébrique définie par $T' = T \times_S T' \to S$ et le faisceau F'' sur $X_{T''}$ produit tensoriel des images inverses de $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ sur $X_{T''}$. Ce raisonnement n'est correct que parce que le foncteur $\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}'$ en $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ est exact à droite, donc commute à l'extension de la base (et en particulier au passage aux fibres). Il n'est pas applicable tel quel aux opérations locales telles que $\underset{\sim}{\mathrm{Tor}}_i(E, E')$, $\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}(E, E')$, $\underset{\sim}{\mathrm{Ext}}^i(E, E')$. On peut cependant montrer que ces opérations transforment encore ensembles limités en ensembles limités, en procédant comme pour $E \otimes E'$, mais en utilisant en plus des résultats du type suivant (tous contenus dans [3], IV, 6.11) : une famille limitée E est toujours majorée par une famille algébrique définie par un faisceau cohérent $\mathfrak{F}$ sur un X_T (T de type fini sur S) qui est <u>plat</u> relativement à T. (On "coupe au morceaux" l'espace des paramètres initial). De telles propriétés de platitude sur des faisceaux convenables assurent en effet la commutation d'opérations telles que $\underset{\sim}{\mathrm{Tor}}_i(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}')$ au changement de base quelconque. La même méthode s'applique pour des opérations de nature globale : images directes et images directes dérivées de faisceaux cohérents par des morphismes propres, Ext globaux relatifs à des morphismes propres (cf. [5], III, § 6), etc., toutes ces opérations transforment des familles limitées de faisceaux en familles limitées de faisceaux (N. B. - Ici les préschémas sur lesquels on prend les divers faisceaux peuvent changer par les opérations du type envisagé).

Les deux énoncés qui suivent se démontrent essentiellement par la même technique de platitude ; pour la décomposition primaire sur les fibres d'un morphisme de type fini, voir en particulier [5], IV.

PROPOSITION 1.2. - Soient E, E' des ensembles limités de classes de faisceaux sur les fibres de X/S, X étant supposé propre sur S. Alors :

(i) La famille des noyaux, conoyaux, images d'homomorphismes $\mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$, où la classe de $\mathfrak{F}$ est dans E et celle de $\mathfrak{F}'$ dans E', est limitée.

(ii) La famille des faisceaux $\mathfrak{F}''$ extensions d'un $\mathfrak{F}$ par un $\mathfrak{F}'$, où la classe de $\mathfrak{F}$ est dans E et celle de $\mathfrak{F}'$ dans E', est limitée.

Moyennant un changement de base convenable, on peut supposer E et E' définis respectivement par un faisceau cohérent $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sur un X_T/T, T de type fini sur S. De plus, on peut supposer satisfaites certaines hypothèses de platitude, impliquant que la formation du faisceau $f_T(\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X_T}}(\mathcal{G}, \mathcal{G}'))$ et $\underset{\sim}{\mathrm{Ext}}^1_{f_T}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ commute au changement de base pour un morphisme quelconque $T' \to T$. De plus, on peut supposer les faisceaux cohérents précédents sur T localement libres. Soient alors T_0 et T_1 les fibrés vectoriels sur T dont les faisceaux de germes de sections sont respectivement les faisceaux précédents. On définit alors canoniquement un homomorphisme $\mathcal{G}_{T_0} \to \mathcal{G}'_{T_0}$ de faisceaux cohérents sur X_{T_0}, et une extension

$$0 \to \mathcal{G}_{T_1} \to \mathcal{G}'' \to \mathcal{G}'_{T_1} \to 0$$

de faisceaux cohérents sur X_{T_1}, ayant une propriété universelle évidente. Ce deuxième faisceau définit une famille algébrique qui majore la famille envisagée dans (ii). Il en est de même pour les noyau, conoyau et image de l'homomorphisme précédent, dont la considération établit (i) (pourvu qu'on suppose le conoyau plat relativement à T_o , auquel cas on se ramène encore en découpant T_o en morceaux ...).

PROPOSITION 1.3. - <u>Soit</u> E <u>une famille limitée de classe de faisceaux sur les fibres de</u> X/S . <u>Alors les classes des faisceaux structuraux des</u> $(\mathrm{supp}\ \mathfrak{F})_{réd}$, <u>où</u> $\mathfrak{F}$ <u>est un faisceau cohérent sur un</u> X_K , <u>avec</u> K <u>algébriquement clos, dont la classe est dans</u> E , <u>forment une famille limitée</u>.

Ici, $(\mathrm{supp}\ \mathfrak{F})_{réd}$ désigne le support de $\mathfrak{F}$, muni de la structure réduite induite, i. e. son faisceau structural est le quotient de $\mathcal{O}_{X_K}$ par le plus grand faisceau d'idéaux définissant supp $\mathfrak{F}$. On peut prouver le résultat analogue à (1.3) pour les faisceaux déduits canoniquement de $\mathfrak{F}$ par la théorie de la décomposition primaire, par exemple les $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}_i$, où les $\mathfrak{F}_i$ sont les sous-faisceaux de $\mathfrak{F}$ primaires pour les composantes du support de $\mathfrak{F}$, minimaux pour cette propriété ; ou les $\mathcal{O}_{X_K}/\underset{\sim}{p}$, où $\underset{\sim}{p}$ est un faisceau d'idéaux premier associé à $\mathfrak{F}$, ou les $\mathcal{O}_{X_K}/\underset{\sim}{q}$, où $\underset{\sim}{q}$ est un faisceau d'idéaux primaire associé à une composante du support de $\mathfrak{F}$, (le corps de référence étant algébriquement clos).

2. Familles limitées et polynôme de Hilbert.

Dans la suite, nous supposons que X est projectif sur S , muni d'un faisceau très ample, noté $\mathcal{O}_X(1)$. Pour toute extension K d'une extension résiduelle k(s) d'un point s de S , on considère sur X_K le faisceau $\mathcal{O}_{X_K}(1)$ correspondant, qui sera encore très ample.

A tout faisceau cohérent $\mathfrak{F}$ sur X_K , on associe la fonction

$$P_{\mathfrak{F}}(n) = \text{caractéristique d'Euler-Poincaré de } F(n) \text{ sur } X_K$$

qui est un polynôme en l'entier n , appelé <u>polynôme de Hilbert</u> de $\mathfrak{F}$. Pour les grandes valeurs de n , P(n) n'est autre chose que la dimension de $H^0(X_K , \mathfrak{F}(n))$ sur K , puisque les $H^i(X_K , \mathfrak{F}(n))$ sont nuls pour $i > 0$ et n grand.

Si maintenant $\mathfrak{F}$ est un faisceau cohérent sur X , <u>plat</u> par rapport à S , alors les polynômes de Hilbert des faisceaux $\mathfrak{F}_s$ induits sur les fibres X_s relatifs à une même composante connexe de S , sont tous égaux [5], III, § 7. Il en résulte (sans hypothèse de platitude) que l'ensemble des polynômes de Hilbert des faisceaux $\mathfrak{F}_s$, $s \in S$, est fini pour tout faisceau cohérent $\mathfrak{F}$ sur X .

Rappelons d'autre part que si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X, il est isomorphe à un faisceau quotient d'un faisceau $\mathcal{O}_X(-n)^N$, pour n, N assez grands. Donc les faisceau $\mathcal{F}_s$ induits sur les fibres sont également quotients du faisceau $\mathcal{O}(-n)$ sur la fibre.

De ces deux remarques, on déduit la partie "il faut" du théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. - Soit X projectif sur S noethérien, $\mathcal{O}_X(1)$ très ample sur X relativement à S. Soit E un ensemble de classes de faisceaux sur les fibres de X/S. Pour que E soit limité, il faut qu'il satisfasse les conditions suivantes :

(a) Il existe un faisceau cohérent $\mathcal{L}$ sur X (qu'on peut supposer de la forme $\mathcal{O}_X(-n)^N$) tel que E soit contenu dans la famille des classes de faisceaux cohérents quotients de faisceaux de la forme $\mathcal{L}_K$.

(b) Les polynômes de Hilbert $P_{\mathcal{F}}$ des faisceaux $\mathcal{F}$ dont la classe est dans E, sont éléments d'un même ensemble fini de polynômes.

Il reste à prouver le "il suffit", qui sera un cas particulier d'un résultat plus précis. Pour tout Module cohérent $\mathcal{F}$ sur un préschéma de type fini sur un corps K, et tout entier r, soit N_r le sous-Module de $\mathcal{F}$ dont les sections sur un ouvert sont les sections de $\mathcal{F}$ sur cet ouvert dont le support est de dimension $< r$. On a donc $N_r = \mathcal{F}$ pour $r > \dim \operatorname{supp} \mathcal{F}$, $N_r = 0$ pour $r \leq 0$, et on obtient une filtration croissante finie de $\mathcal{F}$ dont les facteurs N_r/N_{r+1} ont comme cycle premiers associés exactement les cycles premiers associés à $\mathcal{F}$ qui sont de dimension r. On posera

$$\mathcal{F}_{(r)} = \mathcal{F}/N_r \quad ,$$

donc $\mathcal{F}_{(r)}$ a comme cycles premiers associés exactement les cycles premiers associés à $\mathcal{F}$ qui sont de dimension $\geq r$, et en particulier, il est égal à $\mathcal{F}$ si et seulement si les cycles premiers associés à $\mathcal{F}$ sont de dimension $\geq r$. Ceci posé :

THÉORÈME 2.2. - Sous les conditions de (2.1), soit s un entier, et supposons que E satisfasse les conditions (a), et la forme affaiblie suivante de (b) :

(b_s) Les polynômes de Poincaré $P_{\mathcal{F}}$ des faisceaux $\mathcal{F}$ dont la classe est dans E, ont des coefficients en degrés $\leq s-1$ qui restent bornés.

Sous ces conditions, les faisceaux $\mathcal{F}_{(s)}$ (lorsque la classe de $\mathcal{F}$ reste dans E) forment une famille limitée. De plus, les coefficients en degré $s-2$ des $P_{\mathcal{F}}$ restent minorés.

Ainsi :

COROLLAIRE 2.3. - Supposons que les faisceaux $\mathcal{F}$ dont la classe est dans E soient tels que tous les cycles premiers associés soient de dimension d satisfaisant $s \leqslant d \leqslant r$. Alors dans (2.1) (b), on peut se borner aux coefficients des $P_{\mathcal{F}}$ en degrés compris entre $s - 1$ et r.

La fin du numéro est consacré à l'esquisse de la démonstration de (2.2). Les lemmes-clefs sont les deux lemmes suivants, dont le premier est bien connu (et résume le contenu mathématique utile des coordonnées de Chow) :

LEMME 2.4 (CHOW). - Considérons les faisceaux structuraux de sous-schémas Y de fibres X_K (K extensions algébriquement closes de corps résiduels de S) avec Y réduit et toutes ses composantes de même dimension r, ($\mathcal{O}_Y$ étant considéré comme un faisceau quotient de $\mathcal{O}_X$). Si les degrés des Y restent bornés, les Y forment une famille limitée.

Ici, le degré a de Y peut se définir le plus commodément par le coefficient du terme dominant de $P_{\mathcal{O}_Y} = an^r/r! + \dots$.

LEMME 2.5. - Soient $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur X, E un ensemble de classes de faisceaux quotient $\mathcal{F}$ de faisceaux $\mathcal{E}_K$ (K extension résiduelle de S). On suppose les fibres de X sur S de dimension $\leqslant r$, et on pose

$$P_{\mathcal{F}}(n) = a_{\mathcal{F}}\, n^r/r! + b_{\mathcal{F}}\, n^{r-1}/(r-1)! + \text{termes de degré} < r - 1 .$$

Alors le coefficient $a_{\mathcal{F}}$ reste borné, et $b_{\mathcal{F}}$ reste minoré. Si $b_{\mathcal{F}}$ reste borné, alors la famille des $\mathcal{F}_{(r)}$ est limitée.

DÉMONSTRATION. - Quitte à remplacer S par une réunion de sous-schémas de S recouvrant S, on peut supposer qu'il existe un morphisme fini $f : X \to \mathbb{P}^r_S$, tel que $\mathcal{O}_X(1)$ soit isomorphe à l'image inverse de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_S}(1)$, donc pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, on a $P_{\mathcal{F}} = P_{f_*(\mathcal{F})}$. D'autre part, on vérifie facilement (par la technique du numéro précédent) qu'un ensemble de faisceaux $\mathcal{F}$ sur X est limité si et seulement si l'ensemble des $f_*(\mathcal{F})$ l'est. Enfin on a

$$f_*(\mathcal{F})_{(r)} = f_*(\mathcal{F}_{(r)}) .$$

Cela nous ramène donc au cas où $X = \mathbb{P}^r_S$. De plus, on peut supposer que $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_S}(k)^s$ pour k, s convenables. Le coefficient $a_{\mathcal{F}}$ satisfait

$$0 \leq a_{\mathcal{F}} \leq s$$

et reste donc borné. Cela dit, il revient au même de dire que les $P_{\mathcal{F}}(n)$ ont un coefficient de n^{r-1} restant minoré (resp. borné) ou de le dire pour les $P_{\mathcal{F}}(n-k) = P_{\mathcal{F}(-k)}(n)$. Cela nous ramène au cas où

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}^s_{\mathbb{P}^r_S} \quad .$$

Considérons la suite exacte

$$0 \to N_r \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{(r)} \to 0 \quad ,$$

d'où

$$P_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F}_{(r)}} + P_{N_r} \quad ,$$

et comme le coefficient de n^{r-1} dans P_{N_r} est positif (car dim supp $N_r \leq r-1$), on a

$$b_{\mathcal{F}_{(r)}} \leq b_{\mathcal{F}} \quad .$$

Cela nous permet, pour prouver les assertions du lemme, de remplacer $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}_{(r)}$, i. e. de supposer que les quotients $\mathcal{F}$ envisagés de $\mathcal{E}$ sont sans torsion.

Comme $\mathbb{P}^r_K$ est normal, il s'ensuit que $\mathcal{F}$ est localement libre de rang à $a = a_{\mathcal{F}}$ dans un ouvert $U = \mathbb{P}^r_K - Y$, où Y est de codimension ≥ 2. Donc $\bigwedge^a \mathcal{F}$ est un faisceau sur P^r_K dont la restriction à U est inversible, donc ($\mathbb{P}^r_K$ étant régulier et Y de codimension ≥ 2) isomorphe à la restriction d'un faisceau inversible sur $\mathbb{P}^r_K$, défini à un isomorphisme près. Ce dernier est de la forme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_K}(d)$ pour un entier d bien déterminé. Comme $\bigwedge^a \mathcal{F}$ est un quotient de $\bigwedge^a \mathcal{O}^n_{\mathbb{P}^r_K} \simeq \mathcal{O}^N_{\mathbb{P}^r_K}$, avec $N = \binom{n}{a}$, il admet N sections canoniques, définissant donc des sections de

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_K}(d)$ sur U , qui sont restrictions de sections s_i ($1 \leq i \leq N$) de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_K}(d)$, (puisque $\mathbb{P}^r_K$ est normal et Y de codimension ≥ 2). Ces dernières engendrent $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_K}(d)$ aux points de U , donc ne sont pas toutes nulles, ce qui implique que l'on a $d \geq 0$. D'autre part, un calcul facile montre qu'on a

$$b_{\mathfrak{F}} = a_{\mathfrak{F}}(r + 1)/2 + d \quad .$$

Cela montre en particulier que $b_{\mathfrak{F}} > 0$, donc $b_{\mathfrak{F}}$ est minoré. Il reste borné si et seulement si d reste borné, montrons qu'alors $\mathfrak{F}$ reste dans une famille limitée. On peut supposer $a_{\mathfrak{F}}$ et $b_{\mathfrak{F}}$ fixés, soient a et b , donc d fixé. La connaissance des N sections s_i de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_K}(d)$, i. e. d'un homomorphisme $s : \bigwedge^a \mathcal{E}_K \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_K}(d)$, permet de récupérer $\mathfrak{F}$ comme la co-image de l'homomorphisme composé correspondant :

$$\mathcal{E}_K \to \underline{\mathrm{Hom}}(\bigwedge^{a-1} \mathcal{E}_K, \bigwedge^a \mathcal{E}_K) \to \underline{\mathrm{Hom}}(\bigwedge^{a-1} \mathcal{E}_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_K}(d)) \quad ,$$

où le premier est l'homomorphisme canonique provenant du produit extérieur, et le deuxième est déduit de s . On conclut alors par (1.2) (i).

La conjonction des deux lemmes précédents permet de prouver :

LEMME 2.6. - <u>Supposons sous les conditions préliminaires de (2.1) que l'on ait pour tout</u> $\mathfrak{F}$:

$$P_{\mathfrak{F}}(n) = a_{\mathfrak{F}}\, n^r/r! + b_{\mathfrak{F}}\, n^{r-1}/(r-1)! + \text{termes de degré} < r - 1 \quad ,$$

<u>et que les coefficients</u> $a_{\mathfrak{F}}$ <u>restent bornés. Alors les coefficients</u> $b_{\mathfrak{F}}$ <u>restent minorés. Si les</u> $b_{\mathfrak{F}}$ <u>sont bornés, alors les</u> $\mathfrak{F}_{(r)}$ <u>sont limités.</u>

On peut supposer que les corps de base K pour les faisceaux $\mathfrak{F}$ sont algébriquement clos. Munissons chaque supp $\mathfrak{F}_{(r)}$ = réunion des composantes de degré r de supp $\mathfrak{F}$, de la structure réduite induite. Alors les degrés des supp $\mathfrak{F}_{(r)}$ restent majorés par a , donc en vertu de (2.4) les supp $\mathfrak{F}_{(r)}$ forment un ensemble limité. De plus, pour toute composante de supp $\mathfrak{F}_{(r)}$, la longueur de $\mathfrak{F}_{(r)}$ pour cette composante est $\leq a$, donc si $\mathfrak{J}_{\mathfrak{F}}$ est l'Idéal qui définit supp $\mathfrak{F}_{(r)}$, alors $\mathfrak{F}_{(r)}$

peut être considéré comme un Module sur le sous-schéma $Y_{\mathcal{F}}$ de X défini par $\mathcal{J}_{\mathcal{F}}^{a}$. Comme dans le lemme précédent, on se ramène aussi au cas où on a $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(r)}$, donc $\mathcal{F}$ provient d'un Module sur $Y_{\mathcal{F}}$. Les $Y_{\mathcal{F}}$ correspondent à une famille limitée de Modules quotients des $\mathcal{O}_{X_K}$, donc proviennent d'un sous-schéma fermé Y d'un schéma $X \times_S T$. On peut alors appliquer (2.5) à Y/T et $\mathcal{L} \otimes_X Y$, d'où la conclusion.

Nous pouvons maintenant prouver (2.2) par récurrence sur la borne supérieure r des dim supp $\mathcal{F}$. L'énoncé est trivial pour $r < 0$, supposons donc $r \geqslant 0$ et l'énoncé prouvé pour les $r' < r$. En vertu de (2.6) les $\mathcal{F}_{(r)}$ forment un ensemble limité, donc aussi en vertu de (1.2) (i) les noyaux des homomorphismes $\mathcal{L}_K \to \mathcal{F}_{(r)}$; il existe donc un Module cohérent $\mathcal{L}'$ sur X, tel que les noyaux en question, donc aussi les $N_r(\mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{F} \to \mathcal{F}_{(r)})$, soient quotients des Modules $\mathcal{L}'_K$. Comme les $\mathcal{F}_{(r)}$ sont limités, les $P_{\mathcal{F}_{(r)}}$ restent bornés, et la formule

$$P_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F}_{(r)}} + P_{N_r}$$

montre alors que les P_{N_r} satisfont à la même condition (b_s) que les $P_{\mathcal{F}}$. Donc les N_r satisfont les conditions (a) et (b_s), et par l'hypothèse de récurrence les $(N_r)_{(s)}$ restent limités. Or $\mathcal{F}_{(s)}$ est une extension de $\mathcal{F}_{(r)}$ par $(N_r)_{(s)}$, donc par (1.2) (ii), les $\mathcal{F}_{(s)}$ restent limités. Pour la dernière assertion de (2.2), on note que les noyaux N_s de $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_{(s)}$ restent limités en vertu de (1.2) (i), et que le coefficient du terme en n^{s-1} dans P_{N_s} reste borné ; le lemme 2.6 prouve alors que le coefficient du terme suivant reste minoré. Cela achève la démonstration.

3. Schémas de Hilbert : définition, théorème d'existence.

Soient X un préschéma sur un autre S, et $\mathcal{F}$ un Module quasi-cohérent sur X. Désignons par

$$\mathrm{Quot}(\mathcal{F}/X/S)$$

l'ensemble des Modules quasi-cohérents quotients de $\mathcal{F}$ qui sont plats sur S. Soit maintenant $S' \to S$ un morphisme de changement de base, posons $X' = X \times_S S'$ et $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$, donc X' est un préschéma sur S' muni d'un Module quasi-cohérent $\mathcal{F}'$, et on peut considérer $\mathrm{Quot}(\mathcal{F}'/X'/S')$. On pose

$$\underset{\sim\sim}{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{F}/X/S}(S') = \mathrm{Quot}(\mathcal{F}'/X'/S') \qquad (\text{où } X' = X \times_S S') \quad .$$

Si maintenant $S'' \to S'$ est un S-morphisme, alors $X'' = X \times_S S''$ est isomorphe à $X' \times_{S'} S''$ et $\mathcal{F}''$ à $\mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_{S'}} \mathcal{O}_{S''}$, et comme le foncteur image inverse $\mathcal{G}' \rightsquigarrow \mathcal{G}' \otimes_{\mathcal{O}_{S'}} \mathcal{O}_{S''}$ de la catégorie des Modules quasi-cohérents sur X' dans la catégorie des Modules quasi-cohérents sur X'' est exact à droite et transforme Modules S'-plats en Modules S''-Plats, on trouve une application naturelle

$$\mathrm{Quot}(\mathcal{F}'/X'/S') \to \mathrm{Quot}(\mathcal{F}''/X''/S'') \qquad ,$$

donc $\underset{\sim\sim}{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{F}/X/S}(S')$ est un <u>foncteur contravariant en</u> S' (préschéma au dessus de S), à valeurs dans la catégorie des ensembles. Par la suite, nous supposerons que X est <u>projectif</u> sur S <u>noethérien</u>, $\mathcal{F}$ <u>cohérent</u>, et nous nous limiterons pour simplifier à des S' sur S qui sont localement noethériens.

THÉORÈME 3.1. - <u>Sous ces conditions, le foncteur contravariant</u> $\underset{\sim\sim}{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{F}/X/S}$ <u>sur la catégorie des S-préschémas localement noethériens est représentable par un S-préschéma</u> $\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}$, <u>somme d'une suite de S-schémas projectifs (a fortiori</u> $\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}$ <u>est localement de type fini sur</u> S) .

Nous obtiendrons une telle décomposition de la façon suivante. Soit $\mathcal{O}_X(1)$ un faisceau inversible sur X très ample relativement à S . Pour tout polynôme $P(n)$ à coefficients rationnels, soit $\mathrm{Quot}^P(\mathcal{F}/X/S)$ la partie de $\mathrm{Quot}(\mathcal{F}/X/S)$ formé des quotients cohérents $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ qui sont plats sur S et dont le polynôme de Hilbert en tout $s \in S$ est égal à $\mathcal{F}$. On posera alors

$$\underset{\sim\sim}{\mathrm{Quot}}^P_{\mathcal{F}/X/S}(S') = \mathrm{Quot}^P(\mathcal{F}'/X'/S')$$

et on obtient ainsi un sous-foncteur de $\underset{\sim\sim}{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{F}/X/S}$. La propriété d'invariance des polynômes de Hilbert rappelée dans le numéro 2 implique ceci : <u>Pour que</u> $\underset{\sim\sim}{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{F}/X/S}$ <u>soit représentable, il faut et il suffit que les</u> $\underset{\sim\sim}{\mathrm{Quot}}^P_{\mathcal{F}/X/S}$ <u>le soient, et alors le S-préschéma</u> $\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}$, <u>qui le représente, est isomorphe au préschéma somme des</u> $\mathrm{Quot}^P_{\mathcal{F}/X/S}$ <u>qui représentent les foncteurs</u> $\underset{\sim\sim}{\mathrm{Quot}}^P_{\mathcal{F}/X/S}$. Ceci posé, (3.1) sera donc une conséquence du théorème suivant :

THÉORÈME 3.2. - Avec les notations précédentes, le foncteur $\underset{\sim}{Quot}^{P}_{\mathcal{F}/X/S}$ est représentable par un S-préschéma projectif $Quot^{P}_{\mathcal{F}/X/S}$.

La suite de ce numéro est consacrée à la démonstration de (3.2).

Soit ν un entier. Pour tout S' au-dessus de S , nous désignons par $A_{\nu}(S')$ l'ensemble des quotients $\mathcal{G} = \mathcal{F}'/\mathcal{H}$ de $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$, cohérents, plats sur S' , et satisfaisant les conditions suivantes :

a. $R^i f'_*(\mathcal{G}(n)) = 0$ pour $i > 0$ et $n \geqslant \nu$

b. $R^i f'_*(\mathcal{H}(n)) = 0$ pour $i > 0$ et $n \geqslant \nu$

c. $f'_*(\mathcal{H}(\nu + k)) = \mathcal{S}'_k f'_*(H(\nu))$ pour $k \geqslant 0$.

Pour cette dernière relation, on suppose que X est écrit comme le spectre premier homogène d'une algèbre graduée quasi-cohérente $\mathcal{S}_*$ sur S , à degrés positifs, engendrée par $\mathcal{S}_1$, et on pose $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$, de sorte que X' est le spectre premier homogène de $\mathcal{S}'$. Pour prouver (3.2), on se ramène d'ailleurs facilement au cas où $X = \mathcal{P}^r_S$ (puisque S est réunion d'ouverts u tels que $X|U$ soit un sous-schéma fermé de $\mathcal{P}^r_U$ et $\mathcal{O}_X(1)$ induit par $\mathcal{O}_{\mathcal{P}^r_u}(1)$), et où $\mathcal{F}$ est de la forme $(\mathcal{O}_{\mathcal{P}^r_S})^N$, donc est plat sur S . Alors dans ce qui précède, les faisceaux $\mathcal{H}$ sont également plats S' . Il résulte alors des relations de Künneth ([5], III, § 7), et de (b) que les conditions (a) et (b) sont stables par changement de base, et impliquent que pour $n \geqslant \nu$, la formation de $f'_*(\mathcal{G}(n))$ et de $F'_*(\mathcal{H}(n))$ commute à l'extension de la base (loc. cit.), donc (c) est également stable par extension de la base. En d'autres termes, $A_{\nu}(S')$ est un foncteur contravariant en S' , de façon précise un sous-foncteur de $A(S') = \underset{\sim}{Quot}^{P}_{\mathcal{F}/X/S}(S')$. Pour ν variable, on obtient ainsi une suite croissante de parties $A_{\nu}(S')$ de $A(S')$, dont la réunion est $A(S')$ en vertu d'un théorème bien connu de SERRE [5], III, § 2. Notons maintenant que si $\mathcal{G}$ est un quotient cohérent de $\mathcal{F}'$, plat sur S , s un élément de S tel que le changement de base, $Spec(k(s)) \to S$ donne lieu à un quotient G_s de F_s satisfaisant aux conditions (a), (b), (c), i. e. qui est dans A_{ν} $Spec(k(s))$, alors il existe un voisinage ouvert U de s tel que ces mêmes conditions soient vérifiées pour $\mathcal{G}|f'^{-1}(U)$, i. e. ce quotient est dans $A_{\nu}(U)$; pour (a) et (b),=cela résulte en effet du "théorème des fonctions holomorphes" [5], III, § 7, et (c) résulte du lemme de Nakaymama, et du fait qu'on sait en tous cas que $f'_*(\mathcal{H}(n + k)) = S'_k\, f'_*(\mathcal{H}(n))$

pour n assez grand, et $k \geqslant 0$, (cf. [5], III, § 2). De ces remarques on conclut ceci (comparer [4], IV,). Pour que le foncteur A soit représentable, il faut et il suffit que les foncteurs A_ν le soient, et alors le S-préschéma Q qui représente A est réunion croissante d'ouverts Q_ν représentant les A_ν .

Soit

$$M_* = \sum_{n\geqslant 0} f_*(\mathcal{F}(n)) = \mathcal{S}_*^N \qquad ,$$

de sorte que l'on a

$$M'_* = M_* \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'} = \sum_{n\geqslant 0} f'_*(\mathcal{F}(n)) = \mathcal{S}'^N_* \qquad .$$

Il résulte de (a) que l'on a :

(a') $f'_*(\mathcal{G}(n))$ est localement libre de rang $P(n)$ pour $n \geqslant \nu$, [5], III, § 7, et de (b), pour $i = 1$:

(a") $f'_*(\mathcal{G}(n))$ est un Module quotient de M'_n .

D'ailleurs, la connaissance de ce Module quotient, pour $n = \nu$, implique en vertu de (c) celle des sous-Modules $f'_*(\mathcal{K}(n))$ de M_n pour $n \geqslant \nu$, donc la connaissance de $\mathcal{K}$ et par suite de $\mathcal{G}$. On obtient ainsi une application injective

$$A_\nu(S') \to \mathrm{Grass}_{P(\nu)}\,(M'_\nu)$$

de $A_\nu(S')$ dans l'ensemble des Modules quotients localement libres de rang $P(\nu)$ de M' , d'où un homomorphisme fonctoriel

$$i_\nu \,:\, A_\nu(S') \to \underset{\sim}{\mathrm{Grass}}_{P(\nu)}\,(M_\nu)(S') \qquad ,$$

où le foncteur du deuxième membre est représentable par le schéma grassmanien $\mathrm{Grass}_{P(\nu)}\,(M_\nu)$ (comparer [4], V), qui est projectif sur S . Je dis :

LEMME 3.3. - $A_\nu(S')$ est un foncteur représentable, et le morphisme $Q_\nu \to \mathrm{Grass}_{P(\nu)}\,(M_\nu)$ qui représente l'homomorphisme i_ν est une immersion (ce qui implique que Q_ν est quasi-projectif sur S).

Cette assertion est équivalente à la suivante (comparer [4], IV) : Supposons donné un Module quotient N de M'_ν , localement libre de rang $P(\nu)$, alors il existe un sous-préschéma Z de S' tel que pour tout préschéma localement noethérien T'

sur S', l'image inverse de N sur T' est dans $\mathrm{Im}\, A_\nu(T')$ si et seulement si $T' \to S'$ est majoré par le sous-préschéma Z. Changeant de notations, on peut supposer $S' = S$, i. e. on s'est donné un quotient N_ν de M_ν par un sous-Module R_ν. Pour qu'il provienne d'un élément de $A(s)$, il faut et il suffit qu'il satisfasse les deux conditions suivantes :

(i) $M_{\nu+k}/\mathcal{S}_k R_\nu$ est localement libre de rang $P(\nu + k)$ pour $k \geqslant 0$.

(ii) Le sous-faisceau $\mathcal{K}$ de $\mathcal{F}$ défini par le sous-Module gradué $R_* = \sum_{k \geqslant 0} \mathcal{S}_k R_\nu$ de M_* ([5], II, § 3) et le quotient $\mathcal{G} = \mathcal{F}/\mathcal{K}$, satisfont les conditions (a) et (b) plus haut. Ces conditions sont manifestement nécessaires, d'autre part si elles sont vérifiées, alors le faisceau $\mathcal{G}$ défini dans (ii), étant isomorphe au faisceau associé au $\mathcal{S}_*$-Module gradué N_* somme des $M_{n+k}/\mathcal{S}_k R$, est plat sur S (car ses fibres sont des facteurs directs de modules localisés de N pour des idéaux premiers homogènes de $\mathcal{S}_*$), et correspond au polynôme de Hilbert P en vertu de (i). Compte tenu de (ii), on voit alors que (a') et (a") sont vérifiés, donc pour $n \geqslant \nu$, l'homomorphisme naturel $N_n \to f_*(\mathcal{G}(n))$ est un homomorphisme surjectif de Modules localement libres de même rang, donc un isomorphisme, donc on a $f_*(\mathcal{K}(\nu + k)) = \mathcal{S}_k R_\nu$ pour tout $k \geqslant 0$, ce qui prouve que $\mathcal{G} \in A_\nu(S)$ et que R_ν est l'élément de $\mathrm{Grass}_{P(\nu)}(M_\nu)$ défini par $\mathcal{G}$.

Ce critère (i) (ii) s'applique également à la situation obtenue après un changement de base $S' \to S$. Nous allons prouver d'abord que le fait que la condition (i) soit vérifiée après le changement de base $S' \to S$, s'exprime par la condition que $S' \to S$ est majoré par un certain sous-préschéma Z de S ; une fois ce résultat obtenu, on est ramené (remplaçant S par Z) au cas où la condition (i) est déjà vérifiée sur S, et comme elle est stable par changement de base, il reste à exprimer la condition (ii). Mais alors, si U désigne l'ensemble des $s \in S$ tels que la cohomologie des faisceaux induits sur la fibre X_s par $\mathcal{G}(n)$ et $\mathcal{K}(n)$ soit nulle en dimension > 0 pour $n \geqslant \nu$, on a déjà signalé que U est ouvert, et la condition (ii) sera vérifiée après un changement de base $S' \to S$ si et seulement si $S' \to S$ est majoré par U, ce qui prouve le lemme 3.3. Il reste donc à prouver le lemme suivant :

LEMME 3.4. - Soient S un préschéma localement noethérien, muni d'une algébre graduée quasi-cohérente $\mathcal{S}_*$ à degrés positifs, engendrée par $\mathcal{S}_1$, M_* un $\mathcal{S}$-Module gradué quasi-cohérent de type fini, P un polynôme à coefficients rationnels, ν un entier, Alors il existe un sous-préschéma Z de S (évidemment unique) ayant la propriété suivante : Pour tout préschéma S' sur S, pour que $M_n \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ soit localement libre de rang $P(n)$ pour tout $n \geq \nu$, il faut et il suffit que $S' \to S$ soit majoré par Z.

On peut évidemment supposer S affine, donc noethérien. Alors :

LEMME 3.5. - Pour tout entier $N \geq \nu$, soit U_N l'ouvert de S formé des $s \in S$ tels que $\mathrm{rang}_{k(s)} M_{ns} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s) \leq P(n)$ pour tout $\nu \leq n \leq N$. Alors la suite décroissante des ouverts U_N est stationnaire.

On sait [3], IV, que S admet une partition finie en sous-préschémas réduits S_i, tels que chaque $M \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_i}$ soit plat sur S : On peut donc supposer M plat, donc les M_n plats. Enfin, on peut évidemment supposer S connexe. Mais alors il existe un entier n_o et un polynôme Q tels que

$$\mathrm{rang}_{k(s)} M_{ns} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s) = Q(n) \quad \text{pour} \quad n \geq n_o$$

[5], III, § 7. Supposons d'abord $P \neq Q$ donc $P(n) \neq Q(n)$ pour n grand, alors on a évidemment $U_N = \emptyset$ pour N grand, a fortiori la suite des U_N est stationnaire. Si au contraire $P = Q$, alors on aura $U_N = U_{n_o}$ pour $N \geq n_o$, et la suite des U_N est encore stationnaire.

En particulier, l'ensemble U_∞ des $s \in S$ tels que

$$(*) \qquad \mathrm{rang}_{k(s)} M_{ns} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s) \leq P(n) \quad \text{pour tout} \quad n \geq \nu \quad ,$$

étant l'intersection des U_N, est ouvert. On peut alors, pour la démonstration de (3.4), remplacer S par l'ouvert U, ce qui nous ramène au cas où l'inégalité (*) est satisfaite en tout $s \in S$. D'ailleurs :

LEMME 3.6. - Soit M un Module sur un préschéma localement noethérien S, et r un entier. Alors il existe un sous-préschéma Z de S (évidemment unique) ayant la propriété suivante : pour tout S' sur S, pour que $M \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ soit localement libre de rang r, il faut et il suffit que $S' \to S$ soit majoré par Z. Si on a $\mathrm{rang}_{k(s)} M_s \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s) \leq r$ pour tout s, alors Z est un sous-préschéma fermé de S (on suppose M cohérent).

En effet, le raisonnement précédent nous ramène au cas où on a l'inégalité (*) pour tout $s \in S$ (en remplaçant au besoin S par la partie ouverte formée des s où l'inégalité est vérifiée). On peut alors supposer que M s'insère dans une suite exacte

$$\mathcal{O}_S^q \to \mathcal{O}_S^r \to M \to 0 \quad ,$$

et la condition envisagée sur les S' sur S signifie aussi que dans la suite exacte $\mathcal{O}_{S'}^q \to \mathcal{O}_{S'}^r \to M' \to 0$ correspondante, la deuxième flèche est un isomorphisme, i. e. la première est nulle. On voit alors que le sous-préschéma fermé Z de S défini par l'Idéal engendré par les coefficients de la matrice définissant l'homomorphisme $\mathcal{O}_S^q \to \mathcal{O}_S^r$, satisfait à la condition voulue.

Revenant alors à la démonstration de (3.4) où nous l'avions laissée, on désigne par Z_n le sous-schéma *fermé* de S associé en vertu de (3.6) au Module M_n et à l'entier $r = P(n)$, par Z'_N le Inf des Z_n pour $\nu \leq n \leq N$. Alors les Z_N forment une suite décroissante de sous-schémas fermés de Z, donc nécessairement stationnaire. Soit Z la valeur constante des Z_N pour N grand. C'est le Z cherché dans (3.4). Cela achève la démonstration de (3.4), donc aussi celle de (3.3).

On a donc prouvé que $\underset{\sim\sim}{\mathrm{Quot}}^P_{\mathcal{F}/X/S}$ *est représentable par un* S-*préschéma* Q *qui est une réunion croissante de sous-préschémas ouverts* Q_ν *quasi-projectifs sur* S. Pour aller plus loin, il faut invoquer le théorème 2.1, d'où on conclut facilement que Q est *quasi-compact*, (car image du préschéma de type fini S' sur S qui paramètre la famille des faisceaux quotients des $\mathcal{F}_K$ ayant le polynôme de Hilbert P). Donc Q est égal à l'un des Q_ν, donc quasi-projectif sur S. Pour prouver qu'il est projectif sur S, il reste donc à prouver qu'il est *propre* sur S, et pour cela il suffit d'invoquer le critère valuatif de propreté sous la forme [5], II,7.3.8. Il suffit de vérifier ceci :

LEMME 3.7. - *Soient* S *le spectre d'un anneau de valuation discrète,* s *son point générique,* X *un préschéma sur* S, $\mathcal{F}$ *un Module quasi-cohérent sur* X, $\mathcal{G}_s$ *un Module quotient quasi-cohérent de* $\mathcal{F}_s = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s)$ *sur* X_s. *Alors il existe un Module quotient quasi-cohérent* $\mathcal{G}$ *unique de* $\mathcal{F}$, *plat sur* S, *et dont la restriction à* X_s *soit* $\mathcal{G}_s$.

En effet, si $\mathcal{G}_S = \mathcal{F}_S/\mathcal{K}_S$, il suffit de considérer le plus grand sous-faisceau $\mathcal{K}$ de $\mathcal{F}$ induisant $\mathcal{K}_S$, [5], I, 9.4.2 et de prendre $\mathcal{G} = \mathcal{F}/\mathcal{K}$. On vérifie facilement que ce faisceau convient.

Le théorème 3.2, et par suite (3.1) est complètement démontré.

La démonstration prouve en même temps ceci :

PROPOSITION 3.8. - Sous les conditions de (3.2), soient $Q = \underline{\mathrm{Quot}}^P_{\mathcal{F}/X/S}$, $X_Q = X \times_S Q$, $F_Q = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_Q$, et soit $\mathcal{G}$ le quotient cohérent de $\mathcal{F}_Q$, plat sur Q, ayant le polynôme de Hilbert relatif P, tel que $(Q , \mathcal{G})$ représente le foncteur $\underset{\sim}{\mathrm{Quot}}^P_{\mathcal{F}/X/S}$. Il existe un entier ν tel que, pour $n \geq \nu$, $(f_Q)_*(\mathcal{G}(n))$ soit un Module sur Q localement libre de rang $P(n)$, et très ample relativement à S, i. e. définissant une immersion de Q dans un schéma grassmanien $\mathrm{Grass}_{P(n)}(M)$ sur S. A fortiori, pour $n \geq \nu$, le faisceau $\bigwedge^{P(n)}(f_Q)_*(\mathcal{G}(n))$ sur Q est inversible très ample relativement à S.

On peut en effet se ramener, comme pour (3.2), au cas où F est plat sur S, et alors il suffit de prendre un entier ν tel que $A_\nu = A$ (avec les notations précédentes).

La cas le plus important d'application de (3.2) est celui où $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. On écrit alors

$$\underline{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{O}_X/X/S} = \underline{\mathrm{Hilb}}_{X/S} , \quad \underline{\mathrm{Quot}}^P_{\mathcal{O}_X/X/S} = \underline{\mathrm{Hilb}}^P_{X/S} ,$$

donc on a une décomposition

$$\underline{\mathrm{Hilb}}_{X/S} = \coprod_P \underline{\mathrm{Hilb}}^P_{X/S} .$$

Par définition, $\underline{\mathrm{Hilb}}_{X/S}$ représente le foncteur $\underset{\sim}{\mathrm{Hilb}}_{X/S}(S')$ = ensemble des sous-préschémas fermés de $X' = X \times_S S'$ qui sont plats sur S ; et $\underline{\mathrm{Hilb}}^P_{X/S}$ représente le sous-foncteur correspondant aux sous-préschémas fermés admettant un polynôme de Hilbert donné P. Ces préschémas sont aussi appelés le <u>préschéma de Hilbert</u> de X sur S, respectivement le <u>préschéma de Hilbert d'indice</u> P. La terminologie est justifiée par le rôle joué dans la théorie par les polynômes de Hilbert. Leur différence de nature avec les classiques variétés de Chow (destinées à paramétrer des cycles, et non des variétés) est du même ordre qu'entre l'anneau de Chow des classes de cycles d'une variété, et l'anneau des classes de faisceaux de la variété (telle qu'il s'introduit dans le théorème de Riemann-Roch [1]) ; on notera en effet que lorsque $X = \mathcal{P}^r_S$, S étant le spectre d'un corps, la connaissance du polynôme de Hilbert d'un Module cohérent $\mathcal{F}$ sur X équivaut aussi à celle des classes de Chern de $\mathcal{F}$, ou encore de la classe de $\mathcal{F}$ dans l'anneau des classes de faisceaux cohérents sur X .

REMARQUES 3.9. - On notera aussi que la construction des $\underline{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}$ et $\underline{Quot}^P_{\mathcal{F}/X/S}$ a été ramenée au cas où $X = \mathcal{P}^r_S$, $\mathcal{F} = \mathcal{O}^N_X$, $\mathcal{O}_X(1)$ étant le faisceau très ample habituel ; de façon précise, les $\underline{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}$ généraux se réalisent comme des sous-préschémas fermés des précédents. Comme la formation des $\underline{Quot}^P_{\mathcal{F}/X/S}$ est évidemment compatible avec les changements de base $S' \to S$, on voit qu'on est ramené au cas où on a de plus $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. En fin de compte, on est donc ramené à étudier les schémas projectifs sur $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{Q}^P_{r,N} = \underline{Quot}_{(\mathcal{O}_{\mathcal{P}^r_{\mathbb{Z}}})^N/\mathcal{P}^r_{\mathbb{Z}}/\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} \qquad ,$$

et plus particulièrement les schémas de Hilbert absolus :

$$\underline{Hilb}^P_r = \mathcal{Q}^P_{r,1} \qquad .$$

Une étude plus détaillée de ces schémas, à commencer par la détermination de leurs composantes connexes (sont-ils connexes ?), leurs composantes irréductibles (en vertu de SERRE [7], il peut y avoir des composantes irréductibles qui se trouvent tout entières sur un nombre premier $p \neq 0$), serait fort intéressante. Rappelons la question de WEIL si les composantes irréductibles des fibres de $\underline{Hilb}^P_r$ sur les $s \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ correspondent à des extensions "régulières" du corps premier, i. e. si elles sont "relativement connexes". Il n'est pas exclu que ces questions soient plus abordables pour les schémas de Hilbert que pour les "variétés de Chow".

4. Variantes.

a. Sous les conditions de (3.1), soit U un ouvert dans X , et désignons par A' le sous-foncteur de $A = \underset{\sim}{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}$, tel que A'(S') soit l'ensemble des Modules quotients $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}'$, plats sur S' , dont le support est contenu dans U' . On voit aussitôt que A' est représentable par une partie ouverte du préschéma $\underline{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}$ qui représente A . Il s'ensuit que les théorèmes (3.1) et (3.2) restent valables en supposant que X est quasi-projectif sur S au lieu de projectif sur S, quand on remplace aussi dans les conclusions les mots "projectif" par "quasi-projectif", et qu'on désigne maintenant par $\underline{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}(S')$ l'ensemble des quotients cohérents $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}'$, plats sur S', dont le support est propre sur S'.

b. De façon générale, on peut imposer aux quotients G de $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$, plats sur S' toutes sortes de conditions naturelles supplémentaires, stables par changement de base, obtenant ainsi autant de sous-foncteurs de $\underline{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}$ qu'on se propose de représenter. Le critère habituel permet dans beaucoup de cas de prouver qu'on obtient encore des foncteurs représentables par des parties ouvertes de $\underline{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}$. Il en est en particulier ainsi lorsqu'on impose l'une des propriétés supplémentaires suivantes :

1° Les dimensions des cycles premiers associés aux Modules G_s, $(s' \in S')$ induits sur les fibres $X'_{s'}$ appartiennent à un ensemble donné d'entiers.

2° (Lorsque $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, donc $\mathcal{G}$ correspond à un sous-préschéma fermé Y de X'); Y est un préschéma simple ([3], IV) sur S, resp. normal sur S (i. e. les fibres $Y_{s'}$ sont normales "sur $k(s)$", i. e. sont normales par toute extension du corps de base), resp. (lorsque X est plat sur S) sont des k-intersections complètes locales dans X relativement à S (i. e. les fibres $Y_{s'}$ sont des intersections complètes locales dans les $X_{s'}$).

D'autres conditions feraient intervenir des propriétés de nature cohomologiques sur les Modules $G_{s'}$ induits sur les $X'_{s'}$, etc. Bien entendu, la conjonction de conditions dont chacune est représentée par un ouvert U_i de $\underline{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}$, est représentée par l'ouvert intersection. Par exemple, considérant pour tout S' sur S l'ensemble des sous-préschémas fermés Y de $X' = X \times_S S'$ qui sont des revêtements étales ([3], I) de rang donné r de S', on trouve un foncteur contravariant représentable en S'.

c. Les préschémas $\underline{Hom}_S(X, Y)$, $\prod_{X/S}(Z/X)$, $\underline{Isom}_S(X, Y)$, définis dans [2], II, C, n° 2, existent moyennant des hypothèses projectives convenables, et se réalisent comme des ouverts dans des préschémas de Hilbert convenables. Comme on a $\underline{Hom}_S(X, Y) = \prod_{X/S}((X \times Y)/X)$, le cas de $\underline{Hom}_S(X, X)$ se ramène à celui de $\prod_{X/S}(Z/X)$. On note alors que pour tout S' sur S, l'ensemble des sections de $Z' = Z \times_S S'$ sur $X' = X \times_S S'$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des sous-préschémas Γ de Z (nécessairement fermés si Z est séparé sur X) tels que le morphisme $\Gamma \to X'$ induit par $Z' \to X'$ soit un isomorphisme. De cette façon, lorsque X <u>est plat et propre sur</u> S, <u>et</u> Z <u>est quasi-projectif sur</u> S, $\prod_{X/S}(Z/X)$ <u>existe et se réalise comme un sous-préschéma ouvert de</u> $\underline{\mathrm{Hilb}}_{Z/S}$. <u>Donc lorsque</u> X <u>est projectif et plat sur</u> S, <u>et</u> Y <u>quasi-projectif sur</u> S, $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$ <u>existe et se réalise comme un sous-préschéma ouvert de</u> $\underline{\mathrm{Hilb}}_{(X\times_S Y)/S}$. Lorsque X et Y sont tous les deux projectifs sur S, il s'ensuit aussitôt que $\underline{\mathrm{Isom}}_S(X, Y)$ existe également, et se représente par une partie ouverte de $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$. De même, lorsque X est plat et projectif sur S et Y quasi-projectif sur S, le S-préschéma $\underline{\mathrm{Imm}}_S(X/Y)$, correspondant au sous-foncteur du foncteur représenté par $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$ qui correspond aux S'-homomorphismes $X' \to Y'$ qui sont des immersions, est également représentable par une partie ouverte de $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$.

Soient $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{M}$) un faisceau inversible sur X (resp. Y) très ample relativement à S, d'où un faisceau très ample $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M}$ sur $X \times_S Y$ relativement à S. Par suite, pour tout polynôme P à coefficients rationnels, $\underline{\mathrm{Hilb}}^P_{(X\times_S Y)/S}$ est défini et est un préschéma quasi-projectif sur S. Il induit donc sur $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$ une partie à la fois ouverte et fermée quasi-projective sur S, que nous noterons $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)^P$. Donc les sections de $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)^P$ sur S sont les S-morphismes $g : X \to Y$ tels que pour tout entier n, on ait

$$\chi((\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} g^*(\mathcal{M}))^{\otimes n}) = P(n) \quad .$$

On obtient de cette façon des généralisations du théorème de Matsusaka, affirmant que les automorphismes d'une variété projective "polarisée" forment un groupe algébrique, assertion qui prend ici une signification évidemment plus précise, puisque nous disposons d'une définition de ce groupe comme solution d'un problème universel. On notera d'ailleurs que, sur un corps algébriquement clos, le groupe des automorphismes considéré anciennement est celui déduit du "vrai" défini ici en divisant par les éléments nilpotents ; cela explique pourquoi il y a peu de chance que les constructions plus anciennes puissent se faire sur un corps de base non parfait, l'Idéal des éléments nilpotents apparaissant après extension du corps de base n'étant pas nécessairement "défini sur k". Cette même remarque s'applique d'ailleurs également à la plupart des constructions ancien style.

5. Étude différentielle des schémas de Hilbert.

Elle découle du résultat suivant :

PROPOSITION 5.1. - Soient S un préschéma, S_o un sous-préschéma défini par un Idéal quasi-cohérent $\mathfrak{J}$ de carré nul, X un S-préschéma, $\mathcal{F}$ un Module quasi-cohérent sur X, $X_o = \mathcal{F} \times_S S_o$ et $\mathcal{F}_o = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_o}$, enfin $\mathcal{G}_o = \mathcal{F}_o/\mathcal{K}_o$ un Module quotient quasi-cohérent de $\mathcal{F}_o$, plat sur S_o. Pour tout ouvert U de X, soit $\mathcal{E}(U)$ l'ensemble des Modules quotients quasi-cohérents $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}|U$, plats sur S, et tels que $\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_o} = \mathcal{G}_o$; ainsi pour U variable, les $\mathcal{E}(U)$ sont les sections d'un faisceau $\mathcal{E}$ sur U. Ceci posé, le faisceau en groupes

$$\mathcal{A} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X_o}}(\mathcal{K}_o , \mathcal{G}_o \otimes_{\mathcal{O}_{S_o}} \mathfrak{J})$$

opère de façon naturelle sur $\mathcal{E}$, qui devient ainsi un faisceau "formellement principal homogène sous $\mathcal{A}$" (i. e. pour tout ouvert U dans X, $\mathcal{E}(U)$ est vide ou un ensemble principal homogène sous $\mathcal{A}(U)$).

On en conclut :

COROLLAIRE 5.2. - Supposons qu'il existe localement sur X un prolongement $\mathcal{G}$ de $\mathcal{G}_o$ en un quotient de $\mathcal{F}$ plat sur S, (i. e. que les fibres du faisceau $\mathcal{E}$ soient non vides). Alors il existe une classe d'obstruction canonique

$$c(\mathcal{G}_o) \in H^1(X , \mathcal{A}) \quad ,$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour l'existence d'un prolongement global $\mathcal{G}$ de $\mathcal{G}_o$ en un quotient de $\mathcal{F}$ plat sur S. Si cette classe est nulle, alors l'ensemble $\mathcal{E}(X)$ de tous les prolongements possibles est un ensemble principal homogène sous $\mathcal{A}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{K}_o , \mathcal{G}_o \otimes_{\mathcal{O}_{S_o}} \mathfrak{J})$.

L'existence du prolongement global est alors garanti en particulier si $H^1(X , \mathcal{A}) = 0$.

COROLLAIRE 5.3. - Supposons que $Q = \underline{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{F}/X/S}$ existe (cf. 4. (a)) - par exemple que X soit quasi-projectif sur S localement noethérien, et $\mathcal{F}$ cohérent. Soit $x \in Q$, correspondant à une extension résiduelle $K = k(x)$ d'un $k(s)$ ($s \in S$) :

donc x est défini par un Module quotient cohérent $\mathcal{G}_o = \mathcal{F}_o/\mathcal{K}_o$ du Module $\mathcal{F}_o = F_K$ sur le K-préschéma X_K. Soit $\mathcal{A}$ le faisceau cohérent sur X_K défini par

$$\mathcal{A} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X_o}}(\mathcal{K}_o\ ,\ \mathcal{G}_o) \quad .$$

Alors l'espace tangent de Zariski de la fibre Q_s au point x (dual sur K de m/m^2, où m est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Q_K,x}$) est canoniquement isomorphe à $H^o(X_K\ ,\ \mathcal{A})$.

Le résultat donnant l'espace tangent de Zariski peut se généraliser, et donne une caractérisation, pour un S-morphisme donné $g : S' \to Q$, i. e. une section g' de $Q' = Q \times_S S'$ sur S', du Module

$$\Omega = g^*(\Omega^1_{Q/S}) = g'^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$$

(où $\mathcal{J}$ est l'Idéal sur Q' défini par la section g' de Q' sur S'), par la formule fonctorielle en le Module cohérent $\mathcal{M}$ sur S' :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{S'}}(\Omega\ ,\ \mathcal{M}) \simeq H^o(X'\ ,\ \mathcal{A}) \quad ,$$

où $\mathcal{A}$ est encore le Module sur $X' = X \times_S S'$ défini par

$$\mathcal{A} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{K}\ ,\ \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M}) \quad ,$$

($\mathcal{G} = \mathcal{F}'/\mathcal{K}$ étant le Module quotient de $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ qui correspond à g).
Il suffit en effet d'appliquer (5.1) en y remplaçant S_o par S', S par le préschéma $D(\mathcal{M}) = (S'\ ,\ \mathcal{O}_{S'} + \mathcal{M})$, où $\mathcal{M}$ est considéré comme un Idéal de carré nul.

Lorsque dans (5.1), on a $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, donc la donnée de $\mathcal{G}_o$ correspond à la donnée d'un sous-préschéma fermé Y_o de X_o plat sur S_o défini par l'Idéal $\mathcal{J}_o = \mathcal{M}_o$, alors (*) donne

$$\mathcal{A} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X_o}}(\mathcal{J}_o/\mathcal{J}_o^2\ ,\ \mathcal{O}_{Y_o} \otimes_{\mathcal{O}_{S_o}} \mathcal{J}) \quad ,$$

où $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ s'interprète comme le faisceau conormal à Y_o dans X_o, qu'on note aussi

$\mathcal{N}_{Y_o/X_o}$; il y a alors intérêt à considérer $\mathcal{Q}$ comme un Module sur Y_o , et de calculer H^o et H^1 sur Y . D'ailleurs, si Y_o est localement une intersection complète dans X_o , X étant plat sur S , alors dans (5.1) la possibilité de prolongement local est garantie, d'autre part $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ est localement libre sur Y_o et on peut écrire

$$\mathcal{Q} = \check{\mathcal{N}}_{X_o/Y_o} \otimes_{\mathcal{O}_{S_o}} \mathfrak{J} \qquad ,$$

où le premier facteur du deuxième membre est le faisceau normal à Y_o dans X_o . Utilisant le critère fondamental de simplicité ([3], III, 3.1), on trouve par exemple :

COROLLAIRE 5.4. - Sous les conditions de (5.3), supposons que $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, X plat sur S , et que le sous-préschéma fermé Y_o de X_o qui correspond à $\mathcal{G}_o$ soit localement une intersection complète. Alors l'espace tangent de Zariski à Q_s en x est canoniquement isomorphe à $H^o(Y_o , \check{\mathcal{N}}_{X_o/Y_o})$. Si $H^1(Y_o , \check{\mathcal{N}}_{X_o/Y_o}) = 0$, alors le préschéma de Hilbert X est simple sur S en le point x . ($\check{\mathcal{N}}_{X_o/Y_o}$ est le faisceau normal à Y_o dans X_o).

REMARQUE 5.5. - Cet énoncé s'applique en particulier lorsque Y_o est une intersection complète dans $_o$ définie par une équation, i. e. est un "diviseur de Cartier" positif. Alors $\check{\mathcal{N}}_{X_o/Y_o}$ est isomorphe au faisceau sur Y_o induit par le faisceau inversible $\mathcal{J}^{-1}$ sur X_o défini par le diviseur Y_o . C'est la situation rencontrée en particulier dans l'étude des familles de diviseurs positifs sur une variété projective non singulière X_o . L'isomorphisme entre l'espace tangent de Zariski en le point x de Q (ou si on préfère, de l'ouvert D de Q qui correspond aux diviseurs) et $\mathcal{H}^o(Y_o , \check{\mathcal{N}}_{X_o/Y_o})$ était connu en géométrie algébrique classique sous le nom de "homomorphisme caractéristique" du premier dans le second. Il n'était défini que lorsque x était un point simple de la variété des paramètres T d'une "famille continue complète" de diviseurs, c'est-à-dire, de notre point de vue, une composante irréductible du schéma D , muni de la structure réduite induite. L'espace tangent à T en x est alors un sous-espace de l'espace tangent à D en x , donc l'homomorphisme caractéristique des anciens est bien injectif, mais n'est surjectif que sous des conditions supplémentaires, par exemple si D est intègre en x . En fait, ZAPPA [8] a construit un exemple (avec X surface projective non singulière sur le corps des complexes) ou même en le point générique de T, l'homomorphisme caractéristique n'est pas surjectif. Cela signifie donc que D n'est pas intègre même en le point générique de la composante irréductible envisagée. Cela montre de façon particulièrement frappante comment les variétés à éléments nilpotents sont nécessaires pour comprendre des phénomènes de la plus classique théorie des surfaces.

5.6. - On a donné dans (5.4) un critère de simplicité, s'appliquant en particulier aux schémas de diviseurs. KODAIRA à donné dans [6] un critère différent, savoir la nullité de $H^1(X_0, \mathcal{L})$, où $\mathcal{L} = \mathcal{J}_0^{-1}$ est le faisceau inversible sur X_0 défini par le diviseur Y_0 ; critère valable lorsque S est le spectre d'un corps de caractéristique 0, et prouvé dans [6] par voie transcendante dans le cas où le corps de base est $\underset{\sim}{C}$. Notons ici que, de façon générale, S étant à nouveau quelconque, la condition de Kodaira est une condition suffisante pour que le morphisme canonique $D \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ du préschéma des diviseurs dans le préschéma de Picard de X/S soit simple au point x envisagé (comme on le vérifie facilement par le critère habituel de simplicité, une fois acquise l'existence de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$). Si donc, de plus, $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est simple sur S au point image de x (par exemple si $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est simple sur S), alors D est simple sur S en x. D'autre part, CARTIER a démontré que tout préschéma en groupes localement de type fini sur un corps k de caractéristique 0 est simple sur k. En conjuguant ces deux résultats, on retrouve le résultat de KODAIRA. On notera qu'il résulte de ces remarques que sur un corps K de caractéristique $p > 0$, lorsque $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ n'est pas simple sur k (ce qui est le cas lorsque X est la surface de Igusa), la condition $H^1(X_0, \mathcal{L}) = 0$ implique au contraire que D n'est pas simple en x, et même n'est pas réduit en x si K est algébriquement clos.

Pour finir, signalons encore le résultat suivant, qui joue un rôle important dans l'étude différentielle des espaces fibrés :

PROPOSITION 5.7. - Soient X un préschéma fini et plat sur S localement noethérien, et soit Z un préschéma sur S, tel que $\prod_{X/S}(Z/X)$ existe (ce qui est le cas si Z est quasi-projectif sur X). Si alors Z est simple sur X, $\prod_{X/S}(Z/X)$ est simple sur S.

C'est une conséquence immédiate de la définition, et du critère habituel de simplicité ([3], III, 3.1). Remarquons que lorsque X est fini et plat sur S, la question de l'existence de $\prod_{X/S}(Z/K)$ peut se traiter très élémentairement, sans utiliser la théorie des schémas de Hilbert. On trouve par exemple que si X est radiciel sur S, alors $\prod_{X/S}(Z/X)$ existe sans aucune restriction sur Z. Par exemple, soit T un S-préschéma, et soit T_n le "voisinage infinitésimal d'ordre n" de la diagonale de $T \times_S T$ dans $T \times_S T$, muni des morphismes p_1, p_2 ; $T_n \to T$ induits par les deux projections. On considère T_n comme un préschéma fini sur T grâce à p_1, supposons-le de plus plat sur T (ce qui est le cas si T est simple sur S). Pour toùt préschéma X sur T, posons

$$(X/T/S)^{(n)} = \prod_{T_n/S} (p_2^*(X/T)/T_n) \qquad ,$$

c'est un préschéma sur T appelé fibré des germes de sections d'ordre n de X sur T (relativement à S). Il dépend fonctoriellement de X, et est simple sur T si X l'est.

6. Relations avec la notion de norme et les produits symétriques.

Soient S un préschéma, X et Y des S-préschémas,

$$u : (X/S)^n \to Y$$

un S-morphisme symétrique de la puissance cartésienne n-ième de X/S dans Y. Nous supposerons pour simplifier S localement noethérien, et X et Y de type fini sur S. On peut alors, à tout Module cohérent $\mathfrak{F}$ sur X, à support fini sur S, plat sur S et de rang relatif sur S égal à n (i. e. tel que $f_*(\mathfrak{F})$ soit un Module localement libre de rang n sur S), faire correspondre de façon naturelle une section de Y sur S :

$$\pi^u_{X/S}(\mathfrak{F}) \in \Gamma(Y/S) \qquad .$$

Nous ne donnerons pas ici la définition en forme, nous contentant de signaler que le formalisme auquel on arrive est une généralisation naturelle du formalisme habituel des normes et traces. Lorsque la puissance symétrique n-ième de X sur S existe (par exemple lorsque les orbites du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opérant sur $(X/S)^n$ sont contenues dans des ouverts affines), on peut prendre pour Y cette puissance symétrique $\mathrm{Symm}^n_S(X)$, et on trouve un élément canonique

$$\pi_{X/S}(\mathfrak{F}) \in \Gamma(\mathrm{Symm}^n_S(X)/S) \qquad ,$$

qui permet de retrouver les $\mathfrak{N}^u_{X/S}(F)$. Un autre cas important est celui où X est un monoïde commutatif sur S , et $X = Y$, le morphisme u provenant de la loi de composition de X . On écrira alors simplement $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})$ pour la section de X sur S associée au Module $\mathfrak{F}$ sur X .

Supposons maintenant que l'on ait un Module cohérent $\mathfrak{F}$ sur X , tel que $\underline{\mathrm{Quot}}_{\mathfrak{F}/X/S}$ existe, ou du moins tel que le foncteur $\mathrm{Quot}^n_{\mathfrak{F}/X/S}$ qui associe à tout S' sur S l'ensemble des faisceaux quotients cohérents $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ qui sont plats sur S et de rang relatif n , soit représentable par un S-préschéma $\underline{\mathrm{Quot}}^n_{\mathfrak{F}/X/S}$ (Lorsque X est quasi-projectif sur S , alors $\underline{\mathrm{Quot}}^n_{\mathfrak{F}/X/S}$ existe bien, et n'est autre, avec les notations du numéro 3, que $\underline{\mathrm{Quot}}^P_{\mathfrak{F}/X/S}$, où P est le polynôme réduit au terme constant n). Comme la formation des $\mathfrak{N}^u_{X/S}(\mathfrak{M})$ est compatible avec le changement de base, on obtient alors un morphisme canonique

$$\mathfrak{N}^u_{X/S} : \underline{\mathrm{Quot}}^n_{\mathfrak{F}/X/S} \to Y \qquad ,$$

en particulier, si la puissance symétrique n-ième de X sur S existe :

$$\mathfrak{N}_{X/S} : \underline{\mathrm{Quot}}^n_{\mathfrak{F}/X/S} \to \mathrm{Symm}^n_S(X) \qquad .$$

Le cas le plus important est celui où $\mathfrak{F} = \mathcal{O}_X$, qui donne un morphisme :

$$\mathfrak{N}_{X/S} : \underline{\mathrm{Hilb}}^n_{X/S} \to \mathrm{Symm}^n_S(X) \qquad .$$

C'est évidemment un isomorphisme pour $n = 0$ ou $n = 1$. Mais pour $n \geq 1$, même si S est le spectre d'un corps k , et lorsque X est simple sur S , ce n'est pas en général un isomorphisme ni même un morphisme injectif, puisque un sous-schéma de dimension 0 de X (correspondant par exemple à un idéal $\mathfrak{i}$ primaire pour l'idéal maximal dans un anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$, pour un point fermé x de X) n'est pas connu quand on connait le cycle qu'il définit (en l'occurence, quand on connait la codimension sur k de $\mathfrak{i}$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$). On peut seulement dire ceci (S étant de nouveau quelconque) :

a. Si X est simple sur S , alors le morphisme-norme définit un isomorphisme de l'ouvert de $\underline{\mathrm{Hilb}}^n_{X/S}$ qui correspond à la classification de revêtements étales de rang n contenus dans X (cf. n° 4, (b)), avec l'ouvert de $\mathrm{Symm}^n_S(X)$ qui correspond aux n-cycles sans composantes multiples.

b. Si de plus X est de dimension relative 1 sur S, alors le morphisme norme définit même un isomorphisme de $\underline{\mathrm{Hilb}}^n_{X/S}$ avec $\mathrm{Symm}^n_{X/S}$.

Ce dernier fait est dû à ce que un sous-schéma de dimension 0 d'une courbe algébrique non singulière est connue quand on connait le cycle correspondant. La même remarque s'applique d'ailleurs plus généralement aux diviseurs de Cartier, positifs sur un schéma algébrique non singulier (et il n'est pas exclu que dans ce cas très particulier, la variété de Chow donne la même chose que le schéma de Hilbert).

7. Compléments et questions.

Comme l'a remarqué J.-P. SERRE, il résulte d'un exemple bien connu de NAGATA qu'on peut trouver un schéma S, spectre d'un corps k, un S-schéma S', spectre d'une extension quadratique k' de k, enfin un S'-schéma X propre et simple (mais non projectif) de dimension 3, tel que $\prod_{S'/S}(X/S)$ n'existe pas. Cela implique a fortiori que le schéma de Hilbert $\underline{\mathrm{Hilb}}^2_{X/S}$ n'existe pas (ni même le k-schéma qui représenterait les revêtements étales de rang 2 de S contenus dans X, ni a fortiori le carré symétrique de X, cf. numéro précédent). Cela impose donc des limitations sérieuses aux possibilités de constructions non projectives en Géométrie algébrique. (Il est cependant plausible que de telles limitations ne se présenteront pas en Géométrie analytique, pas plus qu'elles ne se présentent en Géométrie formelle, (cf. [2], II)). Par contre, si X est un schéma propre sur le spectre S d'un corps k, et si Z est quasi-projectif sur X, alors $\prod_{X/S}(Z/X)$ existe, et est un schéma, somme d'une suite de schémas quasi-projectifs sur S (comme dans le cas projectif (3.1)). Pour le voir, on se ramène en effet au cas où X est lui-même projectif, en dominant X par un S-schéma projectif X' ; nous ne donnerons pas ici le détail de la démonstration, qui utilise aussi le résultat de factorisation d'un morphisme fini signalé dans [2], I, A, n° 2 (b). Le succès de la méthode tient au fait que, S étant le spectre d'un corps, le X' qui intervient dans le lemme de Chow sera automatiquement plat sur S. J'ignore si le résultat reste valable sans hypothèse sur S, en supposant seulement X propre et plat sur S, Z quasi-projectif sur X. Un cas important dans les applications est celui où Z est un sous-schéma fermé de X ; si alors $\prod_{X/S}(Z/X)$ existe, c'est nécessairement un sous-schéma fermé de S. On peut le construire directement de façon assez simple lorsque X est projectif sur S , sans utiliser la théorie des schémas de Hilbert, et la méthode employée montre plus généralement que si Z est affine sur X , alors $\prod_{X/S}(Z/X)$ existe et est affine sur S . Elle montre également que si X est propre et plat sur S (pas nécessairement projectif sur S), alors pour tout fibré vectoriel Z localement trivial sur X , $\prod_{X/S}(Z/X)$ existe, et est un fibré vectoriel sur S . Il serait désirable que ces résultats soient repris et unifiés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (A.) et SERRE (J.-P.). - Le théorème de Riemann-Roch, Bull. Soc. math. France, t. 86, 1958, p. 97-136.

[2] GROTHENDIECK (Alexander). - Technique de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, I., II., III., Séminaire Bourbaki, t. 13, 1959/60, n° 190, 29 p., n° 195, 22 p. ; et t. 14, 1960/61, n° 212, 20 p.

[3] GROTHENDIECK (Alexander). - Séminaire de Géométrie algébrique, I., II., III., IV. - Paris, Institut des hautes Études scientifiques, 1960/61 (multigraphié).

[4] GROTHENDIECK (Alexander). - Technique de construction en géométrie analytique, IV., V., Séminaire Cartan, t. 13, 1960/61, n° 11 et 12.

[5] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - Éléments de géométrie algébrique, I : Le langage des schémas. - Paris, Presses universitaires de France, 1960 (Institut des hautes Études scientifiques, Publications mathématiques, 4) ; II., III., IV. (à paraître).

[6] KODAIRA (K.). - Characteristic linear systems of complete continous systems, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 716-744.

[7] SERRE (Jean-Pierre). - Exemples de variétés projectives en caractéristique p non relevables en caractéristique 0 , Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 47, 1961, p. 108-109.

[8] ZAPPA (G.). - Sull'esistenza, sopra la superficie algebriche, di sistemi continui completi infiniti, la cui curva e a serie caratteristica incompleta, Pont. Acad. Sc. Acta, t. 9, 1945, p. 91-93.

ADDITIF

[ajouté à la correction des épreuves]

Il apparaît maintenant que les conjectures de [2], III, n° 8, sont fausses, même pour des variétés non singulières sur un corps de caractéristique 0 , tant en ce qui concerne l'existence que la quasi-projectivité du quotient, et même lorsque G opère avec un graphe fermé.