

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ADRIEN DOUADY

## **Le théorème de Grauert sur la cohérence des faisceaux-images d'un faisceau analytique cohérent par un morphisme propre**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1961, exp. n° 220, p. 235-248

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1960-1961\\_\\_6\\_\\_235\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__235_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LE THÉORÈME DE GRAUERT  
SUR LA COHÉRENCE DES FAISCEAUX-IMAGES D'UN FAISCEAU ANALYTIQUE COHÉRENT  
PAR UN MORPHISME PROPRE

par Adrien DOUADY

La rédaction primitive, par trop heuristique, a dû être modifiée. J'ai été amené à serrer de plus près l'ouvrage de GRAUERT [3], dont ce qu'on va lire n'est qu'un résumé, et auquel je renvoie pour toutes les obscurités de détail.

I. Espaces normés de cohomologie.

1. Pseudonormes ([3], § 3, n° 1, p. 24).

Soient  $\pi : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  la projection naturelle, et  $U \subset \mathbb{C}^{m+n}$  un ouvert de la forme  $\mathbb{C}^m \times G$ , où  $G \subset \mathbb{C}^n$  (cette notation signifie que  $G$  est un ouvert de Stein relativement compact dans  $\mathbb{C}^n$ ).

Pour tout polycylindre ouvert  $B \subset \mathbb{C}^m$ , de centre  $0$  et de polyrayon  $(\rho_1, \dots, \rho_m)$ , on pose

$$U_B = U \cap \pi^{-1}(B) = B \times G \quad .$$

Toute fonction holomorphe  $\varphi$  sur  $U_B = B \times G$  se développe en série de la forme

$$\varphi(x, y) = \sum_{i_1, \dots, i_m} f_{i_1, \dots, i_m}(y) \left(\frac{x_1}{\rho_1}\right)^{i_1} \dots \left(\frac{x_m}{\rho_m}\right)^{i_m}$$

où les  $f_{i_1, \dots, i_m}$  sont des fonctions holomorphes sur  $G$ .

On pose :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{y \in G} |f(y)|$$

et

$$\|\varphi\| = \sup_{i_1, \dots, i_m} \|f_{i_1, \dots, i_m}\|_{\infty} \quad .$$

L'espace vectoriel des fonctions holomorphes  $\varphi$  sur  $U_B$  telles que  $\|\varphi\|$  soit finie est un espace de Banach, qu'on notera  $\Gamma_g(U_B; \mathcal{O})$ . Ces définitions s'étendent immédiatement au cas où  $\varphi$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}^r$ .

Si  $X$  est un ouvert de Stein de  $\mathbb{C}^{m+n}$  tel que  $U_B \subset X$ , et  $\mathfrak{F}$  un faisceau analytique cohérent sur  $X$ , on peut trouver un homomorphisme  $\alpha$  de faisceaux analytiques sur  $X$

$$\alpha : \mathcal{O}^r \rightarrow \mathfrak{F}$$

surjectif sur un voisinage de  $\overline{U_B}$ . On note alors  $\Gamma_g(U_B; \mathfrak{F})$  l'image par  $\alpha$  de  $\Gamma_g(U_B; \mathcal{O}^r)$  dans  $\Gamma(U_B; \mathfrak{F})$ . C'est un espace de Banach quand on le munit de la topologie quotient de celle de  $\Gamma_g(U_B; \mathcal{O}^r)$ . Cet espace, avec sa topologie, est indépendant du choix de  $\alpha$ , et même de  $X$ : il ne dépend que du faisceau  $\mathfrak{F}$  sur  $\overline{U_B}$ .

Si maintenant  $X$  est un espace analytique quelconque,  $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^m$  un morphisme,  $U \subset X$ , et  $B \subset \mathbb{C}^m$  un polycylindre  $0$ ; si de plus on s'est donné un isomorphisme de  $U_B = U \cap \pi^{-1}(B)$  sur un sous-espace analytique fermé de  $B \times G$ , où  $G \subset \mathbb{C}^n$ , qui se prolonge à un voisinage de  $\overline{U_B}$ , on peut définir par transport  $\Gamma_g(U_B; \mathfrak{F})$  pour tout faisceau analytique cohérent  $\mathfrak{F}$  sur  $X$ .

La nécessité d'avoir des ouverts "carrés" oblige GRAUERT à jouer continuellement sur deux recouvrements  $W' \ll W$  tels que, pour chaque  $(i_0, \dots, i_q)$ , on puisse trouver un ouvert carré  $U_{i_0, \dots, i_q}$  tel que  $W'_{i_0, \dots, i_q} \subset U_{i_0, \dots, i_q} \subset W_{i_0, \dots, i_q}$  ([3], § 4, p. 37). Ceci alourdit beaucoup la démonstration. Dans la suite de cet exposé, nous glisserons souvent sur ce genre de difficulté.

## 2. Espaces normés de cocycles.

Soient  $X$  un espace  $\mathbb{C}$ -analytique,  $\pi$  un morphisme propre de  $X$  dans un espace  $\mathbb{C}$ -analytique  $Y$  que nous supposerons être un ouvert de  $\mathbb{C}^m$ . Si  $\mathcal{U} = (U_i)$  et  $\mathcal{V} = (V_i)$  sont des recouvrements de Stein, indexés par le même ensemble fini, de  $X$ , on écrira  $\mathcal{V} \ll \mathcal{U}$  si la relation  $B' \subset B \subset Y$  entraîne pour tout indice  $i : V_i \cap \pi^{-1}(B') \subset U_i \cap \pi^{-1}(B) \subset X$ .

Soient donc  $\mathcal{V} \ll \mathcal{U}$ , et  $\mathfrak{F}$  un faisceau analytique cohérent sur  $X$ . Pour tout polycylindre  $B \subset Y$  de centre  $y_0 = 0$ , on posera  $X_B = \pi^{-1}(B)$ ,

$$C_g^q(X_B, \mathcal{U}; \mathfrak{F}) = \prod_{i_0, \dots, i_q} \Gamma_g(U_{i_0, \dots, i_q} \cap X_B; \mathfrak{F})$$

$$Z_g^q(X_B, \mathcal{U}; \mathfrak{F}) = C_g^q(X_B, \mathcal{U}; \mathfrak{F}) \cap Z^q(X_B, \mathcal{U}; \mathfrak{F})$$

$Z_g^q$  est un espace de Banach.  $B_g^q(X_B, \mathcal{U}, \mathcal{V}; \mathfrak{F})$  désignera le sous-espace vectoriel de  $Z_g^q(X_B, \mathcal{U}; \mathfrak{F})$  formé des cocycles dont la restriction au recouvrement  $\mathcal{V}$  est le cobord d'une cochaîne  $\beta \in C_g^{q-1}(X_B, \mathcal{V}; \mathfrak{F})$ .

Enfin on pose

$$H_g^q(X_B, \mathcal{U}, \mathcal{V}; \mathfrak{F}) = Z_g^q(X_B, \mathcal{U}; \mathfrak{F}) / B_g^q(X_B, \mathcal{U}, \mathcal{V}; \mathfrak{F})$$

Comme on ne sait pas a priori que  $B_g^q$  est un sous-espace fermé de  $Z_g^q$ , on ne sait pas que  $H_g^q$  est séparé (on le verra au paragraphe IV). Mais il est complet. GRAUERT parvient à démontrer (sans montrer que les  $H_g^q$  sont séparés !) le résultat suivant :

PROPOSITION 1 ([3], § 4, Lerayschensatz 8, p. 45). -- Soient  $\mathcal{V} \ll \mathcal{U} \ll \mathcal{U} \ll \mathcal{U}_0$  des recouvrements de Stein de  $X$ .

Alors, pour tout polycylindre  $B$  suffisamment petit de centre  $y_0$ , on a un homomorphisme d'espaces vectoriels semi-normés :

$$H_g^q(X_B, \mathcal{U}, \mathcal{V}; \mathfrak{F}) = H_g^q(X_B, \mathcal{U}', \mathcal{V}; \mathfrak{F})$$

La démonstration fait intervenir  $4q + 4$  recouvrements plus fins l'un que l'autre !

## II. Énoncé et réductions des résultats.

### 1. Énoncé du théorème.

Si  $X$  et  $Y$  sont des espaces analytiques,  $\pi : X \rightarrow Y$  un morphisme,  $\mathfrak{F}$  un faisceau analytique sur  $X$ , le faisceau  $\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}$  est, par définition, le faisceau analytique sur  $Y$  associé au préfaisceau  $U \rightarrow H^q(\pi^{-1}(U); \mathfrak{F})$ .

THÉORÈME FONDAMENTAL. -- Soit  $\pi : X \rightarrow Y$  un morphisme propre d'espaces  $\mathbb{C}$ -analytiques. Pour tout faisceau  $\mathfrak{F}$  analytique cohérent sur  $X$ , les faisceaux  $\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}$  sont des faisceaux analytiques cohérents sur  $Y$ .

2. Premières réductions.

Le théorème étant de nature locale par rapport à  $Y$ , et tout point de  $Y$  ayant un voisinage isomorphe à un sous-espace analytique fermé d'un polycylindre, il suffit de démontrer le théorème fondamental dans le cas où  $Y = B_0 \times D$  est un polycylindre de  $\underline{C}^m$ ,  $B_0$  étant un polycylindre de  $\underline{C}^{m-1}$  et  $D$  un disque de  $\underline{C}$ . On pourra de plus remplacer le polycylindre  $B = B_0 \times D$  par un polycylindre plus petit  $B'$  de même centre  $y_0$ .

Pour tout sous-espace analytique localement fermé  $A \subset B$ , on posera  $X_A = \pi^{-1}(A)$ , et on écrira  $X_0$  au lieu de  $X_{B \times 0}$ .

La démonstration se fera par récurrence sur  $m$  <sup>(1)</sup>. On appliquera donc en particulier les résultats énoncés dans ce paragraphe au faisceau  $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F} \otimes \mathcal{O}_{X_0}$  sur  $X_0$ . On fera (§ IV et § V), à l'intérieur de cette récurrence, une récurrence descendante sur  $q$ .

$B$  étant un polycylindre, donc une variété de Stein, la suite spectrale

$$H^*(B; \mathcal{R}^* \pi \mathfrak{F}) \implies H^*(X; \mathfrak{F})$$

dégénère, et  $H^q(X; \mathfrak{F}) = \Gamma(B; \mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F})$ . On aura également, au moins pour  $B' \subset B$  suffisamment petit (Théorème 2 ci-dessous) :

$$H_g^q(X_{B'}; \mathfrak{F}) = \Gamma_g(B'; \mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}) .$$

3. Réduction au cas "sans h-torsion".

Soit  $h$  la projection de  $B = B_0 \times D$  sur  $D$ , considérée comme un élément de  $\Gamma(B; \mathcal{O})$  ou de  $\Gamma(X; \mathcal{O})$ .

Il suffit de démontrer le théorème dans le cas où  $\mathfrak{F}$  est sans  $h$ -torsion, c'est-à-dire quand l'application, définie par la multiplication par  $h \circ \pi$  et qu'on note encore  $h: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ , est injective. En effet, si  $\mathfrak{F}$  est un faisceau analytique cohérent quelconque, le sous-faisceau  $\mathfrak{F}' = \bigcup_{\mathcal{R}} \text{Ker } h^{\mathcal{R}}: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$  est un sous-faisceau analytique cohérent de  $\mathfrak{F}$ , car la réunion d'une famille filtrante croissante de sous-faisceaux cohérents d'un faisceau analytique cohérent est cohérente, et le faisceau  $\mathfrak{F}'' = \mathfrak{F}/\mathfrak{F}'$  est sans  $h$ -torsion. La suite exacte

<sup>(1)</sup> Le cas  $m = 0$  n'est autre que le théorème de finitude de Cartan-Serre [2].

$$0 \rightarrow \mathfrak{F}' \rightarrow \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'' \rightarrow 0$$

donne naissance à la suite exacte

$$\mathcal{R}^{q-1} \pi \mathfrak{F}'' \rightarrow \mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}' \rightarrow \mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}'' \rightarrow \mathcal{R}^{q+1} \pi \mathfrak{F}'$$

de faisceaux sur  $B$ , et la cohérence de  $\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}$  résultera de la cohérence des quatre autres. La cohérence de  $\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}'$  résultera de l'hypothèse de récurrence sur la dimension de  $B$ , car  $\mathfrak{F}'$  admet une suite de composition formée de faisceaux analytiques cohérents sur  $X_0$ . Il suffit donc de démontrer la cohérence de  $\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}''$ .

Remarquons que si  $h : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$  est injective, l'application  $h - a : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$  est également injective sur  $X_{B'}$ ,  $B' \subset B$  relativement compact donné, pourvu que la constante  $a \in \mathbb{C}$  soit suffisamment petite.

On pourra donc supposer dans la suite que  $\mathfrak{F}$  est sans  $(h - a)$ -torsion pour tout  $a$ .

### III. Le type fini des fibres de $\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}$ .

1. THÉORÈME 1. - La fibre  $(\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F})_{y_0}$  est un  $\mathcal{O}_{y_0}$ -module de type fini.

On supposera que  $y_0$  est le centre du polycylindre  $B = B_0 \times D$ , et que  $\mathfrak{F}$  est sans  $h$ -torsion. Posons

$$\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F} \otimes \mathcal{O}(X_0) = \mathfrak{F}/h\mathfrak{F} \quad .$$

C'est un faisceau analytique cohérent sur  $X_0$ , et par hypothèse de récurrence  $\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}_0$  est un faisceau analytique cohérent sur  $B_0$ . L'application  $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}_0$  donne naissance à une application  $\varepsilon : \mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}_0$ , qui n'est pas surjective en général, mais le module  $(\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}_0)_{y_0}$  étant noethérien, il existe des éléments  $s_1, \dots, s_r \in (\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}_0)_{y_0}$  qui engendrent l'image par  $\varepsilon$  de  $(\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F})_{y_0}$ . On peut donc trouver  $B_1 = B_{1,0} \times D_1 \subset B$ , et des éléments  $\xi_1, \dots, \xi_r \in H_b^q(X_{B_1}; \mathfrak{F})$  qui ont pour image  $s_1, \dots, s_r$ .

Le théorème 1 peut maintenant s'énoncer sous la forme plus précise :

THÉOREME 1 bis ([3], § 6, lemma (\*), p. 54). — Soient  $\xi_1, \dots, \xi_r \in H_b^q(X_{B_1}; \mathfrak{F})$  des éléments dont les images dans  $(\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F})_{y_0}$  engendrent l'image par  $\varepsilon$  de  $(\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F})_{y_0}$ . Alors  $\xi_1, \dots, \xi_r$  engendrent  $(\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F})_{y_0}$ .

Plus précisément pour tout  $B' = B'_0 \times D' \subset B_1$ , tel que  $B'_0$  soit un voisinage privilégié assez petit de  $y_0$  dans  $B_0$  pour les sections  $s_1, \dots, s_r$  du faisceau  $\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}$  définies par  $\xi_1, \dots, \xi_r$ , il existe  $D'' \subset D'$  tel que tout élément  $\zeta \in H_g^q(X_{B' \times D''}, u, v; \mathfrak{F})$  se mette sur  $X_{B'_0 \times D''}$  sous la forme  $\zeta = \sum \varphi_i \xi_i$ , où  $\varphi_1, \dots, \varphi_r$  sont des fonctions holomorphes bornées sur  $B'' = B'_0 \times D''$ .

Par voisinage privilégié, nous entendons un voisinage  $B'_0$  de  $y_0$  tel que toute section bornée  $u$  de  $\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}$  sur  $B'_0$ , dont le germe au point  $y_0$  appartient au sous-module de  $(\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F})_{y_0}$  engendré par  $s_1, \dots, s_r$ , se mette sous la forme  $u = \sum \alpha_i s_i$  où  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  sont des fonctions holomorphes bornées sur  $B'_0$ . D'après un théorème de H. CARTAN ([1], ou [3], § 3, Satz 1, p. 25),  $y_0$  admet un système fondamental de tels voisinages. D'autre part, si  $B'_0$  est suffisamment petit,  $h\mathfrak{F}$  est un sous-faisceau de  $\mathfrak{F}$  sur  $X_{B'}$ .

2. Démonstration du théorème 1 bis.

Nous écrirons  $X', X'', \dots$  au lieu de  $X_{B'}, X_{B''}, \dots$

LEMME 1. — Soient  $\xi_1, \dots, \xi_r \in H_b^q(X_{B_1}; \mathfrak{F})$  et  $B' \subset B_1$  vérifiant les hypothèses du théorème 1 bis. Alors il existe un nombre réel  $c > 0$ , tel que tout élément  $\zeta \in H_g^q(X', u, v; \mathfrak{F})$  se mette sous la forme

$$\zeta = \sum_1^r a_i \xi_i + h\zeta_1, \quad ,$$

avec

$$a_i \in \Gamma_g(B'_0; 0), \quad \zeta_1 \in H_g^q(X', u, v; \mathfrak{F}),$$

et

$$\|\zeta_1\| \leq c \|\zeta\|, \quad \|a_i\| \leq c \|\zeta\| \quad .$$

DÉMONSTRATION du lemme. - Il résultera du théorème de Banach appliqué à la suite exacte d'espaces semi-normés complets :

$$H_g^q(X', u, v; \mathfrak{F}) \xrightarrow{h} H_g^q(X', u, v; \mathfrak{F}) \xrightarrow{\chi} H_g^q(X'_0; \mathfrak{F}_0) \quad .$$

En effet, soient  $u'$  et  $v'$  des recouvrements tels que  $v \ll v' \ll u' \ll u$  .

On a, par hypothèse de récurrence sur  $m$  :

$$H_g^q(X'_0, u, v; \mathfrak{F}_0) = H_g^q(X'_0, u, u'; \mathfrak{F}_0) = \Gamma_g(B'_0; \mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}_0) \quad .$$

Soit  $\zeta \in H_g^q(X', u, v; \mathfrak{F})$  un élément tel que  $\chi(\xi) = 0$  dans  $H_g^q(X'_0, u, v; \mathfrak{F}_0)$ , donc aussi dans  $H_g^q(X'_0, u, u'; \mathfrak{F}_0)$  . Si  $z \in Z_g^q(X', u; \mathfrak{F})$  est un cocycle représentant  $\zeta$ ,  $\chi(z)$  est de la forme  $\delta v$ , avec  $v \in Z_g^q(X'_0, u'; \mathfrak{F}_0)$ , et on peut relever  $v$  en un cocycle  $u \in Z_g^q(X', u'; \mathfrak{F})$  . On a alors  $z|_{u'} = \delta u + z'$ , avec  $\chi(z') = 0$  . Ceci entraîne que  $z'|_{v'} = h z_1$ , avec  $z_1 \in Z_g^q(X', v'; \mathfrak{F})$ , donc  $\zeta = h \zeta_1$ , avec  $\zeta_1 \in H_g^q(X', v', v; \mathfrak{F}) = H_g^q(X', u, v; \mathfrak{F})$  d'après la proposition 1, ce qui démontre le lemme.

DÉMONSTRATION du théorème à partir du lemme. - Soit  $\zeta \in H_g^q(X_{B'}; \mathfrak{F})$  . Écrivons

$$\begin{aligned} \zeta &= \sum a_0^i \xi_i + h \zeta_1 \\ \zeta_1 &= \sum a_1^i \xi_i + h \zeta_2 \\ &\vdots \\ \zeta_N &= \sum a_N^i \xi_i + h \zeta_{N+1} \end{aligned}$$

d'où

$$\zeta = \left( \sum_{1 \leq i \leq r} \left( \sum_{0 \leq n \leq N} a_n^i h^n \xi_i \right) \right) + h^{N+1} \zeta_{N+1} \quad \text{avec} \quad \|\zeta_{N+1}\| \leq c^{N+1} \|\zeta\| \quad .$$

Le reste  $h^{N+1} \zeta_{N+1}$  tend vers 0 à condition de se restreindre à un polycylindre  $B'_0 \times D''$  défini par  $|h| < \rho$ , avec  $\rho < \frac{1}{c}$  <sup>(2)</sup>. Dans un tel polycylindre, la

---

(2) C'est ici qu'on a besoin d'avoir des espaces de Banach.

série  $\sum a_n^i h^n$  définit une fonction holomorphe bornée  $\varphi_i$ , et on a  $\zeta = \sum \varphi_i \xi_i$ , à un élément de norme nulle près. Le calcul au niveau des cochaînes montre que cette égalité a lieu en fait exactement.

3. COROLLAIRE. - Il existe un voisinage  $B'_0$  de  $y_0$  dans  $B_0$ , qu'on peut supposer arbitrairement petit, tel que pour tout disque  $D' \subset D$ , il existe un disque  $D'' \subset D'$  tel que, en posant  $B' = B' \times D'$  et  $B'' = B'_0 \times D''$ , on ait

$$\text{Ker}(H_g^0(X_{B'}; \mathfrak{F}) \rightarrow H_g^1(X_{B''}; \mathfrak{F})) = \text{Ker}(H_g^1(X_{B'}; \mathfrak{F}) \rightarrow (\mathcal{R}^1 \pi \mathfrak{F})_{y_0}) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Considérons le  $\mathcal{O}_{y_0}$ -module des relations entre les  $\xi_i$  dans  $(\mathcal{R}^1 \pi \mathfrak{F})_{y_0}$ , i. e.

$$\text{Ker} : (\mathcal{O}_{y_0})^r \xrightarrow{(\xi_i)} \mathcal{R}^1 \pi \mathfrak{F} \quad .$$

Comme  $\mathcal{O}_{y_0}$  est un anneau noethérien, ce module admet un nombre fini de générateurs  $\eta_1, \dots, \eta_s$ , qui peuvent être réalisés comme des éléments de  $(\Gamma_b(B', \mathcal{O}))^r$  si  $B'$  est assez petit. De plus, si  $B'$  est assez petit,  $\eta_j((\xi_i)) = 0$  comme élément de  $H_g^1(X_{B'}; \mathfrak{F})$ . Supposons que  $B'' = B'_0 \times D''$  soit un voisinage privilégié aussi par rapport aux sections  $(\eta_j)$  de  $\mathcal{O}^r$ , alors si  $\zeta \in H_g^1(X_{B'}; \mathfrak{F})$  a une image nulle dans  $(\mathcal{R}^1 \pi \mathfrak{F})_{y_0}$ ,  $\zeta = \sum \varphi_i \xi_i$  sur  $X_{B''}$ , et les  $\varphi_i$  forment une relation entre les  $\xi_i$ , donc  $\varphi_i = \sum \alpha_j^i \eta_j$ , où les  $\alpha_j^i$  sont des fonctions holomorphes bornées sur  $B''$ . On en déduit que  $\zeta$  a déjà une image nulle dans  $H_b^1(X_{B''}; \mathfrak{F})$ .

C. Q. F. D.

#### IV. Le type fini du faisceau $\mathcal{R}^1 \pi \mathfrak{F}$ .

A partir de maintenant, nous commençons à démontrer le théorème fondamental et les théorèmes ci-dessous par récurrence descendante sur  $q$ . Pour  $q > \dim X$ ,  $\mathcal{R}^1 \pi \mathfrak{F} = 0$ , et le théorème est trivial. Nous supposons donc en particulier  $\mathcal{R}^{q+1} \pi \mathfrak{F}$  cohérent.

En reprenant les notations introduites dans la démonstration du corollaire du théorème 1 bis définissons un faisceau analytique cohérent  $\mathfrak{S}$  sur  $B' = B'_0 \times D'$  comme noyau de l'application  $\eta : \mathcal{O}^s \rightarrow \mathcal{O}^r$ . Les éléments  $(\xi_i)$  de  $H_b^1(X_{B'}; \mathfrak{F})$

définissent un homomorphisme  $\gamma : \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{R}^q \pi \mathfrak{S}$  de faisceaux analytiques sur  $B'$ . Par construction,  $\gamma$  est un isomorphisme sur les fibres au point  $y_0$ .

THÉORÈME 2. - Pour tout disque  $D''$  de centre 0 et de rayon  $\rho'' < \rho'$ , on a, en posant  $B'' = B'_0 \times D''$  :

$$H_g^q(X''', u, \gamma; \mathfrak{S}) = \Gamma_g(B''; \mathfrak{S}) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Soit  $z \in Z_g^q(X''', u; \mathfrak{S})$ . On peut mettre  $z$  sous forme d'une série :  $z = \sum (\frac{h}{\rho''})^k z_k$ , où les  $z_k$  sont des cochaînes de  $\mathcal{C}_g^q(X', u; \mathfrak{S})$ , avec  $\|z_k\|$  borné indépendamment de  $k$ .

LEMME 2. - Si  $u' \ll u$ , on peut également mettre  $z|_{u'}$  sous forme d'une série  $\sum (\frac{h}{\rho''})^k z_k'$ , où les  $z_k'$  sont cocycles de  $Z_g^q(X', u'; \mathfrak{S})$ , avec  $\|z_k'\|$  borné indépendamment de  $k$ .

DÉMONSTRATION du lemme ([3], p. 52 et p. 53). - Écrivons

$$z = \sum (\frac{h}{\rho''})^k z_k = \sum_0^{N-1} (\frac{h}{\rho''})^k z_k + (\frac{h}{\rho''})^N \sum (\frac{h}{\rho''})^k z_{N+k} \quad .$$

Posons

$$u_N = \sum_{k < N} (\frac{h}{\rho''})^k z_k \in \mathcal{C}_g^q(X', u; \mathfrak{S})$$

$$v_N = \sum (\frac{h}{\rho''})^k z_{N+k} \in \mathcal{C}_g^0(X''', u; \mathfrak{S}) \quad .$$

On a :

$$-\delta u_N|_{X'''} = (\frac{h}{\rho''})^N \delta v_N \quad .$$

Soit  $y_N \in Z^{q+1}(X', u; \mathfrak{S})$  le cocycle obtenu en recollant sur  $X''' - X'_0$  les cocycles  $-(\frac{\rho''}{h})^N \delta u_N$  et  $\delta v_N$ . La section du faisceau  $\mathcal{R}^{q+1} \pi \mathfrak{S}$  définie par  $y_N$  est nulle sur  $B''$  puisque  $y_N|_y$  est le cobord de  $v_N$ . Elle est donc nulle sur  $B'$ , si on a pris soin de choisir  $B'$  privilégié pour le faisceau cohérent  $\mathcal{R}^{q+1} \pi \mathfrak{S}$ , et, d'après le théorème 2 appliqué en degré  $q + 1$ , on peut écrire  $y_N = \delta w_N$ , avec  $w_N \in \mathcal{C}^q(X', u'; \mathfrak{S})$ . En posant  $z_k' = z_k - w_k + \frac{h}{\rho''} w_{k+1}$ ,

on voit que  $z'_k$  est un cocycle. Cherchons à majorer sa norme. On a

$$u_N = \left(\frac{\rho'}{\rho''}\right)^{N-1} \sum_{k < N} \left(\frac{h}{\rho''}\right)^k \left(\frac{\rho''}{\rho'}\right)^{N-1-k} z'_k$$

d'où

$$\|u_N\| \leq \left(\frac{\rho'}{\rho''}\right)^{N-1} \frac{\rho'}{\rho' - \rho''} \|z\| = \left(\frac{\rho'}{\rho''}\right)^N \frac{\rho''}{\rho' - \rho''} \|z\| \quad .$$

On en déduit :

$$\|\delta u_N\| \leq (q + 1) \left(\frac{\rho'}{\rho''}\right)^N \frac{\rho''}{\rho' - \rho''} \|z\|$$

et

$$\|y_N\| \leq (q + 1) \frac{\rho''}{\rho' - \rho''} \|z\|$$

(par application du principe du maximum).

On peut donc choisir  $w_N$  tel que  $\|w_N\| \leq c \|z\|$ , avec une certaine constante  $c$  indépendante de  $N$ . Ceci montre bien que les cocycles  $z'_k$  sont bornés en norme dans leur ensemble. Il en résulte que la série  $\sum \left(\frac{h}{\rho''}\right)^k z'_k$  converge sur  $X''$  vers  $z$ , ce qui démontre le lemme.

DEMONSTRATION du théorème à partir du lemme. - Soit  $z \in Z^q_g(X''', \mathcal{U}; \mathfrak{F})$ , on peut mettre  $z$  sous la forme d'une série de cocycles :  $z = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{h}{\rho''}\right)^k z'_k$ , avec  $z'_k \in Z^q_g(X', \mathcal{U}'; \mathfrak{F})$ , et chaque  $z'_k$  se met sur  $X''$  sous la forme

$$z'_k = \sum \varphi_k^i \xi_i, \quad \varphi_k^i \in \Gamma_g(B''; \mathcal{O}) \quad .$$

On a donc  $z = \sum \varphi_i \xi_i$  en posant  $\varphi_i = \sum \left(\frac{h}{\rho''}\right)^k \varphi_k^i$ . Comme les  $\varphi_k^i$  sont bornés dans  $\Gamma_g(B'', \mathcal{O})$ , les  $\varphi_i$  sont des éléments de  $\Gamma_g(B''; \mathcal{O})$ , et donnent naissance à un élément de  $\Gamma_g(B''; \mathfrak{S})$ . Cet élément est bien déterminé, car on connaît son germe à l'origine (on suppose  $B''$  privilégié pour le faisceau  $\mathfrak{S}$ ). L'application en sens inverse  $\Gamma_g(B''; \mathfrak{S}) \rightarrow H^q_g(X''', \mathcal{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$  se définit à partir des  $\xi_i$ , et on a ainsi un isomorphisme qui démontre le théorème 2. Cet isomorphisme préserve la topologie : on voit en particulier que l'espace  $H^q_g(X'''; \mathfrak{F})$  est séparé.

THÉORÈME 3. - L'homomorphisme  $\gamma : \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{R}^q \pi \mathfrak{S}$  est surjectif au voisinage de  $y_0$ .  
En particulier le faisceau analytique  $\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{S}$  est de type fini.

Pour toute constante  $a \in \mathbb{C}$ , soit  $B_a \subset B$  le sous-espace analytique fermé des  $y$  tels que  $h(y) = a$ , posons  $X_a = \pi^{-1}(B_a)$ , et  $\mathfrak{S}_a = \mathfrak{S} \otimes \mathcal{O}(X_a) = \mathfrak{S}/(h - a) \mathfrak{S}$ .

LEMME 3. - Soit  $B'' = B_0 \times D''$  un polycylindre tel qu'on puisse appliquer le corollaire du théorème 1 bis en degrés  $q$  et  $q + 1$ . Alors pour tout  $y \in B''$ , l'image de  $H_g^q(X''; \mathfrak{S})$  dans  $(\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{S}_{h(y)})_y$  engendre comme  $\mathcal{O}_y(X_{h(y)})$ -module l'image de  $(\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{S})_y$  dans  $(\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{S}_{h(y)})_y$ .

DÉMONSTRATION du lemme. -

a. Cas  $h(y) = 0$ . - La suite exacte

$$0 \rightarrow \mathfrak{S} \xrightarrow{h} \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}_0 \rightarrow 0$$

donne naissance à la suite exacte

$$\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{R}^q \pi \mathfrak{S}_0 \xrightarrow{\delta} \mathcal{R}^{q+1} \pi \mathfrak{S}$$

de faisceaux sur  $B$ . Le faisceau  $\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{S}_0$  est cohérent par hypothèse de récurrence sur  $m$ , et  $\mathcal{R}^{q+1} \pi \mathfrak{S}$  par hypothèse de récurrence descendante sur  $q$ . Il en résulte que le faisceau  $\mathfrak{S}_0$  image de  $\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{S}$  dans  $\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{S}_0$ , qui est le noyau de  $\delta_1$  est cohérent. Les sections définies par  $\xi_1, \dots, \xi_r$  engendrent  $\Gamma_g(B'_0, \mathfrak{S}_0)$ , donc chaque fibre de  $\mathfrak{S}_0$  aux points  $y \in B'_0$  d'après le théorème A de H. CARTAN appliqué à  $B'_0$  qui est relativement compact dans un ouvert de Stein.

b. Cas  $h(y) \neq 0$ . - Pour la même raison, le faisceau  $\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{S}_{h(y)}$  est cohérent. On va montrer que l'application :

$$H_g^q(X''; \mathfrak{S}) \rightarrow H_g^q(X''; \mathfrak{S}_{h(y)}) = \Gamma_g(B''_{h(y)}; \mathcal{R}^q \pi \mathfrak{S}_{h(y)})$$

est surjective. Le lemme 2 s'en déduira en appliquant le théorème A de H. CARTAN au faisceau cohérent  $\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{S}_{h(y)}$ . Il suffit de montrer que, dans la suite exacte

$$H_g^q(X''; \mathfrak{S}) \rightarrow H_g^q(X''; \mathfrak{S}_{h(y)}) \xrightarrow{\delta} H_g^q(X''; \mathfrak{S}) \quad ,$$

$\delta$  est nulle. Or on a

$$H_g^q(X'' ; \mathfrak{F}_{h(y)}) = H_g^q(X' ; \mathfrak{F}_{h(y)}) \quad ,$$

donc  $\delta$  se factorise à travers  $H^{q+1}(X' ; \mathfrak{F})$  et pour montrer que  $\delta\alpha = 0$  dans  $H^{q+1}(X'' ; \mathfrak{F})$ , il suffit de démontrer que son image est nulle dans  $(\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F})_{y_0}$ .

Mais pour tout  $\alpha \in H_g^q(X'' ; \mathfrak{F}_{h(y)})$ , on a

$$(h - h(y)) \alpha = 0 \quad ,$$

d'où

$$(h - h(y)) \delta\alpha = 0 \quad .$$

Comme  $(h - h(y))$  est inversible dans  $\mathcal{O}_{y_0}$ , on en déduit que

$$\delta\alpha = 0 \quad .$$

C. Q. F. D.

**DÉMONSTRATION** du théorème à partir du lemme. — Nous allons montrer maintenant que les sections de  $\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}$  définies par les éléments  $\xi_1, \dots, \xi_r$  choisis au paragraphe précédent engendrent le faisceau  $\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}$  au voisinage de  $y_0$ . L'application

$$\gamma_a : \Gamma_g(B'' , \mathcal{O})^r \oplus H_g^q(X'' ; \mathfrak{F}) \rightarrow H_g^q(X'' ; \mathfrak{F})$$

définie par  $\gamma_a(\varphi_1, \dots, \varphi_r, \zeta) = \sum \varphi_i \xi_i + (h - a) \zeta$  est surjective pour  $a = 0$ , donc aussi pour  $a < \rho$  suffisamment petit en vertu d'un corollaire du théorème de Banach. Donc, pour  $a < \rho$ , les  $\xi_i$  engendrent  $H_g^q(X'' ; \mathfrak{F}) / \text{Im}(h - a)$ , donc engendrent aussi, d'après le lemme 2, l'image de  $(\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F})_y$  dans  $(\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}_{h(y)})_y$  pour tout point  $y$  tel que  $h(y) = a$ . En appliquant le théorème 1 bis, on en déduit que les  $\xi_i$  engendrent la fibre  $(\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F})_y$  pour tout point  $y$  tel que  $h(y) < \rho$ .

C. Q. F. D.

V. Le type fini des relations.

Pour démontrer le théorème fondamental, il reste à montrer :

THÉORÈME 3. - L'homomorphisme  $\gamma$  défini plus haut est injectif sur  $B''$ .

Définissons les faisceaux  $\mathfrak{F}_a^n$  sur  $X$  et  $\mathfrak{G}_a^n$  sur  $B$  par les suites exactes :

$$0 \rightarrow \mathfrak{F} \xrightarrow{(h-a)^n} \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}_a^n \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathfrak{G} \xrightarrow{(h-a)^n} \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}_a^n \rightarrow 0 \quad .$$

LEMME 3. - Si  $a \in D''$ , l'homomorphisme  $\gamma_a^n : \mathfrak{G}_a^n \rightarrow \mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}_a^n$  induit par  $\gamma$  est injectif sur  $B''$ .

DÉMONSTRATION. - Le faisceau  $\mathfrak{F}_a^n$  admet une suite de composition formée de faisceaux analytiques cohérents sur  $X_a$ , donc  $\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}_a^n$  est un faisceau analytique cohérent sur  $B$  par hypothèse de récurrence sur la dimension  $m$  de  $B$ . Le faisceau  $\mathfrak{G}_a^n$  étant également cohérent, il suffit de montrer que

$$\gamma_a^n : \Gamma_g(B'' ; \mathfrak{G}_a^n) \rightarrow \Gamma_g(B'' ; \mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}_a^n)$$

est injectif.

Or, toujours en vertu de l'hypothèse de récurrence sur  $m$ ,

$$\Gamma_g(B'' ; \mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F}_a^n) = H_g^q(X'' ; \mathfrak{F}_a^n) \quad .$$

Soit  $u \in \Gamma_g(B'' ; \mathfrak{G}_a^n) = \Gamma_g(B' ; \mathfrak{F}_a^n)$  tel que  $\gamma_a^n(u) = 0$  dans  $H_g^q(X' ; \mathfrak{F}_a^n)$ . Comme  $B'$  est un espace de Stein, la section  $u$  peut se relever en  $v \in \Gamma_g(B' ; \mathfrak{G})$ , et  $\gamma(v) \in H_g^q(X' ; \mathfrak{F})$  a une image nulle dans  $H_g^q(X' ; \mathfrak{F}_a^n)$  et la suite exacte

$$H_g^q(X' ; \mathfrak{F}) \xrightarrow{(h-a)^n} H_g^q(X' ; \mathfrak{F}) \rightarrow H_g^q(X' ; \mathfrak{F}_a^n)$$

montre que  $v = (h-a)^n w$  pour un certain  $w \in H_g^q(X' ; \mathfrak{F})$ .

D'après le théorème 1 bis, la restriction de  $w$  à  $X''$  est de la forme  $\gamma(w')$ ,  $w' \in \Gamma_g(B'' , \mathfrak{G})$ . Maintenant  $v|_{B''}$  et  $(h-a)^n w'$  sont deux sections de  $\mathfrak{G}$  sur  $B''$  qui ont même image  $(h-a)^n \gamma(v)$  dans  $H_g^q(X'' ; \mathfrak{F})$  n donc aussi dans  $(\mathcal{R}^q \pi \mathfrak{F})_{y_0} = \mathfrak{G}_{y_0}$ . Comme  $B''$  est un voisinage privilégié de  $y_0$  pour les relations

entre les sections de  $\mathfrak{S}$ , ceci entraîne  $v|B'' = (h - a)^n w'$ , donc  $v|B''$  a une image nulle dans  $\Gamma_g(B''; \frac{n}{a})$ , d'où  $u = 0$ , ce qui démontre le lemme 3.

DÉMONSTRATION du théorème 3. - Soient  $y \in B''$  et  $u \in \mathfrak{S}_y$ . Si  $\gamma(u) \in (\mathfrak{K}^n \pi \mathfrak{S})_y$  est nul, son image dans  $(\mathfrak{K}^n \pi \mathfrak{S}_{h(y)}^n)$  est nulle pour tout  $n$ , et ceci entraîne d'après le lemme 2 que  $u$  a une image nulle dans  $(\mathfrak{S}_{h(y)}^n)_y$  pour tout  $n$ . On en déduit que  $u$  est nul, car  $\mathfrak{S}$  est cohérent (théorème d'Artin-Krull). Ceci achève la démonstration du théorème 3 et du théorème fondamental.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARTAN (Henri). - Idéaux de fonctions analytiques de  $n$ -variables complexes, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 61, 1944, p. 149-197.
- [2] CARTAN (Henri). - Un théorème de finitude, Séminaire Cartan, t. 6, 1953/54, n° 17.
- [3] GRAUERT (Hans). - Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexen Strukturen. - Paris, Presses universitaires de France, 1960 (Institut des hautes Études scientifiques, Publications mathématiques, 54).

[2e rédaction : Juillet 1961]

