PIERRE CARTIER

Analyse spectrale et théorème de prédiction statistique de Wiener

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. nº 218, p. 197-218

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__197_0>

Séminaire BOURBAKI
13e année, 1960/61, n° 218

Mai 1961

ANALYSE SPECTRALE
ET THÉORÈME DE PRÉDICTION STATISTIQUE DE WIENER

par Pierre CARTIER

INTRODUCTION. - En 1941, WIENER [11] et KOLMOGOROFF [4] ont donné simultanément une réponse complète au problème de la "prédiction" des fonctions aléatoires stationnaires. Le problème est le suivant : étant donnée une fonction aléatoire stationnaire $\{X_t\}$ (t variable réelle) et une valeur τ de la variable t , peut-on à l'aide des données statistiques sur les variables X_t , pour $t \leqslant \tau$, donner une estimation de la variable $X_{\tau+\nu}$ lorsque $\nu > 0$? Si l'on adopte la méthode usuelle des "moindres carrés", la question précédente se transpose ainsi dans le langage des espaces de Hilbert : si $\{U(t)\}$ est un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, et a un élément de $\mathfrak{H}$, le vecteur $U(\nu).a$ est-il dans le sous-espace fermé sous-tendu par les $U(t).a$ pour $t \leqslant 0$? Le théorème de Wiener-Kolmogoroff donne une réponse très précise au moyen de la transformée de Fourier de la fonction $t \to \langle a|U(t)|a\rangle$; plutôt que de faire un rapport sur tous les travaux suscités par le théorème de Wiener-Kolmogoroff, nous allons dans cet exposé montrer comment un certain nombre de résultats de théorie spectrale se groupent autour de la même idée, et comment on en déduit le théorème de Wiener-Kolmogoroff.

NOTATIONS.

G groupe topologique localement compact.

e élément neutre de G .

m mesure de Haar à gauche sur G .

Si f est une fonction sur G à valeur dans un ensemble quelconque E , et si x est dans G , on définit la fonction $x \star f$ par $(x \star f)(y) = f(x^{-1} y)$; on a alors $xx' \star f = x \star (x' \star f)$.

Si $\mathfrak{H}$ est un espace de Hilbert, on note I (ou quelquefois $I_{\mathfrak{H}}$) l'application identique de $\mathfrak{H}$; on note $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus (partout définis) dans $\mathfrak{H}$. Soit T dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$; l'adjoint de T est noté T^* ; de plus, pour a et b dans H , on note $\langle a|T|b\rangle$ le produit scalaire de a et de Tb ; cette expression est linéaire en b , antilinéaire en a , et l'on a $\langle a|T^*|b\rangle = \overline{\langle b|T|a\rangle}$. La norme dans $\mathfrak{H}$ est définie par $\|a\| = \langle a|a\rangle^{1/2}$.

Soient X un espace localement compact et μ une mesure de Radon positive sur X . Pour tout espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, on note $L^p_{\mathfrak{H}}(X, \mu)$ l'espace des classes de fonctions de puissance p-ième sommable pour la mesure μ à valeur dans $\mathfrak{H}$; lorsque $p = 2$, cet espace est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f|g\rangle = \int \langle f(x)|g(x)\rangle \, d\mu(x) \quad .$$

On omet $\mathfrak{H}$ dans la notation s'il est égal au corps $\underset{\sim}{C}$ des nombres complexes, muni du produit scalaire $\bar{a}b$. Si X est le corps $\underset{\sim}{R}$ des nombres réels et si μ est la mesure usuelle, on omet X et μ dans la notation $L^p_{\mathfrak{H}}(X, \mu)$.

I. Rappels sur la théorie spectrale

1. Représentations unitaires.

Une <u>représentation unitaire</u> π de G dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ est un homomorphisme de G dans le groupe des opérateurs unitaires de $\mathfrak{H}$ qui satisfait aux conditions de continuité équivalentes :

a. <u>L'application</u> φ <u>de</u> $G \times \mathfrak{H}$ <u>dans</u> $\mathfrak{H}$ <u>définie par</u> $\varphi(x, a) = \pi(x).a$ <u>est continue</u>.

b. <u>Soit</u> $\mathfrak{D}$ <u>un sous-ensemble total de</u> $\mathfrak{H}$, <u>stable pour les opérateurs</u> $\pi(x)$. <u>Pour</u> a , b <u>dans</u> $\mathfrak{D}$, <u>on a</u>

$$\lim_{x \to e} \langle a|\pi(x)|b\rangle = \langle a|b\rangle \quad .$$

Lorsque l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ admet une base orthonormale dénombrable, les conditions précédentes sont encore équivalentes à la suivante :

c. <u>Soit</u> $\mathfrak{D}$ <u>un sous-ensemble total de</u> $\mathfrak{H}$. <u>Pour</u> a , b <u>dans</u> $\mathfrak{D}$, <u>la fonction</u> $x \to \langle a|\pi(x)|b\rangle$ <u>sur</u> G <u>est mesurable pour la mesure</u> m .

Un vecteur a est appelé un <u>générateur</u> de la représentation π si les combinaisons linéaires des vecteurs $\pi(x).a$ sont denses dans $\mathfrak{H}$; si tout vecteur non nul de $\mathfrak{H}$ est un générateur, on dit que la représentation π est <u>irréductible</u>. Si π est irréductible, tout opérateur dans $\mathfrak{H}$ qui commute aux $\pi(x)$ est scalaire.

On dit qu'une fonction continue φ sur G est <u>de type positif</u> si l'on a les inégalités :

$$\sum_{i,j} \bar{\lambda}_i \lambda_j \varphi(x_i^{-1} x_j) \geq 0 \tag{1}$$

quels que soient les scalaires λ_i et les éléments x_i de G en nombre fini. Pour que φ soit de type positif, il faut et suffit qu'il existe une représentation unitaire π de G dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ et un générateur a de π tels que :

$$\varphi(x) = \langle a | \pi(x) | a \rangle \quad . \tag{2}$$

La fonction φ définit π et a à un isomorphisme près. On dit que la fonction de type positif φ est élémentaire si elle est de la forme (2), avec $\|a\| = 1$, et π irréductible. L'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions de type positif φ, telles que $\varphi(e) \leq 1$, est convexe, et ses points extrémaux sont 0 et les fonctions de type positif élémentaires.

2. <u>Mesures spectrales</u>.

Soit X un espace localement compact. Les fonctions continues (complexes) à support compact sur X forment une algèbre $\mathcal{K}(X)$ (sans élément unité si X n'est pas compact). Il existe un plus petit espace de fonctions sur X qui contienne les fonctions semi-continues inférieurement et qui, avec toute suite f_n majorée en tout point, contienne aussi leur enveloppe supérieure ; les éléments de cet espace s'appellent les fonctions boréliennes sur X ; un sous-ensemble de X est dit borélien si sa fonction caractéristique est borélienne.

Toute fonction borélienne bornée est limite uniforme de combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques d'ensembles boréliens. Une fonction borélienne est mesurable pour toute mesure de Radon μ sur X ; réciproquement, toute fonction μ-mesurable est égale localement presque partout à une fonction borélienne. Pour la norme $\|f\| = \sup_x |f(x)|$, l'ensemble $\mathcal{B}(X)$ des fonctions boréliennes et bornées est une algèbre normée complète.

Une <u>mesure spectrale</u> P sur X à valeur dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ est un homomorphisme d'algèbres de $\mathcal{K}(X)$ dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ vérifiant les identités :

$$P_{\bar{f}} = P_f^*, \qquad \|P_f\| \leq \|f\| \tag{3}$$

et tel que l'intersection des noyaux des P_f soit réduite à 0. La mesure spectrale P se prolonge de manière unique en un homomorphisme de $\mathcal{B}(X)$ dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ (noté encore P) continu au sens suivant :

a. Si des fonctions semi-continues inférieurement f_α sont uniformément bornées et ont f pour enveloppe supérieure, on a :

$$\langle a|P_f|a\rangle = \sup_\alpha \langle a|P_{f_\alpha}|a\rangle \tag{4}$$

pour tout a dans $\mathfrak{H}$.

b. Si des fonctions boréliennes et bornées f_n ont pour limite en tout point une fonction $f \in \mathcal{B}(X)$, on a :

$$P_f\, a = \lim_{n\to\infty} P_{f_n}\, a \tag{5}$$

pour tout a dans $\mathfrak{H}$.

Les identités (3) sont encore satisfaites pour f dans $\mathcal{B}(X)$; et P_1 est l'opérateur identique dans $\mathcal{H}$.

Si f est la fonction caractéristique d'un sous-ensemble borélien A de X, l'opérateur P_f est le projecteur orthogonal sur un sous-espace fermé $H(A)$ de $\mathfrak{H}$; on a les relations suivantes :

a. Si $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, on a $H(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} H(A_n)$

b. Si U est réunion d'ouverts U_α, alors $H(U)$ est le plus petit sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ contenant les $H(U_\alpha)$.

c. Si A et B sont disjoints, alors $H(A)$ et $H(B)$ sont orthogonaux et $H(A) + H(B) = H(A \cup B)$.

d. $H(X) = \mathfrak{H}$, $H(\emptyset) = 0$.

Toute fonction qui, à tout sous-ensemble borélien A de X, associe un sous-espace $H(A)$ de $\mathfrak{H}$, et qui vérifie les relations précédentes provient d'une mesure spectrale unique.

On peut énoncer un théorème de structure pour les mesures spectrales : l'espace $\mathfrak{H}$ est somme directe de sous-espaces orthogonaux $\mathfrak{H}_\alpha$ tels que, pour chaque α, il existe une mesure de Radon positive μ_α sur X et une isométrie U_α de

$L^2(X, \mu_\alpha)$ sur $\mathfrak{H}_\alpha$ vérifiant la relation $U_\alpha(f.g) = P_f\, U_\alpha(g)$ pour $g \in L^2(X, \mu_\alpha)$ et $f \in \mathcal{B}(X)$.

3. Théorie spectrale des groupes commutatifs.

On suppose le groupe G commutatif. Les fonctions de type positif élémentaires sur G sont les homomorphismes continus de G dans le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 . L'ensemble de ces homomorphismes sera muni de la loi de composition définie par la multiplication des fonctions et de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts ; c'est alors un groupe localement compact $\hat{G}$, le dual de G . Si l'on associe à tout x dans G la fonction $\chi \to \chi(x)$ sur $\hat{G}$, on définit un isomorphisme de G sur le dual de $\hat{G}$. Si l'on fait correspondre à tout nombre réel λ la fonction $e_\lambda : s \to e^{2\pi i \lambda s}$ sur $\mathbb{R}$, on définit un isomorphisme du groupe $\mathbb{R}$ sur son groupe dual.

Les fonctions de type positif φ sur G avec $\varphi(e) \leq 1$, forment un ensemble convexe, qui est compact pour la topologie induite par la topologie faible du dual de l'espace de Banach $L^1(G, m)$; par application du théorème de Krein-Milman, on en déduit le théorème de Bochner :

Les fonctions de type positif sur G sont les fonctions de la forme :

(6) $$\varphi(x) = \int_{\hat{G}} \chi(x)\, d\mu(\chi) \qquad x \in G$$

où μ parcourt l'ensemble des mesures positives bornées sur $\hat{G}$; la mesure μ vérifiant (6) est uniquement déterminée par φ .

Soit π une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$; pour tout x dans G , on notera $\hat{x}$ la fonction $\chi \to \chi(x)$ sur $\hat{G}$. Le théorème de Bochner implique facilement le théorème d'Ambrose :

Il existe sur $\hat{G}$ une mesure spectrale P à valeur dans $\mathfrak{H}$ et une seule pour laquelle on ait $P_{\hat{x}} = \pi(x)$ pour tout x dans G .

Supposons que la représentation π admette un générateur a . Il existe alors une mesure de Radon positive bornée μ sur $\hat{G}$ et une isométrie U de $L^2(\hat{G}, \mu)$ sur $\mathfrak{H}$ telle que :

(7) $$U(\hat{x}.g) = \pi(x).U(g) \qquad U(1) = a \quad .$$

De plus, ces conditions déterminent μ et U de manière unique et l'on a $U(f.g) = P_f\, U(g)$ par $f \in \mathcal{B}(\hat{G})$ et $g \in L^2(\hat{G}, \mu)$. Dans ces conditions, pour tout sous-espace $\mathfrak{K}$ de $\mathfrak{H}$, stable par les $\pi(x)$ il existe un sous-ensemble borélien E de $\hat{G}$, défini à un ensemble localement négligeable près, tel que P_f soit le projecteur orthogonal de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{K}$ si f est la fonction caractéristique de E.

4. Décompositions de l'identité.

Soit $\mathfrak{H}$ un espace de Hilbert. Nous considérerons des opérateurs linéaires définis dans un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{H}$ et à valeur dans $\mathfrak{H}$; le sous-espace de définition de l'opérateur A sera noté $\mathfrak{D}(A)$, et l'ensemble des vecteurs Aa pour $a \in \mathfrak{D}(A)$ est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{I}(A)$ de $\mathfrak{H}$. Si A et B sont deux opérateurs, on écrit $A \subset B$, si le graphe de A est contenu dans celui de B ; on note $A + B$ l'opérateur défini sur $\mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)$ par $(A + B).a = A.a + B.a$, et BA l'opérateur défini sur $\mathfrak{D}(A) \cap A^{-1}(\mathfrak{D}(B))$ par $(BA).a = B(A.a)$. Si $A.a = 0$ implique $a = 0$, alors A est une bijection de $\mathfrak{D}(A)$ sur $\mathfrak{I}(A)$, et l'opérateur A^{-1} est la bijection réciproque de $\mathfrak{I}(A)$ sur $\mathfrak{D}(A)$. Parmi les opérateurs A', tels que l'on ait $\langle Aa|a'\rangle = \langle a|A'a'\rangle$ pour $a \in \mathfrak{D}(A)$ et $a' \in \mathfrak{D}(A')$, il en existe un qui contient tous les autres, l'adjoint A^* de A ; si $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(A^*) = \mathfrak{H}$, alors A appartient à $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$; on dit que A est autoadjoint si $A = A^*$; s'il en est ainsi, pour tout nombre complexe p non réel, l'opérateur $A - p.I$ admet un inverse, la résolvante $R(p)$ de A, qui appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Une décomposition de l'identité est une application E de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des projecteurs orthogonaux de $\mathfrak{H}$ telle que pour tout a dans $\mathfrak{H}$, la fonction $\langle a|E(\lambda)|a\rangle$ sur $\mathbb{R}$ soit continue à gauche et croissante, et tende vers 0 (resp. $\langle a|a\rangle$) lorsque λ tend vers $-\infty$ (resp. $+\infty$). Si f est une fonction borélienne sur $\mathbb{R}$, il existe un opérateur $A = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, dE(\lambda)$ dont le domaine de définition se compose des a tels que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2\, d\langle a|E(\lambda)|a\rangle$ soit fini (intégrale de Lebesgue-Stieltjes), et qui vérifie :

$$\langle a|A|b\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\langle a|E(\lambda)|b\rangle \tag{8}$$

pour $a \in \mathfrak{H}$ et $b \in \mathfrak{D}(A)$. Il en résulte que $E(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\mu(\lambda)\, dE(\lambda)$ avec $\varphi_\mu(\lambda) = 1$ si $\lambda < \mu$, et $\varphi_\mu(\lambda) = 0$ si $\lambda \geq \mu$. De plus, l'adjoint de $\int f(\lambda)\, dE(\lambda)$ est $\int \overline{f(\lambda)}\, dE(\lambda)$, et si f ne s'annule pas, l'inverse de $\int f(\lambda)\, dE(\lambda)$ est $\int f(\lambda)^{-1}\, dE(\lambda)$.

Il existe des correspondances bijectives entre les décompositions de l'identité E, les mesures spectrales P sur $\underset{\sim}{R}$, les opérateurs autoadjoints A et les représentations unitaires U de $\underset{\sim}{R}$; ces correspondances s'expriment par les relations :

(9) $$P_f = \int f(\lambda)\, dE(\lambda) \ , \quad E(\lambda) = P_{\varphi_\lambda} \ , \quad f \in \mathcal{B}(\underset{\sim}{R}) \ , \quad \lambda \in \underset{\sim}{R}$$

(10) $$A = \int \lambda \, dE(\lambda)$$

(11) $$U(t) = \int e^{i\lambda t}\, dE(\lambda) \quad .$$

On dit que A est le <u>générateur infinitésimal</u> du groupe à un paramètre $\{U(t)\}$; en effet, $\mathcal{D}(A)$ est l'ensemble des a dans $\mathcal{H}$ pour lesquels $(U(t)a - a)/it$ a une limite pour t tendant vers 0, et l'on a :

(12) $$Aa = \lim_{t\to 0} (U(t).a - a)/it \quad .$$

La résolvante $\{R(p)\}$ de A apparaît comme la transformée de Laplace du groupe $\{U(t)\}$ d'après la formule :

(13) $$\langle a|R(p)|b\rangle = \begin{cases} -i\int_0^\infty e^{-ipt} \langle a|U(t)|b\rangle\, dt & \mathrm{Im}(p) < 0 \\ i\int_{-\infty}^0 e^{-ipt} \langle a|U(t)|b\rangle\, dt & \mathrm{Im}(p) > 0 \end{cases} \quad .$$

Lorsque $A = \int \lambda\, dE(\lambda)$, on pose $f(A) = \int f(\lambda)\, dE(\lambda)$ pour toute fonction borélienne f sur $\underset{\sim}{R}$; on peut écrire $U(t) = e^{itA}$ et $R(p) = 1/(A - p.I)$.

II. <u>Théorèmes de structure</u>.

5. <u>Systèmes d'imprimitivité</u> (Cf. [6]).

Le théorème que nous allons établir est un cas particulier de résultats de MACKEY sur les représentations induites ; la démonstration que nous donnons est une adaptation de raisonnements de von NEUMANN [7] et LOOMIS [5], qui évite les complications d'ensembles de mesure nulle propres à la théorie de l'intégration de Lebesgue.

THÉORÈME 1. - Soit π une représentation unitaire du groupe localement compact G dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, et soit P une mesure spectrale sur G à valeur dans $\mathfrak{H}$ vérifiant la relation :

$$P_{x\star f} = \pi(x).P_f.\pi(x)^{-1} \qquad x \in G, \quad f \in \mathcal{K}(G) \quad . \tag{14}$$

Il existe alors un espace de Hilbert $\mathfrak{L}$ et une isométrie U de $L^2_{\mathfrak{L}}(G, m)$ sur $\mathfrak{H}$ vérifiant les relations :

$$U(x \star g) = \pi(x).U(g) \qquad U(f.g) = P_f.U(g) \tag{15}$$

pour $x \in G$, $f \in \mathcal{B}(X)$ et $g \in L^2_{\mathfrak{L}}(G, m)$.

Soient a et b deux éléments de $\mathfrak{H}$. On considère un sous-ensemble compact K de G et l'ensemble compact L formé des $x.y^{-1}$ pour $x, y \in K$. Si h est une fonction continue sur $G \times G$, nulle en dehors de $K \times K$, nous poserons :

$$h_x(y) = h(xy, y) \quad . \tag{16}$$

Il est clair que h_x est continue, nulle en dehors de K, et que la fonction h_x est nulle si $x \notin L$. Comme $h_x \in \mathcal{K}(G)$, on peut définir une fonction φ sur G par la formule :

$$\varphi(x) = \langle a | \pi(x) P_{h_x} | b\rangle = \langle \pi(x)^{-1} a | P_{h_x} b\rangle \tag{17}$$

qui montre que φ est nulle en dehors de L. Par ailleurs, la fonction $h(xy, y)$ sur $G \times G$ est continue à support compact ; par suite, pour $x_0 \in G$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x_0 tel que $\|h_x - h_{x_0}\| < \varepsilon$ pour $x \in V$, d'où $\|P_{h_x} - P_{h_{x_0}}\| < \varepsilon$ dans les mêmes conditions. D'après la définition d'une représentation unitaire, on peut supposer V assez petit pour que l'on ait $\|\pi(x)^{-1}.a - \pi(x_0)^{-1}.a\| < \varepsilon$ pour $x \in V$; on en déduit :

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon \, \|a\| \, \|b\| (1 + \|h\|) \qquad x \in V$$

ce qui prouve que φ est continue, et finalement on a $\varphi \in \mathcal{K}(G)$. L'inégalité :

$$|m(\varphi)| \leq m(L)\|h\| \, \|a\| \, \|b\| \tag{18}$$

montre facilement qu'il existe une mesure $\nu_{a,b}$ sur $G \times G$ telle que :

$$\int_G \langle a|\pi(x).P_{h_x}|b\rangle \, dm(x) = \nu_{a,b}(h) \qquad h \in \mathcal{K}(G \times G) \quad . \tag{19}$$

De cette formule de définition des mesures $\nu_{a,b}$, on déduit facilement les cas particuliers suivants :

$$\int_{G\times G} u(xy^{-1}) \, v(y) \, d\nu_{a,b}(x , y) = \int_G \langle a|\pi(x).P_v|b\rangle \, u(x) \, dm(x) \tag{20}$$

$$\int_{G\times G} f(x) \, g(y) \, d\nu_{a,b}(x , y) = \int_G \langle a|P_f \, \pi(x)P_g|b\rangle \, dm(x) \tag{21}$$

Si $\nu_{a,b} = 0$, l'expression (20) est nulle quels que soient u et v dans $\mathcal{K}(G)$; la fonction continue $x \to \langle a|\pi(x).P_v|b\rangle$ est donc nulle pour tout v dans $\mathcal{K}(G)$; faisant $x = e$, on en déduit $\langle a|P_v|b\rangle = 0$ pour tout v dans $\mathcal{K}(G)$. Comme $P \neq 0$, l'une au moins des mesures $\nu_{a,b}$ est non nulle, et d'après les propriétés des mesures sur un espace produit, on peut trouver f , g , a , b tel que (21) soit non nul. On a donc démontré ce qui suit :

<u>Pour</u> f , g <u>dans</u> $\mathcal{K}(G)$, <u>il existe un opérateur linéaire continu</u> $A_{f,g}$ <u>dans</u> $\mathfrak{H}$ <u>tel que</u> :

$$\langle a|A_{f,g}|b\rangle = \int_G \langle a|P_f \pi(x) \, P_g|b\rangle \, dm(x) \qquad a , b \in \mathfrak{H} \tag{22}$$

<u>et l'un au moins des opérateurs</u> $A_{f,g}$ <u>n'est pas nul</u>.

On peut trouver b dans $\mathfrak{H}$ et g dans $\mathcal{K}(G)$ tels que l'application $U_o : f \to A_{f,g} \, b$ de $\mathcal{K}(G)$ dans $\mathfrak{H}$ soit non nulle ; des calculs faciles montrent que l'on a :

$$U_o(x \star f) = \pi(x).U_o(f) \; , \quad U_o(f'.f) = P_{f'}.U_o(f) \quad . \tag{23}$$

De plus, si l'on pose $\Lambda(f , f') = \langle U_o(f)|U_o(f')\rangle$, il est clair que Λ est une forme sesquilinéaire positive sur $\mathcal{K}(G)$ et d'après (23), Λ est invariante par les translations à gauche, et l'on a $\Lambda(ff' , f'') = \Lambda(f , \bar{f}'f'')$. Il en résulte facilement qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $\Lambda(f , f') = \lambda.m(\bar{f}f')$;

remplaçant b par $\lambda^{-1/2}.b$, on peut se ramener au cas où $\lambda = 1$; mais alors U_o se prolonge en une isométrie de $L^2(G, m)$ sur un sous-espace fermé de $\mathfrak{H}$, vérifiant encore les formules (23). Le théorème résulte facilement de là par récurrence transfinie.

C. Q. F. D.

6. Théorème de Stone-von Neumann.

En combinant le théorème 1 et le théorème d'Ambrose, on obtient immédiatement le résultat suivant :

THÉORÈME 2. - *Soient* G *un groupe localement compact commutatif,* $\hat{G}$ *son dual,* π *et* $\hat{\pi}$ *deux représentations unitaires de* G *et* $\hat{G}$ *respectivement, dans le même espace de Hilbert* $\mathfrak{H}$. *On suppose que l'on a :*

$$\pi(x).\hat{\pi}(\chi) = \chi(x)^{-1}.\hat{\pi}(\chi).\pi(x) \qquad x \in G , \quad \chi \in \hat{G} \quad . \tag{24}$$

Il existe alors un espace de Hilbert $\mathfrak{L}$ *et une isométrie* U *de* $L^2_{\mathfrak{L}}(G, m)$ *sur* $\mathfrak{H}$ *vérifiant les relations :*

$$U(x \star g) = \pi(x).U(g) \ , \quad U(\chi.g) = \hat{\pi}(\chi).U(g) \tag{25}$$

pour $x \in G$, $\chi \in \hat{G}$ *et* $g \in L^2_{\mathfrak{L}}(G, m)$.

Comme G est isomorphe au dual de $\hat{G}$, il existe une mesure spectrale unique P sur G à valeur dans $\mathfrak{H}$ telle que $P_{\chi} = \hat{\pi}(\chi)$ pour tout $\chi \in \hat{G}$. Pour tout x dans G , on définit une mesure spectrale Q sur G par $Q_f = \pi(x)^{-1}.P_{x\star f}.\pi(x)$; la formule (24) s'écrit alors $Q_{\chi} = P_{\chi}$ pour tout χ dans $\hat{G}$; on en déduit $Q = P$, c'est-à-dire que (14) est vérifiée. On peut alors appliquer le théorème 1.

C. Q. F. D.

Si l'on applique le théorème précédent à $G = \mathbb{R}$, en tenant compte de l'isomorphisme de $\mathbb{R}$ avec son dual, on obtient le théorème d'unicité de la représentation des relations de commutation d'Heisenberg, sous la forme "globale" que lui a donnée H. WEYL [10], et qui a été prouvé par STONNE [9] et von NEUMANN [7]. Nous allons maintenant passer à la forme "infinitésimale" du même résultat ; des variantes sont dues à RELLICH [8] et à DIXMIER [2].

THÉORÈME 3. - Soient P et Q deux opérateurs autoadjoints dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. On suppose que pour tout nombre complexe p non réel le domaine de $Q.(P - p.I)$ est contenu dans celui de PQ, et que l'on a :

$$PQ - QP \subset i.I \qquad (26)$$

Il existe alors un espace de Hilbert $\mathfrak{L}$ et une isométrie $\bar{U}$ de $L^2_{\mathfrak{L}}$ sur $\mathfrak{H}$ qui transforme en Q l'opérateur de multiplication par la fonction λ de la variable λ, et en P l'opérateur de dérivation $i\frac{d}{d\lambda}$.

Soient p un nombre complexe non réel et $a \in \mathcal{D}(Q)$. On note $R(p) = (P - p)^{-1}$ la résolvante de P ; si $b = R(p).a$, on a donc $b \in \mathcal{D}(P)$ et $a = P.b - p.b$. Il en résulte que b appartient au domaine de $Q.(P - p.I)$, donc à celui de PQ ; en particulier, on a $b \in \mathcal{D}(Q)$ et donc $P.b = a + p.b$ est aussi dans $\mathcal{D}(Q)$. On voit que PQb et QPb sont définis, et l'on peut appliquer la formule (26) qui donne :

$$(P - p.I).Q.b - Q.(P - p.I).b = i.b .$$

Si l'on applique l'opérateur $R(p)$ à cette identité, on trouve finalement la relation :

$$Q.R(p).a - R(p).Q.a = i.R(p)^2.a \qquad a \in \mathcal{D}(Q) \qquad (27)$$

Soit $\mathfrak{L}$ le graphe de Q ; c'est un sous-espace fermé de $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ et la formule (27) signifie qu'il est stable par les opérateurs $S(p)$ définis dans $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ par :

$$S(p)(a , b) = (R(p).a , iR(p)^2 a + R(p)b) \qquad (28)$$

Par ailleurs, on définit un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires dans $\mathfrak{H}$ par $U(t) = e^{itP}$, et un groupe à un paramètre d'opérateurs non unitaires $V(t)$ dans $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ par :

$$V(t)(a , b) = (U(t).a , tU(t).a + U(t).b) \qquad (29)$$

La formule $R(p)^2 = \frac{d}{dp} R(p)$ et l'identité (13) permettent d'établir la relation suivante :

$$(30) \qquad \langle u|S(p)|u'\rangle = \begin{cases} -i\int_0^\infty e^{-ipt}\langle u|V(t)|u'\rangle\, dt & \mathrm{Im}(p) < 0 \\ i\int_{-\infty}^0 e^{-ipt}\langle u|V(t)|u'\rangle\, dt & \mathrm{Im}(p) > 0 \end{cases}$$

pour u, u' dans $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. D'après les propriétés de la transformation de Laplace, l'espace $\mathfrak{L}$ est stable par les $V(t)$ puisqu'il est stable par les $S(p)$. Autrement dit, le graphe de $U(t)\, QU(t)^{-1}$, qui est le transformé de $\mathfrak{L}$ par l'opérateur $(a, b) \to (U(t).a, U(t).b)$, est égal au graphe de $Q - t$ qui est transformé de $\mathfrak{L}$ par l'opérateur $(a, b) \to (a, -t.a + b)$, et l'on a :

$$(31) \qquad U(t).Q.U(t)^{-1} = Q - t \quad .$$

Posons $\hat{U}(s) = e^{isQ}$; dans la formule (31), le membre de gauche est le générateur infinitésimal du groupe à un paramètre $s \to U(t).\hat{U}(s).U(t)^{-1}$ et celui de droite est le générateur infinitésimal du groupe à un paramètre $s \to e^{-its}.\hat{U}(s)$. De (31), on déduit donc la relation :

$$(32) \qquad U(t).\hat{U}(s) = e^{-its}\, \hat{U}(s).U(t) \quad .$$

On peut alors appliquer le théorème 2. Il existe un espace de Hilbert $\mathfrak{L}$ et une isométrie $\bar{U}$ de $L^2_{\mathfrak{L}}$ sur $\mathfrak{H}$ telle que $\bar{U}(t \star f) = U(t).\bar{U}f$ et $\bar{U}(e^{i\lambda s} f) = \hat{U}(s).\bar{U}f$. Par conséquent $\bar{U}^{-1} P\bar{U}$ est le générateur infinitésimal du groupe des translations dans $L^2_{\mathfrak{L}}$, c'est-à-dire $i\frac{d}{d\lambda}$, et il est immédiat que l'on a $\bar{U}(\lambda f) = Q.\bar{U}f$ pour toute fonction $f \in L^2_{\mathfrak{L}}$.

C. Q. F. D.

On pourrait traiter d'une manière analogue le cas des relations de commutation d'Heisenberg à plusieurs degrés de liberté.

7. Semi-groupes d'opérateurs isométriques (Cf. [1]).

Nous démontrerons d'abord un théorème de structure qui nous donnera la structure des semi-groupes, et qui sera aussi utilisé pour démontrer le théorème de Wiener-Kolmogoroff au numéro suivant.

THÉORÈME 4. - Soient $\mathfrak{H}$ un espace de Hilbert, $\{V(t)\}$ un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires dans $\mathfrak{H}$, et $\mathfrak{H}_0$ un sous-espace fermé de $\mathfrak{H}$ stable par les $V(t)$ pour $t \geqslant 0$. On notera $\mathfrak{H}_{-\infty}$ l'intersection des sous-espaces $V(t).\mathfrak{H}_0$ de $\mathfrak{H}$, et $\mathfrak{H}_\infty$ l'adhérence de leur réunion pour t parcourant $\underset{\sim}{R}$; enfin, on notera $\mathfrak{H}'$ le complémentaire orthogonal de $\mathfrak{H}_{-\infty}$ dans $\mathfrak{H}_\infty$. Il existe alors un espace de Hilbert $\mathfrak{L}$ et une isométrie U de $L^2_{\mathfrak{L}}$ sur $\mathfrak{H}'$ telle que $U(t \star f) = V(t). U(f)$ et que $\mathfrak{H}_0$ soit somme directe de $\mathfrak{H}_\infty$ et du sous-espace formé des $U(f)$ pour les f dans $L^2_{\mathfrak{L}}$ nulles sur la demi-droite négative.

Il est clair que $\{V(t)\}$ induit des groupes à un paramètre d'opérateurs unitaires dans chacun des sous-espaces $\mathfrak{H}_\infty$, $\mathfrak{H}_{-\infty}$ et $\mathfrak{H}'$ de $\mathfrak{H}$, et que $\mathfrak{H}_0$ est somme directe de $\mathfrak{H}'_0 = \mathfrak{H}_0 \cap \mathfrak{H}'$ et $\mathfrak{H}_{-\infty}$. Enfin, on a $V(t).\mathfrak{H}'_0 \subset \mathfrak{H}'_0$ pour $t \geqslant 0$.

On notera F le projecteur orthogonal de $\mathfrak{H}'$ sur $\mathfrak{H}'_0$ et $V'(t)$ la restriction de $V(t)$ à $\mathfrak{H}'$. Ensuite, pour t réel, on posera :

$$E(t) = I_{\mathfrak{H}'} - V'(t).F.V'(t)^{-1} \quad . \tag{33}$$

Il est clair que $E(t)$ est un projecteur orthogonal dans $\mathfrak{H}'$ et l'on montre facilement que la famille des $E(t)$ est une décomposition de l'identité dans $\mathfrak{H}'$ (la fonction $\langle a|E(t)|a\rangle$ en t est continue d'après l'axiome (a) des représentations unitaires, Cf. numéro 1). De plus, on a

$$V'(t)\, E(s)\, V'(t)^{-1} = E(t + s) \quad . \tag{34}$$

Si P est la mesure spectrale sur $\underset{\sim}{R}$ à valeur dans $\mathfrak{H}'$ associée à la décomposition de l'identité $\{E(t)\}$, la formule (34) implique :

$$V'(t)\, P_f\, V'(t)^{-1} = P_{t\star f} \tag{35}$$

ce qui permet d'appliquer le théorème 1. On peut donc trouver un espace de Hilbert $\mathfrak{L}$ et une isométrie U de $L^2_{\mathfrak{L}}$ sur $\mathfrak{H}'$, telle que $U(t \star f) = V'(t).U(f)$ et $U(f.g) = P_f.H'g)$ pour $t \in \underset{\sim}{R}$, $f \in \mathcal{B}(\underset{\sim}{R})$ et $g \in L^2_{\mathfrak{L}}$. Si l'on prend pour f la fonction caractéristique Y de l'ensemble des nombres réels positifs, on voit que $U^{-1}.P_Y.U$ est la multiplication par Y dans L^2_Ω ; mais $P_Y = I - E(0) = F$, et comme P_Y est le projecteur orthogonal de L^2_Ω sur l'ensemble des fonctions nulles sur la demi-droite négative, et F le projecteur orthogonal de $\mathfrak{H}'$ sur $\mathfrak{H}'_0$ on voit que $\mathfrak{H}'_0$ est l'image par U de l'ensemble des fonctions nulles sur la demi-droite négative.

C. Q. F. D.

Nous pouvons maintenant aborder l'étude des semi-groupes d'opérateurs isométriques. Soit $\mathfrak{H}$ un espace de Hilbert ; on dit qu'un opérateur $U \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ est <u>isométrique</u> si l'on a $\|U.a\| = \|a\|$ pour tout a dans $\mathfrak{H}$, ce qui équivaut à $U^* U = I$. Posons $E = UU^*$; on a visiblement $E^* = E$ et par ailleurs $E^2 = U(U^* U) U^* = UU^* = E$, de sorte que E est un projecteur orthogonal ; comme on a $E = UU^*$ et $U = EU$ les images de E et U sont égales. En résumé, UU^* <u>est le projecteur orthogonal sur l'image de</u> U .

THÉORÈME 5. - <u>Soient</u> $\mathfrak{H}$ <u>un espace de Hilbert et</u> $\{V(t)\}_{t\geq 0}$ <u>une famille d'opérateurs isométriques dans</u> $\mathfrak{H}$ <u>vérifiant</u> :

$$V(s).V(t) = V(s+t) \tag{36}$$

$$\lim_{t\to 0} \langle a|V(t)|b\rangle = \langle a|b\rangle \quad . \tag{37}$$

<u>Soient</u> $\mathfrak{H}_{-\infty}$ <u>l'intersection des images des opérateurs</u> $V(t)$ <u>et</u> $\mathfrak{K}$ <u>le complémentaire orthogonal de</u> $\mathfrak{H}_{-\infty}$ <u>dans</u> $\mathfrak{H}$. <u>Il existe alors un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires</u> $U(t)$ <u>dans</u> $\mathfrak{H}_{-\infty}$ <u>tel que</u> $U(t)$ <u>soit la restriction de</u> $V(t)$ <u>pour</u> $t \geq 0$; <u>par ailleurs, il existe un espace de Hilbert</u> Ω <u>et une isométrie</u> $\overline{U}$ <u>sur l'espace</u> $\mathfrak{K}$ <u>de l'espace de Hilbert des fonctions</u> $f \in L^2_\Omega$ <u>nulles sur la demi-droite négative, qui vérifie</u> :

$$\overline{U}(t \star f) = V(t).\overline{U}(f) \quad . \tag{38}$$

Notons $\mathfrak{I}_t$ l'image de l'opérateur $V(t)$; pour $s \leq t$, on a $V(t) = V(s).V(t-s)$ et par conséquent $\mathfrak{I}_t \subset \mathfrak{I}_s$; si $a \in \mathfrak{H}$ est orthogonal aux espaces $\mathfrak{I}_s$ pour $s > 0$, on a en particulier $\langle a|V(s).a\rangle = 0$ pour $s > 0$, donc $\langle a|a\rangle = 0$ d'après (37), ce qui implique $a = 0$; autrement dit, la réunion $\mathfrak{H}_f$ des $\mathfrak{I}_s$ pour $s > 0$ est dense dans $\mathfrak{H}$. Si $a \in \mathfrak{H}_f$, il existe s tel que $a \in \mathfrak{I}_s$, d'où $a \in \mathfrak{I}_t$ pour $t \leq s$, et finalement $a = V(t).V(t)^* a$ pour $t < s$; comme $\mathfrak{H}_f$ est dense dans $\mathfrak{H}$ et que les opérateurs $V(t).V(t)^*$ sont tous de norme ≤ 1, on en déduit :

$$\lim_{t \to 0} V(t).V(t)^* a = a \qquad a \in \mathfrak{H} \quad . \tag{39}$$

Nous identifierons $\mathfrak{H}$ à un sous-espace de $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ au moyen de la correspondance $a \to (a, 0)$. Les opérateurs isométriques $V(t)$ dans $\mathfrak{H}$ se prolongent en des opérateurs unitaires $W(t)$ dans $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ au moyen de la définition suivante :

$$W(t).(a, b) = (V(t).a + b - V(t)\, V(t)^*.b \, , \, V(t)^*.a) \quad . \tag{40}$$

On vérifie facilement que l'on a $W(s)\, W(t) = W(s + t)$ lorsque $s, t \geq 0$; si l'on pose $W(t) = W(-t)^{-1}$ pour $t \leq 0$, on définit alors un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires dans $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$, et $W(t).\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}$ pour $t \geq 0$. Le théorème 5 résulte alors immédiatement du théorème 4.

C. Q. F. D.

8. Théorie de la prédiction statistique.

La situation est la suivante : on a un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires $V(t)$ dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ et un vecteur a de $\mathfrak{H}$. Pour tout t réel, on pose $a_t = V(t).a$, et l'on note $\mathfrak{H}_t$ le sous-espace de $\mathfrak{H}$ sous-tendu par les a_s pour $s \leq t$; de plus, on note $\mathfrak{H}_{-\infty}$ l'intersection des $\mathfrak{H}_t$ et $\mathfrak{H}_\infty$ l'adhérence de leur réunion ; enfin on note $\mathfrak{K}$ le complémentaire orthogonal de $\mathfrak{H}_{-\infty}$ dans $\mathfrak{H}_\infty$. L'opération de "prédiction" se formule ainsi : étant donnés deux nombres réels τ et ν avec $\nu > 0$, l'estimation de $a_{\tau+\nu}$ avec le retard ν est la projection orthogonale $b_{\tau,\nu}$ de $a_{\tau+\nu}$ sur le sous-espace $\mathfrak{H}_\tau$ de $\mathfrak{H}$; on a donc $b_{\tau,\nu} = V(\tau).P.V(\nu).a$, où P est le projecteur orthogonal de $\mathfrak{H}_\infty$ sur $\mathfrak{H}_0$; quant à l'erreur d'estimation, elle est mesurée par la distance $\sigma_{\tau,\nu}$ de $a_{\tau+\nu}$ à $b_{\tau,\nu}$, soit $\sigma_{\tau,\nu} = \|(I - P).V(\nu).a\|$. Il se présente deux cas :

a. Le cas indéterministe où $\mathfrak{H}_{-\infty} \neq \mathfrak{H}_\infty$: on a alors $a_{\tau+\nu} \neq b_{\tau,\nu}$ quels que soient τ et ν.

b. Le cas déterministe où $\mathfrak{H}_{-\infty} = \mathfrak{H}_{\infty}$: on a alors $\mathfrak{H}_t = \mathfrak{H}_{\infty}$ quel que soit t et $a_{\tau+\nu} = b_{\tau,\nu}$ quels que soient τ et ν. Nous allons d'abord déterminer la structure du cas indéterministe.

D'après le théorème de Bochner, il existe une mesure positive et bornée μ sur $\mathbb{R}$ et une isométrie S de $\mathfrak{H}_{\infty}$ sur $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ vérifiant les conditions suivantes :

$$(41) \qquad S(a_t) = e_t \qquad S(V(t).u) = e_t . S(u) \qquad \langle a_s | a_t \rangle = \int e^{2\pi i\lambda(t-s)} \, d\mu(\lambda)$$

(on rappelle que l'on a $e_t(\lambda) = e^{2\pi i\lambda t}$). Par ailleurs, la transformation de Fourier sera définie par la formule :

$$(42) \qquad \hat{f}(\lambda) = \int f(u) \, e^{2\pi i\lambda u} \, du \qquad f \in L^1 \cap L^2$$

elle se prolonge par continuité en un opérateur unitaire $f \to \hat{f}$ dans L^2 et l'on a :

$$(43) \qquad (t \star f)\hat{} = e_t . \hat{f} \qquad t \in \mathbb{R}, \quad f \in L^2 \quad .$$

THÉORÈME 6. - Dans le cas indéterministe, il existe une isométrie U de L^2 sur $\mathcal{R}$ et une fonction $h \in L^2$ nulle sur la demi-droite positive telle que $U(h)$ soit la projection orthogonale de a sur $\mathcal{R}$. De plus, la transformée de Fourier $\hat{h}$ de h ne s'annule que sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, l'intégrale

$$(44) \qquad H(p) = \int h(u) \, e^{pu} \, du \qquad \mathrm{Re}(p) > 0$$

ne s'annule pas, l'intégrale

$$(45) \qquad \int \frac{|\log|\hat{h}(\lambda)||}{1 + \lambda^2} \, d\lambda$$

est finie, et l'on a :

$$(46) \qquad d\mu(\lambda) = |\hat{h}(\lambda)|^2 \, d\lambda + d\nu(\lambda)$$

où la mesure ν est étrangère à la mesure de Lebesgue.

Si l'on applique le théorème 4 au groupe à un paramètre $\{V(-t)\}$ on démontre facilement qu'il existe deux sous-espaces fermés $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ de $\mathfrak{H}$ et une isométrie U de L^2 sur $\mathfrak{M}_1$ avec les propriétés suivantes :

a. $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont orthogonaux et leur somme est $\mathfrak{H}_\infty$.

b. $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont invariants par les opérateurs unitaires $V(t)$.

c. On a $\mathfrak{H}_0 = (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{H}_0) + (\mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{H}_0)$, et $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{H}_0$ est l'image par U de l'ensemble des fonctions $f \in L^2$ nulles sur la demi-droite positive.

d. On a la relation $U(t \star f) = V(t).U(f)$.

D'après les résultats rappelés au paragraphe 1, numéro 3, il existe une partition de $\underset{\sim}{R}$ en deux ensembles boréliens E_1 et E_2 telle que $\mathfrak{M}_i$ soit l'image par U de l'ensemble des fonctions de $L^2(\underset{\sim}{R}, \mu)$ nulles μ-presque partout en dehors de E_i . Si l'on note c_i la projection orthogonale de a sur $\mathfrak{M}_i$ et φ_i la fonction caractéristique de E_i , on a $S(c_i) = \varphi_i$. Soit enfin h la fonction de L^2 nulle sur la demi-droite positive telle que $U(h)$ soit égal à l'élément c_1 de $\mathfrak{H}_0 \cap \mathfrak{M}_1$. On a :

$$\int \varphi_1(\lambda).e^{2\pi i\lambda t}\, d\mu(\lambda) = \langle \varphi_1 | e_t.\varphi_1 \rangle = \langle c_1 | V(t).c_1 \rangle$$

$$= \langle h | t \star h \rangle = \langle \hat{h} | e_t.\hat{h} \rangle$$

$$= \int |\hat{h}(\lambda)|^2\, e^{2\pi i\lambda t}\, d\lambda$$

ce qui prouve que la mesure $\varphi_1.\mu$ admet la densité $|\hat{h}|^2$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Soit E l'ensemble des λ tels que $\hat{h}(\lambda) = 0$; si k est la fonction de L^2 ayant pour transformée de Fourier $\hat{k}$ la fonction caractéristique de E , on a :

$$\langle k | t \star h \rangle = \langle \hat{k} | e_t.\hat{h} \rangle = \int_E \hat{h}(\lambda).e^{2\pi i\lambda t}\, d\lambda = 0 \quad .$$

Mais les vecteurs $V(t).a$ sous-tendent $\mathfrak{H}_\infty$, donc les vecteurs $V(t).c_1$ sous-tendent $\mathfrak{M}_1$, et l'isométrie U montre que les fonctions $t \star h$ sous-tendent L^2 ; la formule $\langle k | t \star h \rangle = 0$ montre alors que l'on a $k = 0$, et par conséquent E est de mesure de Lebesgue nulle. Posons $\nu = \varphi_2.\mu$; on a alors (46) puisque $\mu = \varphi_1.\mu + \varphi_2.\mu$, et la mesure ν est étrangère à la mesure $\varphi_1.\mu$, donc à la mesure de Lebesgue, puisque l'ensemble des zéros de $\hat{h}$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Comme $h(u) = 0$ pour $u \geq 0$, la transformée de Laplace de h définie par la formule (44) a un sens pour $\mathrm{Re}(p) > 0$. Supposons que p annule $H(p)$; pour tout $t < 0$, on a alors :

$$\int (t \star h)(u)\, e^{pu}\, du = \int h(u - t)\, e^{pu}\, du = e^{pt} \int h(v)\, e^{pv}\, dv = 0$$

et comme les fonctions $t \star h$ pour $t < 0$ sous-tendent le sous-espace de L^2 formé des fonctions nulles sur la demi-droite positive, on en déduit $e^{pu} = 0$ pour tout $u \leq 0$, ce qui est absurde.

On a les formules :

$$\langle a|V(t)|a\rangle = \langle c_1|V(t)|c_1\rangle + \langle c_2|V(t)|c_2\rangle$$

$$\langle a|V(t)|a\rangle = \int e^{2\pi i\lambda t}\, d\mu(\lambda)$$

$$\langle c_1|V(t)|c_1\rangle = \int |\hat{h}(\lambda)|^2\, e^{2\pi i\lambda t}\, d\lambda$$

et la formule (46) montre donc que l'on a :

$$\langle c_2|V(t)|c_2\rangle = \int e^{2\pi i\lambda t}\, d\nu(\lambda)$$

avec une mesure ν étrangère à la mesure de Lebesgue. Si l'on applique les résultats précédents, et en particulier la formule (46), à la situation obtenue en remplaçant $\mathfrak{H}$ par $\mathfrak{M}_2$ et a par c_2, on voit que cette situation est déterministe, et donc que $\mathfrak{M}_2$ est sous-tendu par les vecteurs $V(t).c_2$ pour $t < 0$. Or l'on a $\mathfrak{H}_0 = (\mathfrak{H}_0 \cap \mathfrak{M}_1) + (\mathfrak{H}_0 \cap \mathfrak{M}_2)$, et par conséquent $\mathfrak{H}_0 \cap \mathfrak{M}_2$ est sous-tendu par les vecteurs $V(t).c_2$ pour $t < 0$; il en résulte que l'on a $\mathfrak{H}_0 \cap \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_2$, soit $\mathfrak{H}_0 \supset \mathfrak{M}_2$; mais ceci implique

$$\mathfrak{M}_2 = V(t)\,\mathfrak{M}_2 \subset V(t).\,\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_t$$

pour tout t réel, d'où $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{H}_{-\infty}$; comme on a $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{K}$ et que $\mathfrak{H}_\infty$ est somme directe de $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ d'une part et de $\mathfrak{H}_{-\infty}$ et $\mathfrak{K}$ de l'autre, on a finalement $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{K}$ et $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{H}_{-\infty}$.

Le fait que l'intégrale (45) soit finie est conséquence des résultats déjà démontrés, moyennant des théorèmes classiques de la théorie du potentiel et de la transformation de Laplace. Nous nous contenterons d'indications très rapides. La fonction h est dans L^2, elle est nulle sur la demi-droite positive ; sa transformée de Fourier $\hat{h}$ ne s'annule que sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, et sa transformée de Laplace H ne s'annule pas dans le demi-plan P défini par $\mathrm{Re}(p) > 0$. La fonction H est holomorphe dans P et bornée sur tout demi-plan P_ε défini par $\mathrm{Re}(p) \geq \varepsilon > 0$; de plus, il existe une constante M indépendante de p telle que :

$$(47) \qquad \int |H(p + 2\pi i\lambda)|^2 \, d\lambda \leq M \qquad p \in P$$

et l'on a :

$$(48) \qquad \lim_{p \to 0} \int |H(p + 2\pi i\lambda) - \hat{h}(\lambda)|^2 \, d\lambda = 0 \quad .$$

Enfin, on a la formule d'intégration de Cauchy :

$$(49) \qquad H(p) = \int \frac{\hat{h}(\lambda)}{2\pi i\lambda - p} \, d\lambda \quad .$$

Posons $F(p) = \log|H(p)|$ et $F_0(\lambda) = \log|\hat{h}(\lambda)|$; la fonction F est harmonique réelle dans P, bornée dans chaque demi-plan P_ε ; on en déduit la formule intégrale de Poisson :

$$(50) \qquad F(p) = (\varepsilon - u) \int \frac{F(\varepsilon + 2\pi i\lambda)}{(\varepsilon - u)^2 + (v - 2\pi\lambda)^2} \, d\lambda \, , \qquad p = u + iv$$

pour tout $\varepsilon > 0$. En utilisant les formules (47) et (48), l'inégalité $\log x \leq x$, pour $x > 0$, dans le lemme de Fatou, on peut faire tendre ε vers 0 dans (50), et l'on obtient finalement :

$$(51) \qquad F(p) = - \mathrm{Re}(p) \int \frac{F_0(\lambda)}{|p - 2\pi i\lambda|^2} \, d\lambda$$

où l'intégrale est absolument convergente ; ce dernier fait implique que l'intégrale (45) est finie.

C. Q. F. D.

Le résultat précédent admet une réciproque.

THÉORÈME 7. - Supposons que la mesure μ soit de la forme :

(52) $$d\mu(\lambda) = f(\lambda)\, d\lambda + d\nu(\lambda)$$

où la mesure ν est étrangère à la mesure de Lebesgue, la fonction f est sommable et strictement positive presque partout pour la mesure de Lebesgue, et où l'intégrale :

(53) $$\int \frac{|\log f(\lambda)|}{1 + \lambda^2}\, d\lambda$$

est finie. Le processus défini par les a_t est alors indéterministe.

Puisque la mesure ν est étrangère à la mesure de Lebesgue, il existe une partition de $\underset{\sim}{R}$ en deux ensembles boréliens E_1 et E_2 tels que $\nu(E_1) = 0$ et $\int_{E_2} d\lambda = 0$. A cette partition correspond une décomposition de $\mathfrak{H}_\infty$ en somme directe de deux sous-espaces orthogonaux $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ stables par les opérateurs unitaires $V(t)$; soit c_i la projection orthogonale de a sur $\mathfrak{M}_i$; pour prouver que l'on est dans le cas indéterministe, il suffit de prouver que $\mathfrak{M}_1$ n'est pas sous-tendu par les vecteurs $V(t).c_1$ pour $t < 0$.

Posons $F_0(\lambda) = \log f(\lambda)$; comme l'intégrale (53) est finie, la formule (51) a un sens et définit dans P une fonction harmonique réelle. Cette fonction est la partie réelle d'une fonction holomorphe $G(p)$ dans P ; la fonction holomorphe $H(p) = e^{G(p)}$ ne s'annule pas dans P, et l'on a $F(p) = \log|H(p)|$. En utilisant l'inégalité de convexité relative à la fonction convexe exponentielle, on démontre facilement l'inégalité (47) ; le théorème de Paley-Wiener implique l'existence d'une fonction $h \in L^2$ nulle sur la demi-droite positive dont H soit transformée de Laplace ; si $\hat{h}$ est la transformée de Fourier de h, la formule (48) est alors valable, et on en déduit sans trop de mal l'égalité $f(\lambda) = |\hat{h}(\lambda)|^2$ presque partout pour la mesure de Lebesgue. Or l'isométrie S applique bijectivement $\mathfrak{M}_1$ sur l'ensemble $\mathfrak{K}$ des (classes de) fonctions nulles en dehors de l'ensemble E_1 et de carré sommable pour la mesure $|\hat{h}(\lambda)|^2\, d\lambda$. Or le complémentaire de E_1 est de mesure de Lebesgue nulle, et si φ est la fonction caractéristique de E_1, l'application $u \to \varphi.\hat{h}^{-1}\hat{u}$ est une isométrie de L^2 sur $\mathfrak{H}$; en combinant les deux isométries précédentes, on définit une isométrie U de L^2 sur $\mathfrak{M}_1$; on vérifie facilement les formules $U(t \star f) = V(t).U(f)$ et $U(h) = c_1$; mais comme h est nulle sur la demi-droite positive, les fonctions $t \star h$ pour $t < 0$ ne sous-tendent pas L^2, et par conséquent les vecteurs $V(t).c_1$ ne sous-tendent pas $\mathfrak{M}_1$.

C. Q. F. D.

9. Compléments.

a. Nous n'avons pas traîté des questions d'unicité dans les théorèmes de structure de ce paragraphe. Le théorème-clé, qui se déduit facilement de la méthode de démonstration du théorème 1, est le suivant :

Etant donnés deux espaces de Hilbert $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}'$ et une application linéaire continue T de $L^2_{\mathfrak{H}}(G, m)$ sur $L^2_{\mathfrak{H}'}(G, m)$ telle que $T(f.g) = f.T(g)$ pour $f \in \mathcal{K}(G)$ et $T(x \star g) = x \star T(g)$ pour $x \in G$, il existe une application linéaire continue T' de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{H}'$ et une seule, telle que $(Tg)(x) = T'(g(x))$ pour tout $x \in G$.

b. Les résultats du numéro 7 se généralisent à d'autres semi-groupes. Soient G un groupe localement compact et Γ un sous-ensemble fermé de G stable par multiplication ; pour pouvoir énoncer un théorème analogue au théorème 5, il faut pouvoir définir une mesure de Radon positive et bornée au moyen des mesures des ensembles $x.\Gamma$ pour $x \in G$; le cas où G est le groupe des entiers, et Γ l'ensemble des entiers positifs, est trivial. Dans ce dernier cas, on a d'ailleurs une variante du théorème de Wiener-Kolmogoroff. Divers travaux récents sont consacrés à généraliser le théorème de Wiener-Kolmogoroff dans ce sens.

c. Le théorème de structure des semi-groupes à un paramètre d'opérateurs isométriques permet d'étudier les opérateurs symétriques maximaux dans un espace de Hilbert ; en effet, ces derniers sont les générateurs infinitésimaux des semi-groupes à un paramètre d'opérateurs isométriques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] COOPER (J. L. B.). - One-parameter semigroups of isometric operators in Hilbert space, Annals of Math., t. 48, 1947, p. 827-842.

[2] DIXMIER (Jacques). - Sur la relation $i(PQ - QP) = I$, Comp. Math., t. 13, 1958, p. 263-269.

[3] DOOB (J. L.). - Stochastic processes. - New York, J. Wiley and sons, 1953.

[4] KOLMOGOROFF (A.). - Interpolation and extrapolation von stationären zufälligen Folgen, Bull. Acad. Sc. U. R. S. S., Série mathématique, t. 5, 1941, p. 3-14.

[5] LOOMIS (L. H.). - Note on a theorem of Mackey, Duke math. J., t. 19, 1952, p. 641-645.

[6] MACKEY (G. W.). - A theorem of Stone and von Neumann, Duke math. J., t. 16, 1949, p. 313-326.

[7] von NEUMANN (J.). - Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren, Math. Ann., t. 104, 1931, p. 570-578.

[8] RELLICH (F.). - Der Eindeutigkeitssatz für die Lösungen der quantenmechanischen Vertauschungsrelationen, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., 1946, p. 107-115.

[9] STONE (M. H.). - Linear transformations in Hilbert space, III : Operational methods and group theory, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 16, 1930, p. 172-175.

[10] WEYL (Hermann). - The theory of groups and quantum mechanics. - New York, Dover Publications, 1950.

[11] WIENER (Norbert). - Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, with engineering applications. - New York, J. Wiley and sons, 1950.