FRANÇOIS NORGUET

Problème de Levi et plongement des variétés analytiques réelles

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. nº 173, p. 61-81

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__61_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1958)

PROBLÈME DE LEVI ET PLONGEMENT DES VARIÉTÉS ANALYTIQUES RÉELLES

par François NORGUET

(d'après un travail inédit de Hans GRAUERT)

INTRODUCTION. - Le travail de Grauert comprend deux parties distinctes. Dans la première, est résolu le problème de Levi pour un domaine relativement compact d'une variété analytique complexe. Dans la seconde, le problème du plongement analytique d'une variété analytique réelle paracompacte, dans un espace euclidien de dimension assez grande.

1. Problème de Levi.

GRAUERT démontre les théorèmes suivants, pour un domaine G relativement compact d'une variété analytique complexe $\mathfrak{M}$:

THÉORÈME 1. - Si G est fortement pseudoconvexe, G est holomorphiquement convexe.

THÉORÈME 2. - Si G est fortement pseudoconvexe et ne contient pas de sous-ensemble analytique compact de dimension positive, G est une variété de Stein.

THÉORÈME 3. - Si G est fortement pseudoconvexe et admet une fonction fortement plurisousharmonique, G est une variété de Stein.

THÉORÈME 4. - S'il existe dans $\mathfrak{M}$ une fonction $p(x)$ fortement plurisousharmonique, telle que chaque ensemble $T_\rho = \{x \in \mathfrak{M},\ p(x) < \rho\ ,\ \rho \text{ nombre réel}\}$ soit relativement compact dans $\mathfrak{M}$, alors $\mathfrak{M}$ est une variété de Stein.

Pour démontrer le théorème 1, il s'agit de construire, pour tout point x appartenant à la frontière de G , une fonction f , holomorphe dans G , méromorphe dans un voisinage de $\overline{G}$, et devenant infinie en x . Cette construction est réalisée par une méthode cohomologique, basée sur les théorèmes A et B de Cartan-Serre, et sur une proposition affirmant que $H^p(G' , \Omega)$ est de dimension finie pour $p > 0$ lorsque G' est relativement compact et fortement pseudoconvexe, Ω désignant le faisceau des germes de fonctions holomorphes dans $\mathfrak{M}$. La démonstration de Grauert pour cette proposition est inspirée par la démonstration de CARTAN-SERRE ([18], exposé 17) pour la finitude de la cohomologie des faisceaux analytiques cohérents sur les variétés analytiques compactes. En adaptant la méthode, due à GROTHENDIECK [9], de généralisation du théorème de Cartan-Serre aux faisceaux de Fréchet compacts calculables, on démontre le théorème suivant, qui généralise la proposition de GRAUERT :

THÉORÈME 4. - Soit, sur l'espace topologique X, localement compact et paracompact, un faisceau de Fréchet compact N, calculable pour les degrés $\leq p$; soit G un ouvert relativement compact et paracompact de X, tel que l'application canonique de $H^p(X, N)$ dans $H^p(G, N)$ soit surjective. Alors $H^p(G, N)$ est de dimension finie.

GRAUERT montre que G, fortement pseudoconvexe, satisfait à l'hypothèse de surjectivité de ce théorème, en réalisant des extensions successives de G, pour lesquelles l'application ci-dessus est surjective, jusqu'à atteindre, après un nombre fini d'opérations, un domaine G' dans lequel G est relativement compact.

La démonstration des théorèmes 2, 3 et 4 ne présente pas de difficultés. Toutefois, celle du théorème 4 suppose démontrés un théorème sur la limite d'une suite croissante de variétés de Stein, et un théorème sur les fonctions fortement plurisousharmoniques, seulement annoncés dans ce travail.

GRAUERT annonce également que les théorèmes 1, 2 et 3 peuvent être démontrés, par les mêmes méthodes, pour des domaines situés dans des espaces analytiques complexes, mais que le théorème 1 est faux, même sur les variétés analytiques, pour les domaines pseudoconvexes généraux.

Précédemment, OKA [14] a démontré que tout domaine pseudoconvexe borné de C^2 est d'holomorphie, BREMERMANN [2] et NORGUET [13], que tout domaine pseudoconvexe borné de C^n est d'holomorphie, OKA [15], que tout domaine pseudoconvexe étalé dans C^n, borné et non intérieurement ramifié, est holomorphiquement convexe et d'holomorphie. LELONG [11] a étudié l'équivalence des différentes définitions de la pseudoconvexité pour les domaines univalents de C^n. Le problème de Levi reste ouvert pour les domaines non bornés de C^n, et pour les domaines ramifiés sur C^n ; cependant GRAUERT et REMMERT [8] ont montré que de tels domaines ramifiés peuvent être d'holomorphie, pour $n \geq 3$, sans être nécessairement pseudoconvexes ni holomorphiquement convexes.

Le théorème 1 résout à nouveau le problème de Levi pour les domaines pseudoconvexes de C^n, car :

i. tout domaine pseudoconvexe de C^n peut être approché de l'intérieur par des domaines fortement pseudoconvexes,

ii. les domaines d'holomorphie de C^n sont les domaines pseudoconvexes,

iii. une limite de domaines d'holomorphie de C^n est encore un domaine d'holomorphie.

2. Plongement des variétés analytiques réelles.

Selon un résultat inédit de BRUHAT-WHITNEY, toute variété analytique réelle paracompacte (hypothèse indispensable) $\mathfrak{R}$ peut être réalisée comme surface analytique réelle fermée d'une variété analytique complexe paracompacte $\mathfrak{M}$ ([1]). Le corollaire du théorème 2 permet de construire dans $\mathfrak{M}$, à l'aide de fonctions plurisousharmoniques, un voisinage de $\mathfrak{R}$ qui est une variété de Stein. Or, d'après un résultat annoncé par REMMERT, cette variété de Stein admet un plongement holomorphe dans un espace C^n de dimension assez grande. Ce plongement induit un plongement analytique réel de $\mathfrak{R}$ dans un espace euclidien.

Précédemment, WHITNEY [20] avait démontré l'existence d'un plongement indéfiniment différentiable, et MORREY [12], l'existence d'un plongement analytique lorsque $\mathfrak{R}$ est compacte. GRAUERT annonce une extension de son théorème aux espaces analytiques réels.

1. Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux.

1. Rappel de définitions et de théorèmes.

a. Espaces vectoriels topologiques et théorème de compacité de L. Schwartz.

CONVENTION. - Les espaces vectoriels topologiques considérés seront toujours supposés localement convexes et séparés.

DÉFINITIONS.

i. Si E et F sont deux espaces vectoriels topologiques, une application linéaire v de E dans F est dite compacte s'il existe un voisinage V de 0 dans E tel que $v(V)$ soit relativement compact dans F (une telle application est continue).

([1]) Après la rédaction du travail de GRAUERT, est paru un mémoire de SHUTRICK [19] dans lequel est également résolu le problème de l'extension complexe des variétés analytiques réelles.

ii. Un espace de Fréchet est un espace vectoriel topologique métrisable et complet.

THÉORÈME ([18], exposé 16). - Soient E et F deux espaces de Fréchet, u une application linéaire continue de E sur F, v une application linéaire compacte de E dans F. Alors l'image de $w = u + v$ est un sous-espace fermé, de codimension finie, de F.

b. Faisceaux calculables [9].

DÉFINITION. - Soit un entier $p > 0$; un faisceau N de modules sur un espace topologique paracompact X est dit calculable en degrés $\leqslant p$, si, pour tout entier q vérifiant $1 \leqslant q \leqslant p$, tout point x de X et tout voisinage U de x, il existe un voisinage $V \subset U$ de x tel que l'homomorphisme canonique de $H^q(U, N)$ dans $H^q(V, N)$ soit nul.

THÉORÈME. - Si N est calculable en degrés $\leqslant p$,

i. pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ assez fin de X, l'homomorphisme canonique de $H^p(\mathcal{U}, N)$ (groupe d'homologie des cochaînes de Čech de $\mathcal{U}$ à valeurs dans N) dans $H^p(X, N)$ est surjectif.

ii. pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, en existe un autre $\mathcal{V}$ plus fin tel que tout élément de $H^p(\mathcal{U}, N)$ ayant une image nulle dans $H^p(X, N)$ a déjà une image nulle dans $H^p(\mathcal{V}, N)$ (i.e. dans la suite

$$H^p(\mathcal{U}, N) \xrightarrow{\alpha} H^p(\mathcal{V}, N) \xrightarrow{\beta} H^p(X, N)$$

le noyau de l'application composée $\beta \circ \alpha$ est le noyau de α).

COROLLAIRE. - Si N est calculable en degrés $\leqslant p$ alors, pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X assez fin (localement fini), existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ (localement fini) plus fin tel que $H^p(X, N)$ s'identifie canoniquement au quotient de $H^p(\mathcal{U}, N)$ par le noyau de l'homomorphisme canonique de $H^p(\mathcal{U}, N)$ dans $H^p(\mathcal{V}, N)$.

c. Faisceaux vectoriels topologiques (d'après [9]).

DÉFINITIONS.

i. Un faisceau F d'espaces vectoriels (réels ou complexes) sur un espace topologique paracompact X est dit faisceau de Fréchet si les espaces $\Gamma(U, F)$ de sections de F sur les ouverts de X sont munis de topologies d'espaces de

Fréchet satisfaisant la condition suivante : si U et V sont deux ouverts de X tels que $V \subset U$, l'application canonique de $\Gamma(U, F)$ dans $\Gamma(V, F)$ est continue.

ii. F est dit compact si, pour tout ouvert U de X, et pour tout ouvert V relativement compact dans U, l'application canonique de $\Gamma(U, F)$ dans $\Gamma(V, F)$ est compacte.

PROPRIÉTÉ. - Un faisceau analytique cohérent sur une variété analytique complexe est un faisceau de Fréchet compact et calculable ([18], exposé 17).

2. Théorèmes de finitude.

a. Théorème de Grothendieck pour les espaces compacts.

THÉORÈME. - Soit N un faisceau de Fréchet compact sur l'espace topologique compact X ; si N est calculable pour les degrés $\leq p$, $H^p(X, N)$ est de dimension finie.

DÉMONSTRATION. - Voir [9] ou adapter la démonstration du théorème ci-dessous.

b. Théorème pour certains ouverts relativement compacts d'un espace.

THÉORÈME. - Soit, sur l'espace X localement compact et paracompact, un faisceau de Fréchet compact N, calculable pour les degrés $\leq p$; soit G un ouvert relativement compact et paracompact de X, tel que l'application canonique de $H^p(X, N)$ dans $H^p(G, N)$ soit surjective. Alors $H^p(G, N)$ est de dimension finie.

DÉMONSTRATION. - Soit $\mathfrak{X} = (X_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert, localement fini, de X, tel que l'application canonique de $H^p(\mathfrak{X}, N)$ dans $H^p(X, N)$ soit surjective ; soit G' un ouvert de X vérifiant $G \Subset G' \Subset X$ (2) ; alors $\mathfrak{U} = \mathfrak{X} \cap G = (U_i)_{i \in I} = (X_i \cap G)_{i \in I}$ et $\mathfrak{U}' = \mathfrak{X} \cap G' = (U'_i)_{i \in I} = (X_i \cap G')_{i \in I}$ sont des recouvrements ouverts finis de G et G' respectivement. Dans le diagramme commutatif d'applications canoniques

(2) $V \Subset U$ signifie : V relativement compact dans U.

$$\begin{tikzcd}
H^p(\mathfrak{X}, N) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "(3)"] & H^p(X, N) \arrow[dd, "(2)"] \\
H^p(\mathcal{U}', N) \arrow[d, "(4)"] & \\
H^p(\mathcal{U}, N) \arrow[r, "(5)"] & H^p(G, N)
\end{tikzcd}$$

les applications (1) et (2) sont surjectives par hypothèse, donc l'application γ de $H^p(\mathcal{U}', N)$ dans $H^p(G, N)$, obtenue en composant (4) et (5), est surjective.

Soit $\mathcal{V}$ un recouvrement ouvert fini de G, tel que le recouvrement de G, formé des adhérences, relatives à G, des ouverts de $\mathcal{V}$, soit plus fin que $\mathcal{U}$; soit $\mathcal{W}$ un recouvrement ouvert dénombrable de G, plus fin que $\mathcal{V}$, tel que $H^p(G, N)$ s'identifie au quotient de $H^p(\mathcal{V}, N)$ par le noyau de l'application canonique de $H^p(\mathcal{V}, N)$ dans $H^p(\mathcal{W}, N)$. On a des applications linéaires :

$$\begin{tikzcd}
 & & C^{p-1}(\mathcal{W}, N) \arrow[d, "d"] \\
Z^p(\mathcal{U}', N) \arrow[r, "\alpha"] & Z^p(\mathcal{V}, N) \arrow[r, "\beta"] & Z^p(\mathcal{W}, N)
\end{tikzcd}$$

où $Z^p(\mathcal{U}, N)$ désigne le groupe des cocycles de Čech, de degré p, du recouvrement $\mathcal{U}$, à valeurs dans N, C^{p-1} celui des cochaînes de degré $p-1$, et d la différentielle des cochaînes de Čech. De plus $H^p(G, N)$ est le quotient de $Z^p(\mathcal{V}, N)$ par $\beta^{-1}(\mathrm{Im}\, d)$.

Or l'application γ de $H^p(\mathcal{U}', N)$ dans $H^p(G, N)$ est surjective et se réalise par restriction des cocycles ; donc

$$\mathrm{Im}\, \alpha + \beta^{-1}(\mathrm{Im}\, d) = Z^p(\mathcal{V}, N) \quad .$$

Soit K le sous-espace de $Z^p(\mathcal{V}, N) \times C^{p-1}(\mathcal{W}, N)$ composé des couples (z, c) pour lesquels $\beta z = dc$, σ la projection de K sur $Z^p(\mathcal{V}, N)$; alors $\mathrm{Im}\, \sigma = \beta^{-1}(\mathrm{Im}\, d)$.

Soit u (resp. v) l'application de $Z^p(\mathcal{U}', N) \times K$ dans $Z^p(\mathcal{V}, N)$ définie par $u(x, y) = \alpha(x) + \sigma(y)$ (resp. $v(x, y) = -\alpha(x)$) ; alors $w = u + v$ vérifie $w(x, y) = \sigma(y)$. Les espaces qui interviennent sont des espaces de

Fréchet ; u est continue et surjective, v est compacte ; donc l'image de w est de codimension finie dans $Z^p(\mathcal{V}, N)$, et $H^p(G, N)$ est de dimension finie.

2. Problème de Levi.

1. Rappel de définitions et de théorèmes.

a. Fonctions plurisousharmoniques.

DÉFINITION. - Une fonction réelle $h(x)$, deux fois continument différentiable sur une variété analytique complexe $\mathfrak{M}$, est dite :

i. plurisousharmonique (ou p. s. h.) si la forme quadratique

$L(h) = \sum \frac{\partial^2 h}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} a_j \bar{a}_k$ est semi-définie positive en tout point de $\mathfrak{M}$;

ii. fortement plurisousharmonique (ou fortement p. s. h.) si cette forme est définie positive en tout point de $\mathfrak{M}$.

REMARQUE. - On définit, de façon générale, les fonctions plurisousharmoniques non différentiables, mais seulement semi-continues supérieurement [10], et aussi les fonctions plurisousharmoniques sur les espaces analytiques [7]. Les fonctions p. s. h. considérées ici seront deux fois continument différentiables. Toutefois, le principe du maximum ci-dessous est énoncé pour les fonctions p. s. h. sur les espaces analytiques, et ces fonctions p. s. h. générales interviennent, par l'intermédiaire de ce principe, dans la démonstration de la proposition 3.

PROPRIÉTÉS.

i. Une fonction fortement p. s. h. sur une variété analytique $\mathfrak{M}$ ne peut être constante sur un sous-ensemble analytique de $\mathfrak{M}$, de dimension positive.

ii. Principe du maximum : si une fonction p. s. h. sur un espace analytique connexe atteint son maximum, elle est constante ; en particulier, une fonction p. s. h. sur un espace analytique compact connexe est constante [7].

iii. Si $p(x)$ est une fonction fortement p. s. h. sur une variété analytique $\mathfrak{M}$, il existe un ensemble D de nombres réels, dense dans l'ensemble des nombres réels supérieurs à $\inf_{x \in \mathfrak{M}} p(x)$, et tel que $dp(x)$ ne s'annule pas sur la frontière de $T_\rho = \{x \in \mathfrak{M}, p(x) < \rho$ lorsque $\rho \in D$ [6].

b. Conditions susceptibles d'être vérifiées par une variété analytique complexe $\mathfrak{M}$.

i. $\mathfrak{M}$ est holomorphiquement convexe, i.e. l'enveloppe holomorphiquement convexe de tout compact de $\mathfrak{M}$ est compacte (on rappelle que si M est un sous-ensemble de $\mathfrak{M}$, son enveloppe holomorphiquement convexe est l'ensemble des points x de $\mathfrak{M}$ tels que $|f(x)| \leq \sup_{y \in \mathfrak{M}} |f(y)|$ pour toute fonction f holomorphe dans $\mathfrak{M}$.

ii. $\mathfrak{M}$ est K-complète, i.e. pour tout point x_0 de $\mathfrak{M}$, il existe une famille finie $(f_i)_{1 \leq i \leq k}$ de fonctions holomorphes dans $\mathfrak{M}$, déterminant une application f de $\mathfrak{M}$ dans l'espace numérique complexe C^k, telle que x_0 soit un point isolé de l'ensemble $\{x \in \mathfrak{M},\ f(x) = f(x_0)\}$.

iii. $\mathfrak{M}$ est une variété de Stein, i.e. est holomorphiquement convexe et K-complète.

iv. il existe sur $\mathfrak{M}$ une fonction fortement p. s. h.

v. $\mathfrak{M}$ ne contient pas de sous-ensemble analytique compact de dimension positive.

c. Conditions susceptibles d'être vérifiées par un domaine G d'une variété analytique complexe $\mathfrak{M}$ (on supposera toujours que ce domaine est relativement compact dans $\mathfrak{M}$ et que sa frontière est deux fois différentiable par morceaux, i.e. pour tout point x_0 appartenant à la frontière bG de G, il existe un voisinage U de x_0 et une famille finie $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq k}$ de fonctions réelles deux fois continument différentiables telles que $d\varphi_i$ ne s'annule pas dans U et que $G \cap U = \bigcap_{1 \leq i \leq k} \{x \in U,\ \varphi_i(x) < 0\}$; U est appelé voisinage de définition de G).

vi. G est pseudoconvexe, i.e. la famille $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq k}$ peut être choisie de telle sorte que, en tout point de $bG \cap U$ où φ_i s'annule,

$$L(\varphi_i) = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z_j \, \partial \bar{z}_k} a_j \bar{a}_k \quad \text{soit} \geqslant 0$$

pour tous les vecteurs $a = (a_j)_{1 \leq j \leq n}$ qui vérifient $\sum_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j} a_j = 0$ (et ceci pour tout indice i, $1 \leq i \leq k$).

vii. G est fortement pseudoconvexe, i.e. la condition ci-dessus est remplacée par $L(\varphi_i) > 0$.

REMARQUE. - Ces deux conditions ne dépendent pas du choix de la famille (φ_i), ce sont des conditions intrinsèques pour la frontière de G.

viii. G est un domaine de continuité pour la cohomologie à valeurs dans le faisceau Ω des germes de fonctions holomorphes dans $\mathfrak{M}$, i.e. pour tout domaine G', suffisamment voisin de G, vérifiant $G \Subset G' \Subset \mathfrak{M}$, et pour tout entier $\nu > 0$, l'homomorphisme canonique de $H^\nu(G', \Omega)$ dans $H^\nu(G, \Omega)$ est un épimorphisme.

ix. Les espaces vectoriels complexes $H^\nu(G, \Omega)$, $\nu > 0$, ont une dimension finie.

d. Théorèmes de E.E. Levi et Krzoska ([1] et [11]).

i. Si G est holomorphiquement convexe, G est pseudoconvexe.

ii. Si G est fortement pseudoconvexe, alors, pour tout point x_0 de la frontière de G, il existe un voisinage U de x_0 et une fonction f, holomorphe sur $\overline{U}$, telle que df ne s'annule pas et que $\{x \in \overline{U}\ ,\ f(x) = 0\} \cap \overline{G} = \{x_0\}$

iii. Soit G fortement pseudoconvexe ; alors, si $x_0 \in bG$, et si U est un voisinage holomorphiquement convexe de x_0, suffisamment petit, $U \cap G$ est un domaine d'holomorphie ; si

$$U \cap G = \bigcap_{1 \leq i \leq k} \{x \in U\ ,\ \varphi_i(x) < 0\}$$

avec $\varphi_i(x)$ deux fois continument différentiable sur $\overline{U}$ et $d\varphi_i \neq 0$, et si de plus $(\varepsilon_i(x))_{1 \leq i \leq k}$ est une famille de fonctions deux fois continument différentiables sur $\overline{U}$, suffisamment petite ainsi que leurs dérivées premières et secondes, alors $\bigcap_{1 \leq i \leq k} \{x \in U\ ,\ \varphi_i(x) < \varepsilon_i(x)\}$ est encore un domaine d'holomorphie.

e. Théorèmes de Cartan-Serre sur la cohomologie des variétés de Stein [3].

Soit $\mathfrak{M}$ une variété de Stein, Ω le faisceau des germes de fonctions holomorphes dans $\mathfrak{M}$, N un faisceau analytique cohérent sur $\mathfrak{M}$; alors :

THÉORÈME A. - Pour tout point x de $\mathfrak{M}$, l'image de $H^0(\mathfrak{M}, N)$ dans N_x engendre N_x pour sa structure de Ω_x-module.

THÉORÈME B. - $H^p(\mathfrak{M}, N) = 0$ pour $p > 0$.

f. Théorème sur la limite d'une famille croissante de variétés de Stein ([4] et [6]).

Soient T une variété analytique complexe, D un ensemble dense de nombres réels $\rho > \rho_0$, $(T_\rho)_{\rho \in D}$ une famille continue de sous-domaines relativement compacts de T, telle que : $T_{\rho_1} \subset T_{\rho_2}$ si $\rho_1 < \rho_2$, et $\bigcup_{\rho \in D} T_\rho = T$. Si T_ρ est une variété de Stein pour tout $\rho \in D$, alors T est une variété de Stein.

2. Démonstration du théorème 1.

a. Cohomologie d'un domaine fortement pseudoconvexe : théorème de continuité.

DÉFINITIONS. - Soit $G \Subset \mathfrak{M}$ un domaine fortement pseudoconvexe.

i. Un recouvrement ouvert fini $\mathcal{U} = (U_i)_{0 \leq i \leq I}$ de $\overline{G}$ est dit adéquat si U_i et $U_i \cap G$ sont des variétés de Stein et si U_i est un voisinage de définition de G, pour $0 \leq i \leq I$.

ii. Si $\mathcal{U} = (U_i)_{0 \leq i \leq I}$ est un recouvrement adéquat de $\overline{G}$, on pose ${}^*U = U_0 - \bigcup_{1 \leq i \leq I} U_i$.

iii. On appelle prolongement adéquat de G, relativement à un recouvrement adéquat $\mathcal{U}$ de $\overline{G}$, un ouvert $G' \Subset \mathfrak{M}$, fortement pseudoconvexe, et vérifiant les conditions suivantes :

$$G \subset G' , \quad G' \cap U_i = G \cap U_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq I , \quad bG \cap bG' \cap {}^*U \neq \emptyset ,$$

et $\mathcal{U}$ est un recouvrement adéquat de $\overline{G'}$.

LEMMES.

i. Si $G \Subset \mathfrak{M}$ est un domaine fortement pseudoconvexe, il existe un recouvrement adéquat de $\overline{G}$, et même une famille $(\mathcal{U}^j)_{1 \leq j \leq J}$ de recouvrements adéquats de $\overline{G}$, telle que $bG \subset \bigcup_{1 \leq j \leq J} {}^*U^j$.

ii. Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement adéquat de $\overline{G}$, il existe un prolongement adéquat G' de G, relativement à $\mathcal{U}$, et arbitrairement voisin de G ; si $\mathcal{U}'$ est un autre recouvrement adéquat de $\overline{G}$, il est possible de choisir G' de telle sorte que $\mathcal{U}'$ soit un recouvrement adéquat de $\overline{G'}$.

iii. Si G' est un prolongement adéquat de G (relativement à un recouvrement adéquat $\mathcal{U}$ de $\overline{G}$), l'homomorphisme canonique de $H^\nu(G', \Omega)$ dans $H^\nu(G, \Omega)$ est un épimorphisme pour $\nu > 0$.

DÉMONSTRATION des lemmes. - Les lemmes (i) et (ii) se déduisent du théorème (iii) de Levi et Krzoska. Le lemme (iii) résulte de l'identité, pour $\nu > 0$, des groupes de cocycles de Čech $Z^{\nu}(\mathcal{V}, \Omega)$ et $Z^{\nu}(\mathcal{V}', \Omega)$ où

$$\mathcal{V} = (V_i)_{0 \leq i \leq I} = (U_i \cap G)_{0 \leq i \leq I} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}' = (V_i')_{0 \leq i \leq I} = (U_i \cap G')_{0 \leq i \leq I}$$

PROPOSITION 1. - Soit $G \Subset G' \Subset \mathfrak{M}$; si G est fortement pseudoconvexe, et si G' est suffisamment voisin de G, l'homomorphisme canonique de $H^{\nu}(G', \Omega)$ dans $H^{\nu}(G, \Omega)$ est un épimorphisme pour $\nu > 0$.

DÉMONSTRATION. - D'après le lemme (i), il existe une famille $(\mathcal{U}^j)_{1 \leq j \leq J}$ de recouvrements adéquats de $\overline{G}$, tels que $bG \subset \bigcup_{1 \leq j \leq J} {}^*U^j$. Soit $G_0' = G$; si G_{j-1}' est un domaine fortement pseudoconvexe tel que $\mathcal{U}^k$ constitue, pour $1 \leq k \leq J$, un recouvrement adéquat de G_{j-1}', soit G_j' un prolongement adéquat de G_{j-1}', relativement à $\mathcal{U}^j$, tel que $\mathcal{U}^k$ constitue, pour $1 \leq k \leq J$, un recouvrement adéquat de G_j' ; un tel G_j' existe d'après le lemme (ii) On définit ainsi par récurrence un domaine G_J' vérifiant $G \Subset G_J' \Subset \mathfrak{M}$. En appliquant par récurrence le lemme (iii), on voit que l'homomorphisme canonique de $H^{\nu}(G_J', \Omega)$ dans $H^{\nu}(G, \Omega)$ est un épimorphisme, pour $\nu > 0$. La même propriété subsiste si l'on remplace G_J' par un ouvert G' vérifiant $G \subset G' \subset G_J'$.

REMARQUE. - Il résulte de la démonstration ci-dessus que :

i. le domaine G' intervenant dans la proposition 1 peut être choisi fortement pseudoconvexe ;

ii. si $\mathcal{U} = (U_i)_{0 \leq i \leq I}$ est un recouvrement adéquat de $\overline{G}$, G' peut être choisi fortement pseudoconvexe et tel que $\mathcal{U}$ soit un recouvrement adéquat de $\overline{G'}$.

b. Cohomologie d'un domaine fortement pseudoconvexe ; théorème de finitude.

PROPOSITION 2. - Si $G \Subset \mathfrak{M}$ est fortement pseudoconvexe, les espaces vectoriels complexes $H^{\nu}(G, \Omega)$ sont de dimension finie pour $\nu > 0$.

DÉMONSTRATION. - C'est une conséquence immédiate de la proposition 1 et du second théorème de finitude pour la cohomologie des faisceaux.

c. Existence d'une fonction holomorphe dans un domaine fortement pseudoconvexe, devenant infinie en un point donné de la frontière.

PROPOSITION 3. - Si $G \in \mathfrak{M}$ est fortement pseudoconvexe, pour tout point x_0 de bG il existe une fonction f, méromorphe dans un domaine $G' \supseteq G$, holomorphe dans G, et telle que $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.

DÉMONSTRATION. - Soit x_0 un point arbitraire de la frontière de G ; soit U un voisinage de définition de G, holomorphiquement convexe, contenant x_0, suffisamment petit pour que $U \cap G$ soit une variété de Stein et qu'il existe une fonction f, holomorphe sur $\overline{U}$, telle que df ne s'annule pas et que $\overline{G} \cap S = \{x_0\}$ où $S = \{x \in \overline{U},\ f(x) = 0\}$; U existe en vertu des théorèmes (ii) et (iii) de Levi et Krzoska. Soit $G' \supseteq G$ un domaine fortement pseudoconvexe tel que $W' = G' \cap U$ soit une variété de Stein et que $S' = S \cap W'$ soit fermé dans G' ; G' existe en vertu de la remarque (ii) qui suit la démonstration de la proposition 1, car S' est fermé dans G' si G' est suffisamment voisin de G. Alors S', sous-variété analytique fermée de la variété de Stein W', est une variété de Stein.

S' est un diviseur positif dans G' ; il lui correspond canoniquement un espace fibré analytique complexe F, à fibres vectorielles de dimension 1, qui admet une section holomorphe canonique h s'annulant seulement au premier ordre sur S'. Soit F^k le produit tensoriel de k espaces fibrés identiques à F, et $\underset{\sim}{F}^k$ le faisceau des germes de sections holomorphes de F^k (en particulier $\underset{\sim}{F}^0 = \Omega$) ; soit $F^k(S')$ la restriction de F^k à S', et $\underset{\sim}{F}^k(S')$ le faisceau des germes de sections holomorphes de $F^k(S')$.

La correspondance $s_x \to s_x \otimes h_x$ définit un homomorphisme du faisceau $\underset{\sim}{F}^k$ dans le faisceau $\underset{\sim}{F}^{k+1}$, dont le conoyau est l'extension triviale ${}^*\underset{\sim}{F}^{k+1}$ de $\underset{\sim}{F}^{k+1}(S')$ à G'. A la suite exacte

$$0 \to \underset{\sim}{F}^k \to \underset{\sim}{F}^{k+1} \to {}^*\underset{\sim}{F}^{k+1} \to 0$$

correspond la suite exacte de cohomologie

$$0 \to H^0(G' ; \underset{\sim}{F}^k) \to H^0(G', \underset{\sim}{F}^{k+1}) \to H^0(G', {}^*\underset{\sim}{F}^{k+1}) \to$$

$$H^1(G', \underset{\sim}{F}^k) \to H^1(G', \underset{\sim}{F}^{k+1}) \to H^1(G', {}^*\underset{\sim}{F}^{k+1}) \to \dots$$

Comme $H^\nu(G', {}^*\underset{\sim}{F}^{k+1}) = H^\nu(S', \underset{\sim}{F}^{k+1}(S'))$ pour $\nu \geqslant 0$ et comme

$$H^1(S', \underset{\sim}{F}^{k+1}(S')) = 0$$

en vertu du théorème B de Cartan-Serre, on obtient une suite exacte

$$H^0(G', \underset{\sim}{F}^{k+1}) \to H^0(S', \underset{\sim}{F}^{k+1}(S')) \xrightarrow{\beta} H^1(G', \underset{\sim}{F}^{k}) \xrightarrow{\alpha} H^1(G', \underset{\sim}{F}^{k+1}) \to 0 .$$

Donc, si on pose d_k = dimension de $H^1(G', \underset{\sim}{F}^k)$, on a $d_{k+1} \leq d_k$; or, d'après la proposition 2, d_0 est fini ; donc, il existe un nombre k_0 tel que d_k soit indépendant de k pour $k > k_0$; alors, pour $k > k_0$, α est un isomorphisme et on obtient la suite exacte

$$H^0(G', \underset{\sim}{F}^{k+1}) \xrightarrow{\gamma} H^0(S', \underset{\sim}{F}^{k+1}(S')) \to 0 .$$

Donc toute section de F^{k+1} au-dessus de S' se prolonge en une section de F^{k+1} au-dessus de G'.

En vertu du théorème (A) de Cartan-Serre, il existe une section holomorphe s de F^{k+1} au-dessus de S', qui ne s'annule pas au point x_0 ; soit $\hat{s}$ son prolongement à G'. De plus, F^{k+1} admet une section holomorphe canonique h^{k+1} qui s'annule exactement à l'ordre $k+1$ sur S'. Le quotient $f = \hat{s}/h^{k+1}$ est une fonction méromorphe dans G', qui admet exactement S' pour variété polaire, qui est holomorphe dans G et qui n'a pas de point d'indétermination en x_0,

C. Q. F. D.

d. <u>Le théorème 1.</u>

THÉORÈME 1. - <u>Si</u> $G \Subset \mathfrak{M}$ <u>est fortement pseudoconvexe,</u> G <u>est holomorphiquement convexe.</u>

DÉMONSTRATION. - C'est une conséquence immédiate de la proposition 3.

3. <u>Démonstration des théorèmes 2 et 3.</u>

PROPOSITION 4. - <u>Pour qu'une variété analytique holomorphiquement convexe</u> $\mathfrak{M}$ <u>soit</u> K-<u>complète, il faut et il suffit qu'elle ne contienne pas de sous-ensemble analytique compact de dimension positive.</u>

DÉMONSTRATION.

i. Si $\mathfrak{M}$ contient un sous-ensemble analytique compact B de dimension positive, soit B^* une composante connexe, de dimension positive, de B. Toute fonction holomorphe sur $\mathfrak{M}$ étant constante sur B^*, $\mathfrak{M}$ ne peut être K-complète.

ii. Si $\mathfrak{M}$ ne contient pas de sous-ensemble analytique compact de dimension positive, soit x_0 un point quelconque de $\mathfrak{M}$, M l'enveloppe holomorphiquement convexe de $\{x_0\}$. Puisque M est compact, il existe un ouvert D vérifiant $M \subset D \Subset \mathfrak{M}$. Pour chaque point x appartenant à la frontière de D il existe une fonction f, holomorphe dans $\mathfrak{M}$, telle que $|f(x)| > |f(x_0)|$. Il existe donc une famille $(f_i)_{1 \leq i \leq I}$ de fonctions holomorphes dans $\mathfrak{M}$ contenant, pour chaque point $x \in bD$, une fonction f_i qui vérifie $|f_i(x)| > |f_i(x_0)|$. Soit f l'application de $\mathfrak{M}$ dans C^I définie par cette famille, et soit

$$A = \{x \in \mathfrak{M}, \quad f(x) = f(x_0)\} \; ; \quad A^* = A \cap D .$$

A^*, relativement compact dans D, est un ensemble analytique compact ; d'après l'hypothèse, sa dimension est nulle, d'où il résulte que x_0 est un point isolé de A^*, et que $\mathfrak{M}$ est K-complète.

THÉORÈME 2. - <u>Si</u> $G \Subset \mathfrak{M}$ <u>est fortement pseudoconvexe et ne contient pas de sous-ensemble analytique compact de dimension positive,</u> G <u>est une variété de Stein.</u>

DÉMONSTRATION. - C'est une conséquence du théorème 1 et de la proposition 4.

PROPOSITION 5. - <u>S'il existe sur</u> $\mathfrak{M}$ <u>une fonction fortement plurisousharmonique, alors</u> $\mathfrak{M}$ <u>ne contient pas de sous-ensemble analytique compact de dimension positive.</u>

DÉMONSTRATION. - Soit h une fonction fortement plurisousharmonique (deux fois continument différentiable) sur $\mathfrak{M}$, $A \subset \mathfrak{M}$ un ensemble analytique compact de dimension d positive. Soit A^* une composante connexe de A, ayant la dimension d ; A^* est un espace analytique compact connexe ; la restriction de h à A^* est une fonction p. s. h., constante en vertu de la propriété (ii) des fonctions p. s. h., ce qui contredit la propriété (i).

THÉORÈME 3. - <u>Si</u> $G \Subset \mathfrak{M}$ <u>est fortement pseudoconvexe et admet une fonction fortement plurisousharmonique,</u> G <u>est une variété de Stein.</u>

DÉMONSTRATION. - C'est une conséquence du théorème 2, et de la proposition 5.

THÉORÈME 4. - <u>Soient</u> $\mathfrak{M}$ <u>une variété analytique complexe, et</u> $p(x)$ <u>une fonction fortement plurisousharmonique dans</u> $\mathfrak{M}$, <u>telle que chaque ensemble</u> $T_\rho = \{x \in \mathfrak{M}, \quad p(x) < \rho \;, \; \rho \text{ nombre réel}\}$ <u>soit relativement compact dans</u> $\mathfrak{M}$.

Alors $\mathfrak{M}$ est une variété de Stein.

DÉMONSTRATION. - D'après la propriété (iii) des fonctions p. s. h., il existe un ensemble D de nombres réels, dense dans l'ensemble $\{\rho > \rho_0 = \inf_{x \in \mathfrak{M}} p(x)\}$, tel que, pour $\rho \in D$, $dp(x)$ ne s'annule pas sur la frontière de T_ρ ; alors, d'après le théorème 2, T_ρ est, pour $\rho \in D$, une variété de Stein. Du théorème sur la limite d'une famille croissante de variétés de Stein, il résulte que $\mathfrak{M}$ est une variété de Stein.

3. Plongement des variétés analytiques réelles.

1. Enoncé de théorèmes qui seront utilisés, mais dont la démonstration n'a pas encore été publiée.

a. Complexification des variétés analytiques réelles.

THÉORÈME de Bruhat-Whitney [3]. - Soit $\mathcal{R}$ une variété analytique réelle paracompacte de dimension n. Il existe une variété analytique complexe paracompacte $\mathfrak{M}$ de dimension (complexe) n, une surface analytique réelle fermée $\mathcal{R}'$ de dimension (réelle) n dans $\mathfrak{M}$, et une application bi-analytique réelle π de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}'$. Il existe un recouvrement de $\mathfrak{M}$ par des cartes locales $(U_i, (z_j^i)_{1 \leq j \leq n})_{0 \leq i < +\infty}$ telles que $U_i \cap \mathcal{R}' = \{x \in U_i, z_j^i \text{ réel pour } 1 \leq j \leq n\}$ pour $i \geq 0$. On pose $z_j^i = x_j^i + i.y_j^i$.

b. Plongement des variétés de Stein. ([16] et [17])

THÉORÈME de Remmert. - Si $\mathfrak{M}$ est une variété de Stein, il existe une application holomorphe, régulière (i.e. biunivoque et de jacobien non nul) et propre (i.e. l'image réciproque de tout compact est un compact) de $\mathfrak{M}$ dans un espace C^k de dimension suffisamment grande.

COROLLAIRE. - L'image de $\mathfrak{M}$ est un sous-ensemble analytique fermé de C^k, ayant même dimension que $\mathfrak{M}$ et dont tous les points sont ordinaires.

2. Plongement d'une variété analytique réelle paracompacte.

a. Notion de p-fonction ; applications.

DÉFINITION. - Soit E un sous-ensemble d'une variété analytique complexe $\mathfrak{M}$; une p-fonction (resp. une p-fonction forte) sur $\mathfrak{M}$, relative à E, est une

---

(3) Voir note (1).

fonction indéfiniment différentiable telle que :

i. $p(x) \geqslant 0$ pour $x \in \mathfrak{M}$;

ii. $p(x) = 0$ et $dp(x) = 0$ pour $x \in E$;

iii. $p(x)$ est p. s. h. (resp. fortement p. s. h.) en chaque point de E .

PROPRIÉTÉS. - Si p_1 et p_2 sont des p-fonctions, et $\alpha(x) > 0$ une fonction indéfiniment différentiable sur $\mathfrak{M}$, alors $\alpha \cdot p_1$ et $p = p_1 + p_2$ sont des p-fonctions (relativement à E). Si p_1 est une p-fonction forte, alors p est aussi une p-fonction forte.

LEMME 1. - Si tout point x de $\mathfrak{M}$ paracompacte admet un voisinage ouvert U dans lequel existe une p-fonction forte, et si r est une fonction deux fois continument différentiable dans $\mathfrak{M}$, alors il existe une p-fonction forte p dans $\mathfrak{M}$, telle que $p + r$ soit fortement plurisousharmonique en tout point de E .

DÉMONSTRATION. - Soit $\mathfrak{U} = (U_i)_{0 \leq i < +\infty}$ un recouvrement localement fini de $\mathfrak{M}$ par des ouverts relativement compacts dans $\mathfrak{M}$, tels qu'il existe dans chaque U_i une p-fonction forte p_i (relativement à $E \cap U_i$). Soit $(\alpha_i)_{0 \leq i < +\infty}$ une partition de l'unité, indéfiniment différentiable, à supports dans les U_i . Alors $\alpha_i \cdot p_i$ est une p-fonction dans $\mathfrak{M}$, et une p-fonction forte à l'intérieur du support de α_i ; il existe une constante positive h_i telle que $h_i \cdot \alpha_i \cdot p_i + \alpha_i \cdot r$ soit fortement p. s. h. en tout point de $E \cap U_i$ intérieur au support de α_i ; $p = \sum_{0 \leq i < +\infty} h_i \cdot \alpha_i \cdot p_i$ est une p-fonction forte dans $\mathfrak{M}$, et $p + r = \sum_{0 \leq i < +\infty} h_i \cdot \alpha_i \cdot p_i + \alpha_i \cdot r$ est une fonction fortement p. s. h. en tout point de E .

LEMME 2. - Hypothèses :

i. $\mathfrak{M}$ est paracompacte ;

ii. tout point de $\mathfrak{M}$ admet un voisinage ouvert dans lequel il existe une p-fonction forte ;

iii. pour tout voisinage U de E , il existe un voisinage $V \subset U$ de E et une p-fonction $p^*(x)$ dans V , fortement plurisousharmonique en tout point où elle n'est pas nulle, telle que $bV \cap \overline{T} = \emptyset$ où $T = \{x \in V ,\ p^*(x) < 1\}$.

Conclusion : E possède un voisinage ouvert qui est une variété de Stein.

DÉMONSTRATION. - Soit r une fonction réelle non négative, deux fois continument différentiable dans $\mathfrak{M}$, telle que, pour tout nombre réel $K > 0$, l'ensemble $\{x \in \mathfrak{M},\ r(x) < K\}$ soit relativement compact dans $\mathfrak{M}$. Soit p_1 une p-fonction forte dans $\mathfrak{M}$, telle que $p = p_1 + r$ soit fortement p. s. h. en tout point de E (p_1 existe en vertu du lemme 1) ; alors il existe un voisinage U de E dans lequel p est fortement p. s. h. . En vertu de l'hypothèse (iii), il existe un voisinage $V \subset U$ de E et une p-fonction p_2 dans V, fortement p. s. h. en tout point où elle n'est pas nulle, telle que $bV \cap \overline{T} = \emptyset$ où $T = \{x \in V,\ p_2(x) < 1\}$. La fonction

$$q = p + (1 - p_2)^{-1} = p + \sum_{0 \leq k < +\infty} (p_2)^k$$

est fortement p. s. h. dans T, chaque ensemble $T_\rho = \{x \in T,\ q(x) < \rho\}$ est relativement compact dans T, et $\bigcup_{\rho \text{ réel}} T_\rho = T$. En vertu du corollaire au théorème 2, T est une variété de Stein.

b. Théorème de plongement.

On se place dans la situation décrite en 1 (a), et la notion de p-fonction sur $\mathfrak{M}$ est toujours relative à $\mathfrak{R}'$.

LEMME 3. - Tout point de $\mathfrak{M}$ admet un voisinage dans lequel il existe une p-fonction forte.

DÉMONSTRATION. - $p_i(x) = - \sum_{1 \leq j \leq n} (z_j^i - \overline{z}_j^i)^2$ est une p-fonction forte dans U_i.

LEMME 4. - Soit U un voisinage ouvert de $\mathfrak{R}'$; alors il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de $\mathfrak{R}'$ et une p-fonction $p^*(x)$ dans V, fortement plurisousharmonique en tout point où elle n'est pas nulle, telle que

$$bV \cap \overline{T} = \emptyset \quad \text{où} \quad T = \{x \in V,\ p^*(x) < 1\} .$$

DÉMONSTRATION. - Soit $\mathcal{V} = (V_i)_{0 \leq i < +\infty}$ et $\mathcal{W} = (W_i)_{0 \leq i < +\infty}$ des recouvrements ouverts de $\mathfrak{M}$ tels que $W_i \Subset V_i \Subset U_i$ pour $0 \leq i < +\infty$.
Soit d_i la distance de $\overline{W}_i$ à bV_i relativement aux coordonnées $(z_j^i)_{1 \leq j \leq n}$; $\mathcal{V}$ étant localement fini, il existe un voisinage $V \subset U$ de $\mathfrak{R}'$, tel que

$$\Big(\sum_{1\leq j\leq n}(y_j^i)^2\Big)^{1/2} < (1/2)d_i \quad \text{pour} \quad x \in V_i \cap V \ .$$

Soit a un point arbitraire de $W_i \cap \mathcal{R}'$, $(a_j^i)_{1\leq j\leq n}$ les parties réelles de ses coordonnées dans U_i ; alors dans $U_i \cap V$ la frontière du cône

$$K_a^i = \Big\{ x \in V_i \cap V \ , \ \tilde{p}_a^i(x) = 2 \sum_{1\leq j\leq n} |y_j^i|^2 - \sum_{1\leq j\leq n} |x_j^i - a_j^i|^2 > 0 \Big\}$$

est l'ensemble $\{x \in V_i \cap V \ , \ \tilde{p}_a^i(x) = 0\}$; $\tilde{p}_a^i(x)$ est fortement p. s. h. dans K_a^i. On pose $p_a^i(x) = 0$ pour $x \notin K_a^i$, et $p_a^i(x) = e^{-\tilde{p}_a^i(x)}$ pour $x \in K_a^i$; $p_a^i(x)$ est une p-fonction dans V, positive dans K_a^i. Il existe une suite de points $a_\nu \in W_{i_\nu} \cap \mathcal{R}'$, telle que le recouvrement $(K_{a_\nu}^{i_\nu})$ soit localement fini et que $b(V - \bigcup_\nu K_{a_\nu}^{i_\nu}) \cap bV = \emptyset$. Si c_ν est une suite de nombres réels suffisamment grands, $p^*(x) = \sum_\nu c_\nu . p_{a_\nu}^{i_\nu}$ est une p-fonction dans V, vérifiant les conditions demandées.

THÉORÈME 5. - Soit $\mathcal{R}$ une variété analytique réelle paracompacte. Il existe alors une application analytique réelle, régulière et propre, de $\mathcal{R}$ dans un espace euclidien R^k, de dimension suffisamment grande.

DÉMONSTRATION. - Des lemmes 3, 1,4,2 il résulte que $\mathcal{R}'$ possède un voisinage ouvert qui est une variété de Stein. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Remmert sur le plongement des variétés de Stein.

3. Plongement d'une variété analytique réelle compacte.

Le processus conduisant au théorème 3 est considérablement simplifié si $\mathcal{R}$ est compacte. On évite alors le passage à la limite pour une famille croissante de variétés de Stein, et, au lieu du théorème profond de Remmert, on peut utiliser le lemme suivant, de démonstration aisée :

LEMME. - Si $\mathfrak{M}$ est une variété de Stein, et si B est un ensemble relativement compact dans $\mathfrak{M}$, il existe une application holomorphe et régulière de B dans un espace C^k.

DÉMONSTRATION. - C'est une conséquence des propriétés suivantes d'une variété de Stein [5] :

i. $\mathfrak{M}$ est paracompacte ;

ii. si x et y sont deux points distincts de $\mathfrak{M}$, il existe une fonction f , holomorphe dans $\mathfrak{M}$, telle que $f(x) \neq f(y)$,

iii. pour tout point x_0 de $\mathfrak{M}$ il existe une famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de fonctions holomorphes dans $\mathfrak{M}$, telles que le jacobien

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}$$

ne s'annule pas en x_0 ($(z_i)_{1 \leq i \leq n}$ étant des coordonnées (holomorphes) dans un voisinage de x_0).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEHNKE (H.) und THULLEN (P.). - Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. - New York, Chelsea, 1934 (Ergebnisse der Mathematik ... , Dritter Band, 3).

[2] BREMERMANN (Hans J.). - Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen, Math. Ann., t. 128, 1954, p. 63-91.

[3] CARTAN (Henri). - Variétés analytiques complexes et cohomologie, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables [1953. Bruxelles]. - Liège, Georges Thone et Paris, Masson, 1953 (Centre belge de Rech. math.) ; p. 41-55.

[4] DOCQUIER (F.). - Dissertation Münster, 1958.

[5] GRAUERT (Hans). - Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume, Math. Ann., t. 129, 1955, p. 233-259.

[6] GRAUERT (Hans). - Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. (à paraître).

[7] GRAUERT (H.) und REMMERT (R.). - Plurisubharmonische Funktionen in komplexen Räumen, Math. Z., t. 65, 1956, p. 175-194.

[8] GRAUERT (H.) und REMMERT (R.). - Singularitäten komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Gebiete, Math. Z., t. 67, 1957, p. 103-128.

[9] GROTHENDIECK (Alexandre). - Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux, Bull. Soc. math. France, t. 84, 1956, p. 1-7.

[10] LELONG (Pierre). - Les fonctions plurisousharmoniques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 62, 1945, p. 301-338.

[11] LELONG (Pierre). - Domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques, J. Anal. math. Jérusalem, t. 2, 1952, p. 178-208.

[12] MORREY (Ch. B.). - The analytic embedding of abstract real-analytic manifolds, Annals of Math., t. 68, 1958, p. 159-201.

[13] NORGUET (François). - Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes (Passage du local au global), Bull. Soc. math. France, t. 82, 1954, p. 137-159.

[14] OKA (Kiyosi). - Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VI. Domaines pseudoconvexes, Tohoku math. J., t. 49, 1942, p. 15-52.

[15] OKA (Kiyosi). - Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, IX. Domaines finis sans point critique intérieur, Jap. J. Math., t. 23, 1953, p. 97-155.

[16] REMMERT (Reinhold). - Sur les espaces analytiques holomorphiquement séparables et holomorphiquement convexes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 243, 1956, p. 118-121.

[17] REMMERT (Reinhold). - Einbettung Steinscher Mannigfaltigkeiten und holomorph-vollständiger komplexer Räume, Math. Ann. (à paraître).

[18] Séminaire H. CARTAN : Variétés analytiques complexes et fonctions automorphes, t. 6, 1953/1954.

[19] SHUTRICK (H. B.). - Complex extensions, Quart. J. of Mech. and appl. Math., Series 2, t. 9, 1958, p. 189-201.

[20] WHITNEY (Hassler). - The self-intersections of a smooth n-manifold in 2n-space, Annals of Math., t. 45, 1944, p. 220-246.

ADDITIF

1. L'exposé oral a présenté une autre démonstration du théorème 5, basée sur :

a. la possibilité, démontrée par GRAUERT (voir la démonstration du théorème 5 page 18), de construire un système fondamental de voisinages ouverts de $\mathcal{R}$, dans $\mathcal{R}'$, qui sont des variétés de Stein ;

b. le théorème 1 de [21] ;

c. le théorème 1 de [26].

Cette démonstration montre le lien entre les recherches de GRAUERT, et celles de H. CARTAN et B. MALGRANGE ; elle présente l'avantage de ne pas utiliser le théorème de plongement de REMMERT, dont la démonstration n'est pas publiée.

2. Le travail de H. GRAUERT, étudié dans cet exposé, est maintenant publié en mémoire [23].

3. Le théorème, attribué à F. BRUHAT, H. SHUTRICK et H. WHITNEY, a été annoncé par C. EHRESMANN ([22], page 417), et démontré par A. HAEFLIGER ([24], p. 296-301).

BIBLIOGRAPHIE

[21] CARTAN (Henri). - Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 77-99.

[22] EHRESMANN (Charles). - Sur les variétés presque complexes, Proc. intern. Congress Math. [1950. Cambridge], t. 2. - Providence, American mathematical Society, 1952 ; p. 412-419.

[23] GRAUERT (Hans). - On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds, Annals of Math., Series 2, t. 68, 1958, p. 460-472.

[24] HAEFLIGER (André). - Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes, Comment. Math. Helvet., t. 32, 1958, p. 248-329.

[25] MALGRANGE (Bernard). - Plongement des variétés analytiques réelles, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 101-112.

[26] MALGRANGE (Bernard). - Faisceaux sur les variétés analytiques réelles, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 231-237.

[Juin 1959]