PIERRE CARTIER

# Structures simpliciales

*Séminaire N. Bourbaki*, 1960, exp. n° 199, p. 429-440
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__429_0>

Séminaire BOURBAKI
12e année, 1959/60, n° 199 Mai 1960

# STRUCTURES SIMPLICIALES

par Pierre CARTIER

Cet exposé est un rapport assez rapide, bien que déjà trop long, sur les développements accomplis ces dernières années dans le domaine de ce qu'on peut appeler proprement la topologie combinatoire. Les résultats qui seront exposés sont dus principalement à EILENBERG, MACLANE, KAN, DOLD et MILNOR. On a réuni dans la bibliographie les titres des articles les plus importants. Après tous ces travaux, on a l'impression que la topologie algébrique revient à sa source ; il est assez surprenant que les méthodes "čechistes", qui avaient été inventées pour réagir contre l'abus du simplicial, aient été à leur tour absorbées dans ce nouveau courant d'idées, comme en témoigne consciemment le livre de GODEMENT sur les faisceaux [8].

## 1. Polyèdres et homologie singulière.

Dans un espace affine réel $E$ de dimension finie, on appelle simplexe (affine) l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points affinement indépendants qui sont les sommets du simplexe en question. Si $S$ et $T$ sont deux simplexes, on dit que $S$ est une face de $T$ si les sommets de $S$ forment une partie de l'ensemble des sommets de $T$. Alors, avec ces définitions, un polyèdre (fini) est une partie compacte de $E$, réunion d'un nombre fini de simplexes. Un tel polyèdre $K$ admet toujours une décomposition normale (non unique), c'est-à-dire qu'il est réunion d'une famille finie de simplexes $S_\alpha$ avec les propriétés suivantes :

a. Toute face d'un simplexe $S_\alpha$ est de la forme $S_\beta$ ;

b. L'intersection $S_\alpha \cap S_\beta$ de deux simplexes est une face de chacun d'eux.

La structure combinatoire d'un tel polyèdre est défini par la donnée de l'ensemble des $S_\alpha$ et des relations d'inclusions entre eux. Cette structure combinatoire peut aussi se définir en donnant l'ensemble $\Sigma$ des sommets d'un $S_\alpha$. Ceci suffit déjà à reconstituer l'espace topologique $K$ à un homéomorphisme près ; de plus, de la structure combinatoire de $K$, on peut déduire des "invariants", par exemple les groupes d'homologie, et il se trouve que ces "invariants" ne dépendent effectivement pas de la décomposition normale choisie, et sont même isomorphes pour des polyèdres supposés homéomorphes sans plus.

Cependant, dès qu'on aborde les questions d'orientation, on est amené à distinguer dans un simplexe diverses manières d'ordonner les sommets. De plus, si l'on veut étudier le produit cartésien de deux polyèdres $K$ et $K'$ , on est amené à en faire une décomposition normale dont les simplexes $S$ sont caractérisés par leurs deux projections sur $K$ et $K'$ respectivement ; mais deux sommets distincts de $S$ n'ont pas forcément des projections distinctes sur $K$ par exemple (cf. figure 1)

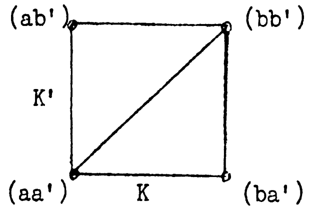


Fig. 1

Les simplexes de $K$ sont $a$ , $b$ $ab$

Les simplexes de $K'$ sont $a'$ , $b'$ $a'b'$

Les simplexes de $K \times K'$ sont

$$a \times a' \quad b \times b' \quad a \times b' \quad a' \times b$$

$$\left\{\begin{matrix} ab \times a' & ab \times b' \\ b \times a'b' & a \times a'b' \end{matrix}\right. \qquad ab \times a'b'$$

$$aab \times a'b'b' \qquad abb \times a'a'b'$$

N. B. - On note $S \times S'$ le simplexe de $K \times K'$ qui a les projections $S$ et $S'$ resp. sur $K$ et $K'$ .

Pour ces raisons, on est amené à appeler "simplexe" du polyèdre $K$ toute suite ordonnée de sommets dont l'enveloppe convexe est un des $S_\alpha$ ; deux "simplexes" distincts peuvent évidemment déterminer le même "simplexe géométrique" $S_\alpha$ . Sur ces simplexes, on définit les opérations simpliciales qui, à tout simplexe $S = (e_o , \dots , e_n)$ et toute application croissante $\alpha$ de l'intervalle $[0 , m]$ d'entiers dans l'intervalle $[0 , n]$, fait correspondre le simplexe $\bar{\alpha} S = (e_{\alpha(o)} , \dots , e_{\alpha(m)})$ et l'on a $\overline{\alpha\beta}(S) = \bar{\beta}(\bar{\alpha} S)$ . En particulier, on pose

$$(1) \quad \left\{\begin{aligned} F_i\, S &= (e_o , \dots , e_{i-1} , e_{i+1} , \dots , e_n) \\ D_i\, S &= (e_o , \dots , e_{i-1} , e_i , e_i , e_{i+1} , \dots , e_n) \end{aligned}\right. \qquad (0 \leqslant i \leqslant n)$$

où $F_i$ est l'opérateur de face et $D_i$ l'opérateur de dégénérescence. Entre ces opérateurs, on a les relations

$$(2) \quad \left\{\begin{aligned} & D_i\, D_j = D_{j+1}\, D_i \ , \quad F_i\, F_{j+1} = F_j\, F_i \ , \qquad \text{pour } i \leqslant j \\ & F_i\, D_j = D_{j-1}\, F_i \quad \text{pour } i < j \ , \quad F_j\, D_j = F_{j+1}\, D_j = 1 \ , \quad F_i\, D_j = D_j\, F_{i-1} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } i > j + 1 \end{aligned}\right.$$

et tout opérateur simplicial $\bar{\alpha}$ peut s'obtenir par composition des $D_i$ et des $F_i$ .

Pour étudier les espaces topologiques plus généraux que les polyèdres, on est amené à étudier les applications continues d'un polyèdre $K$ dans un tel espace $X$ ; or ces applications sont définies si l'on se donne la structure combinatoire de $K$ (pour une décomposition normale donnée) et le "squelette singulier" de $X$. Ce dernier est l'ensemble des simplexes singuliers de $X$ (applications continues $f(\lambda_o , \dots , \lambda_n)$ à valeurs dans $X$ définis pour des $\lambda_i \geqslant 0$ de somme $1$ ) sur lequel sont définies des opérations simpliciales par les formules

$$(3)\begin{cases} F_i\, f(\lambda_o , \dots , \lambda_{n-1}) = f(\lambda_o , \dots , \lambda_{i-1} , 0 , \lambda_i , \dots , \lambda_{n-1}) \\ D_i\, f(\lambda_o , \dots , \lambda_{n+1}) = f(\lambda_o , \dots , \lambda_{i-1} , \lambda_i + \lambda_{i+1} , \lambda_{i+2} , \dots , \lambda_{n+1}) \end{cases} .$$

Les relations (2) sont encore vérifiées.

## 2. Structures simpliciales.

Après ce début bien géométrique et un peu lent, nous sautons les étapes et, plongeant dans l'abstrait, nous donnons maintenant la définition générale (due à H. CARTAN) d'un objet simplicial.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Les intervalles d'entiers $[0 , m]$ et les applications croissantes entre de tels intervalles forment une catégorie $\mathcal{S}$. Alors on appelle objet simplicial dans $\mathcal{C}$ tout foncteur contravariant $X$ de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{C}$. Il revient au même de se donner une suite d'objets $X_n$ de $\mathcal{C}$ (pour $n$ entier $\geqslant 0$ ) et des morphismes

$$F_i^n = F_i : X_n \to X_{n-1} \qquad n > 0 \quad 0 \leqslant i \leqslant n$$
$$D_i^n = D_i : X_n \to X_{n+1} \qquad n \geqslant 0 \quad 0 \leqslant i \leqslant n$$

vérifiant les relations (2). La notion duale d'objet cosimplicial est souvent utile. Il est sans doute inutile d'expliciter les cas particuliers d'ensemble simplicial, de groupe simplicial, et de faire le lien avec les exemples précédents. Notons seulement que la terminologie "classique" parle de semisimplicial au lieu de simplicial, ce dernier nom étant réservé à une notion voisine qui semble vouée à disparaître.

Il faut tout de suite indiquer quelques constructions. Soient $X$ et $Y$ deux objets simpliciaux dans $\mathcal{C}$. On appelle q-morphismes de $X$ dans $Y$ une fonction $f$ qui à toute application croissante $\alpha$ de $[0 , n]$ dans $[0 , q]$ associe un morphisme $f(\alpha)$ de $X_n$ dans $Y_n$ ; on doit avoir de plus $f(\alpha\beta)\, X(\beta) = Y(\beta)\, f(\alpha)$

pour toute application croissante $\beta$ de $[0, m]$ dans $[0, n]$. On note $\mathfrak{F}_q(X, Y)$ l'ensemble des q-morphismes de $X$ dans $Y$ ; les q-morphismes se composent $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ définissant un q-morphisme $gf : X \to Z$. En outre, toute application croissante $\gamma$ de $[0, p]$ dans $[0, q]$ définit une application de $\mathfrak{F}_q(X, Y)$ dans $\mathfrak{F}_p(X, Y)$ par $f\gamma(\alpha) = f(\gamma\alpha)$ de sorte que $\mathfrak{F}(X, Y)$ apparaît comme un ensemble simplicial. Les q-morphismes les plus importants correspondent à $q = 0$ (on parlera alors de morphismes) et $q = 1$, auquel cas, on a les homotopies.

A l'objet simplicial $X$, on associe l'objet simplicial $\Gamma X$ défini par $(\Gamma X)_n = X_{n+1}$, les opérateurs $F_i^n : (\Gamma X)_n \to (\Gamma X)_{n-1}$ n'étant autre que les $F_i^{n+1} : X_{n+1} \to X_n$ et de même pour les $D_i^n$. Cette construction est l'analogue d'un espace de chemins. On définit de plus un morphisme $\gamma_X : \Gamma X \to X$ qui, en dimension $n$, soit le morphisme $F_{n+1}^{n+1}$ de $X_{n+1}$ dans $X_n$. Si dans $\mathcal{C}$ existent les produits finis, on peut associer à tout objet simplicial $Y$ un objet simplicial $WY$ de sorte qu'on ait

$$\mathfrak{F}_q(X, WY) = \mathfrak{F}_q(\Gamma X, Y)$$

pour tout $X$ et tout $q \geqslant 0$. De manière duale, si dans $\mathcal{C}$ existent les sommes finies, on définit l'objet simplicial $\hat{W}Y$ par la formule

$$\mathfrak{F}_q(\hat{W}Y, X) = \mathfrak{F}_q(Y, \Gamma X) \quad .$$

Ces constructions, introduites dans des cas particuliers par EILENBERG et MACLANE [5], correspondent aux notions topologiques de suspension et de joint. On peut aussi définir les cônes, etc.

Toutes ces définitions sont d'une grande simplicité, mais faute de les avoir posées en général, les auteurs qui ont traité de ces questions ont rencontré un certain nombre de difficultés de détail, certes non essentielles, mais qui obscurcissent beaucoup la théorie et compliquent les démonstrations.

Nous allons maintenant esquisser à grands traits les résultats les plus importants de la théorie, que nous grouperons en quatre rubriques indépendantes.

## 3. Algèbre simpliciale.

On suppose dans ce numéro que $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne. Si $X$ est un objet simplicial dans $\mathcal{C}$, on définit l'opérateur $d_n$ de $X_n$ dans $X_{n-1}$ comme la somme alternée $d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i F_i^n$ ; on a $d_n . d_{n+1} = 0$ d'après la formule (2), de sorte qu'on vient de définir un complexe de chaînes $X_*$ ; on pourra définir le groupe d'homologie $H_n(X)$ comme celui de $X_*$, i.e. le quotient du noyau de $d_n$ par l'image de $d_{n+1}$. La somme des images des opérateurs $D_i$ est un sous-complexe d'homologie triviale de $X_*$ et le complexe normalisé $X_N$ est le quotient de $X_*$ par ce sous-complexe ; on a donc $H_n(X) = H_n(X_N)$.

Mais il y a un autre sous-complexe de $X$ plus important ; c'est l'intersection $D(X)$ des images des opérateurs $F_i$ pour $i > 0$. Utilisant la construction $\Gamma X$ et la suite exacte

$$0 \to \tilde{\Gamma} X \to \Gamma X \xrightarrow{\gamma_X} X \to 0$$

on voit que l'on a $D_n(X) = (\tilde{\Gamma}^n X)_0$ et l'on en déduit que $D(X)$ a même homologie que $X$. A tout objet simplicial $X$ nous avons donc associé un complexe de chaînes $D(X)$ ; on montre alors qu'à tout complexe de chaînes $C_*$ on peut associer un objet simplicial $D'(C_*)$ de sorte qu'on ait la formule

$$\mathfrak{F}_0(D'(C_*)\ ,\ X) = \mathrm{Hom}(C_*\ ,\ D(X)) \quad ;$$

(les foncteurs $D$ et $D'$ sont transposés au sens de KAN). De plus, on montre [1], (théorème de Dold-Kan) que tout complexe de chaînes est isomorphe à un $D(X)$ et que tout objet simplicial est isomorphe à un $D'(C_*)$. Autrement dit, on a défini une équivalence entre les catégories d'objets simpliciaux et de complexes de chaînes.

Cette équivalence a été utilisée par DOLD et KAN pour transposer dans une des deux catégories une construction simple dans l'autre. DOLD a aussi pu définir les foncteurs dérivés d'un foncteur non nécessairement additif et en a tiré d'importantes applications pour les espaces $K(\Pi, n)$. Nous renvoyons pour les détails à l'exposé de DOLD au Séminaire Bourbaki [2].

Un autre résultat important est connu sous le nom de théorème d'Eilenberg-Zilber. Nous le présenterons sous une forme quelque peu plus générale qui s'est révélée utile en bien des occasions. Tout d'abord, un objet bisimplicial dans $\mathcal{C}$ est un bifoncteur contravariant de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{C}$ ; c'est la même chose qu'une suite double d'objets $X_{mn}$ $(m\ ,\ n \geqslant 0)$ et des opérateurs

$$F_i'^m\ X_{m,n} \to X_{m-1,n} \qquad D_i'^m\ X_{m,n} \to X_{m+1,n}$$

$$F_i''^n\ X_{m,n} \to X_{m,n-1} \qquad D_i''^n\ X_{m,n} \to X_{m,n+1}$$

les opérateurs "commutant aux opérateurs". Un tel objet bisimplicial $X$ définit un bicomplexe de chaînes $X_{**}$ avec $d' = \sum(-1)^i F'_i$, $d'' = \sum(-1)^i F''_i$ et aussi un objet simplicial $\Delta X$ (diagonale de $X$) par les formules

$$(\Delta X)_n = X_{nn}$$

$$F_i^n = F_i'^n F_i''^n, \quad D_i^n = D_i'^n D_i''^n$$

d'où un complexe de chaînes $(\Delta X)_*$. D'autre part, le bicomplexe de chaînes $X_{**}$ définit un opérateur de bord total $d = d' \pm d''$ d'où un complexe de chaînes noté $X_*$. Alors <u>les complexes de chaînes $X_*$ et $(\Delta X)_*$ sont homotopiquement équivalents</u>. On a des formules explicites pour l'équivalence en question.

Le résultat classique s'obtient par spécialisation à la catégorie $\mathcal{C}$ des $A$-modules où $A$ est un anneau commutatif. Si $X$ et $Y$ sont deux $A$-modules simpliciaux, on définit leur produit tensoriel qui est le module bisimplicial défini par

$$(X \otimes Y)_{m,n} = X_m \underset{A}{\otimes} Y_n$$

$$F'_i = F_i \otimes 1, \quad D'_i = D_i \otimes 1, \quad F''_i = 1 \otimes F_i, \quad D''_i = 1 \otimes D_i$$

et le module simplicial $\Delta(X \otimes Y)$ est connu sous le nom de produit cartésien $X \times Y$ de $X$ et $Y$. Si $A$ est un corps, le théorème d'Eilenberg-Zilber joint au théorème de Künneth donne un isomorphisme

$$H_n(X \times Y) \cong \sum_{i+j=n} H_i(X) \otimes H_j(Y) \quad . \tag{4}$$

Le théorème général d'Eilenberg-Zilber est aussi utile dans le calcul de certaines suites spectrales, et simplifie par exemple les calculs de HOCHSCHILD et SERRE sur la cohomologie des extensions de groupes.

## 4. <u>Homotopie</u>.

La plupart des notions qui suivent sont dues à KAN [10].

On remarque tout d'abord que la définition de l'homologie d'un groupe simplicial commutatif $X$ au moyen du complexe de chaînes $D(X)$ se généralise au cas d'un groupe simplicial non commutatif. Dans ce cas, on parlera d'homotopie. De manière précise, si $G$ est un groupe simplicial, on notera $\tilde{G}_n$ l'ensemble des éléments de $G_n$ annulés par $F_1^n, \ldots, F_n^n$ ; alors $F_o^n$ applique $\tilde{G}_n$ dans $\tilde{G}_{n-1}$ et $F_o^n(\tilde{G}_n)$ est un sous-groupe invariant du noyau de $F_o^{n-1} : \tilde{G}_{n-1} \to \tilde{G}_{n-2}$ ;

le groupe quotient se note $\pi_n(G)$ . Il est abélien pour $n \geqslant 1$ . Un homomorphisme simplicial $f : G \to G'$ définit un homomorphisme $f_* : \pi_n(G) \to \pi_n(G')$ qui ne dépend que de la classe d'homotopie de $f$ et l'on a une suite exacte d'homotopie associée à toute suite exacte

$$0 \to G \to G' \to G'' \to 0$$

de groupes simpliciaux. Ces propriétés et quelques autres de nature fonctorielle caractérisent d'ailleurs les foncteurs $\pi_n$ .

Pour généraliser la notion de groupe d'homotopie, il faut définir la notion de <u>fibré principal</u>. Si $X$ est un ensemble simplicial, un fibré principal de groupe $G$ et de base $X$ est un ensemble simplicial $E$ , muni d'une application $f : E \to X$ et sur lequel $G$ opère à droite (de manière simpliciale) ; on suppose que pour tout $n \geqslant 0$ , l'application $(x , g) \to (x , xg)$ est une bijection de $E_n \times G_n$ sur l'ensemble des paires $(x' , x'')$ dans $E_n$ telles que $f_n(x) = f_n(x')$ On note $H^1(X , e ; G)$ l'ensemble des classes de fibrés principaux de base $X$ et de groupe $G$ , munis d'un point base au-dessus du point $e \in X_0$ . On montre alors qu'il existe un groupe simplicial $\Pi(X ; e)$ défini à une homotopie près et tel que $H^1(X , e ; G)$ soit en correspondance bijective et naturelle avec les classes d'homotopies d'homomorphismes de $\Pi(X ; e)$ dans $G$ . On pose alors

$$\pi_n(X ; e) = \pi_{n-1}(\Pi(X ; e)) \quad .$$

Ce groupe $\Pi(X ; e)$ joue le rôle d'espace des lacets sur $X$ .

On doit à KAN la définition d'une classe de fibrés simpliciaux qui sont caractérisés par une propriété de relèvement analogue à celle de SERRE. Un fibré principal est un fibré au sens de KAN. Il n'en faut pas plus pour assurer que toutes les "fibres" ont même type d'homotopie et pour développer toute une théorie analogue à celle de la thèse de SERRE [14]. On a, par exemple, une suite spectrale des fibrés en homologie et cohomologie, une suite exacte d'homotopie pour les fibrés de Kan, etc. Cette dernière suite exacte est d'ailleurs la base d'une caractérisation axiomatique des groupes d'homotopie.

On peut alors développer de manière simpliciale tous les théorèmes connus sur l'homotopie : théorèmes de HUREWICZ, de J. H. C. WHITEHEAD, etc. D'ailleurs, on peut considérer que l'homotopie "topologique" est incluse dans cette homotopie "simpliciale". En effet, il est tout à fait raisonnable de <u>définir</u> les groupes d'homotopie d'un espace topologique $E$ comme ceux de son squelette singulier.

5. Algèbres d'Eilenberg-MacLane [4], [5], [6].

Soit $X$ un ensemble simplicial. Si $\Pi$ est un groupe abélien, on définit les n-cochaînes de $X$ à valeurs dans $\Pi$ comme les fonctions de $X_n$ dans $\Pi$ ; ces n-cochaînes forment un groupe commutatif $C^n(X ; \Pi)$ qui est la n-ième composante d'un groupe cosimplicial commutatif $C(X ; \Pi)$. La cohomologie de degré $n$ de ce groupe se note $H^n(X ; \Pi)$ ou encore $H^n_\Pi(X)$. On va étudier ces foncteurs $H^n_\Pi$ (à valeurs dans la catégorie des ensembles).

Tout d'abord, soit $G$ le groupe simplicial défini par $G_n = \Pi$ pour tout $n \geqslant 0$, les opérateurs $D_i$ et $F_i$ étant l'identité. On note $K(\Pi , n)$ le groupe simplicial $W^n G$. En outre, de la formule

$$\mathfrak{S}_q(\Gamma^n X ; G) = \mathfrak{S}_q(X ; W^n G)$$

on montre immédiatement que l'ensemble simplicial $K(\Pi , n)$ a la propriété suivante : $H^n(X ; \Pi)$ est naturellement isomorphe pour tout $X$, à l'ensemble des classes d'homotopies d'applications de $X$ dans $K(\Pi , n)$. On note $\mathcal{K}(\Pi , n)$ la classe des ensembles simpliciaux ayant cette propriété ; ils sont tous homotopiquement équivalents. La classe $\mathcal{K}(\Pi , n)$ contient le squelette singulier de tout espace topologique $E$ tel que $\pi_i(E) = 0$ pour $i \neq n$ et $\pi_n(E) = \Pi$.

Les groupes d'Eilenberg-MacLane sont les groupes $H^m(\Pi ; n ; G) = H^m(K(\Pi , n) ; G)$ Il est immédiat que ce groupe est isomorphe à l'ensemble des morphismes du foncteur $H^n_\Pi$ dans le foncteur $H^m_G$, c'est-à-dire des "constructions cohomologiques". On peut considérer les foncteurs $H^n_\Pi$ définis pour la catégorie des espaces topologiques, ou des ensembles simpliciaux ; le résultat est le même dans les deux cas. Par ailleurs, on a un homomorphisme de suspension

$$S : H^m(\Pi ; n ; G) \to H^{m+1}(\Pi ; n + 1 ; G)$$

qui est un isomorphisme dès que $n > 2m - 2$. Passant à la limite, on définit les groupes stables $A^k(\Pi ; G) = \varinjlim H^{n+k}(\Pi ; n ; G)$. Il faut noter que les groupes $H^n(\Pi ; 1 ; G)$ se définissent aussi pour $\Pi$ non abélien et ne sont autres que les groupes de cohomologie de $\Pi$ à valeurs dans $G$, maintenant bien connus, même, et surtout, des algébristes et géomètres "classiques".

H. CARTAN a déterminé complètement la structure des groupes d'Eilenberg-MacLane lorsque $\Pi = G$ est cyclique d'ordre premier $p$ (on le notera $\underset{\sim}{Z}_p$ ), et aussi lorsque $\Pi$ est de type fini et $G$ est cyclique infini. Les résultats sont faciles à formuler dans le premier cas, et se rattachent à l'algèbre de Steenrod ;

nous allons présenter sous une forme peut-être nouvelle les résultats de MILNOR [13] sur l'algèbre de Steenrod. On suppose $p \neq 2$ pour simplifier.

Tout d'abord pour $n$ fixé, la somme directe des $H^m(\underset{\sim}{Z}_p\,;\,n\,;\,\underset{\sim}{Z}_p)$ est une algèbre graduée qui est l'algèbre anticommutative libre engendrée par l'ensemble de ses éléments primitifs, qui correspondent aux opérations cohomologiques additives. Notons $\wp^{m,n}$ l'ensemble des éléments primitifs de degré $m$. La suspension définit un isomorphisme de $\wp^{m,n}$ sur $\wp^{m+1,n+1}$ donc on peut poser $\wp^{m,n} = Q^{n-m}$ et la composition des opérations cohomologiques définit sur la somme directe des $Q^{\ell}$ une structure d'algèbre graduée $Q$ (non anticommutative). Cette algèbre $Q$ est l'algèbre de Steenrod. On démontre alors que $Q^{\ell}$ est l'ensemble des transformations naturelles $H^*(A) \to H^*(A)$ augmentant le degré de $\ell$ unités et où $A$ parcourt la catégorie des anneaux cosimpliciaux commutatifs. Nous allons pour simplifier nous limiter à la description de la partie $Q^+$ de $Q$ formée des éléments dont les composantes de degré impair sont nulles.

Considérons un anneau commutatif $\Lambda$ et soit $A_\Lambda$ l'anneau cosimplicial des cochaînes du groupe $\underset{\sim}{Z}_p$ opérant trivialement sur $\Lambda$. L'algèbre $H^*(A_\Lambda)$ est l'anneau des polynômes en une variable $x$ de degré $2$ à coefficients dans $\Lambda$. Soit $P(x)$ un polynôme additif en $x$, c'est-à-dire de la forme

$$(5) \qquad P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^{p^i} \quad .$$

Soit alors $A$ un anneau commutatif cosimplicial. On peut alors définir pour tout $C \in H^*(A)$ un autre élément $C^P$ de $H^*(A)$ et l'on a les propriétés

$$(6) \qquad \begin{cases} (C + C')^P = C^P + C'^P & \\ (CC')^P = C^P . C'^P & \\ (C^P)^{P'} = C^{P''} & \text{avec } P''(x) = P'(P(x)) \\ x^P = P(x) & \end{cases}$$

et enfin pour tout homomorphisme cosimplicial $f : A \to B$, on a $f_*(C^P) = f_*(C)^P$.

En particulier, pour $P(x) = x + ax^p$ on a $C^P = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \wp_p^i(C)$ où les $\wp_p^i$ sont les puissances réduites de Steenrod avec la normalisation de SERRE et THOM. Finalement $Q^+$ admet pour base des éléments $\wp_p^{(\alpha)}$ où $(\alpha)$ parcourt l'ensemble des suites d'entiers $\alpha_i \geqslant 0$ nuls sauf un nombre fini, base définie par la relation

$$(7) \qquad C^P = \sum_{(\alpha)} \Big( \prod_{i=0}^{\infty} a_i^{\alpha_i} \Big) \wp_p^{(\alpha)}(C)$$

lorsque $P$ est de la forme (5).

6. Espaces fibrés universels.

Au n° 4, on a vu que $H^1(X ; e ; G)$ considéré comme foncteur en $G$ est "représentable". Il en est de même si on le considère comme foncteur en $X$. De manière précise [12], pour tout groupe simplicial $G$, on peut trouver un ensemble simplicial $E_G$ fibré principal de base $B_G$ et de groupe $G$ avec la propriété suivante : pour tout ensemble simplicial $X$, tout fibré principal $E$ de base $X$ et de groupe $G$ est isomorphe à un fibré $f^*(E_G)$ pour une application $X \to B_G$, et $f$ est définie à homotopie près par cette condition.

On dit que $E_G$ est un fibré principal universel, et il est défini à une homotopie près. On a $H^i(E_G ; \Pi) = 0$ pour $i > 0$ et tout groupe commutatif $\Pi$ et les groupes de cohomologie $H^i(B_G ; \Pi)$ ne dépendant à isomorphisme unique près que de $G$ et $\Pi$. On peut les noter $\mathcal{H}^i(G ; \Pi)$. On a alors pour tout fibré principal $E$ de groupe $G$ de base $X$ un homomorphisme bien déterminé de $\mathcal{H}^i(G ; \Pi)$ dans $H^i(X ; \Pi)$ dont l'image se compose des "classes caractéristiques". On peut aussi considérer que $\mathcal{H}^i(G ; \Pi)$ est l'ensemble des morphismes de foncteurs $H^1(. ; G) \to H^i_\Pi$, ce qui l'apparente à un groupe d'Eilenberg-MacLane. D'ailleurs aussi bien dans l'étude des fibrés universels que dans celle des groupes d'Eilenberg-MacLane par la méthode de SERRE [15], l'outil essentiel est un théorème de Borel sur les suites spectrales de fibrés acycliques.

Jusqu'à présent, nous n'avons mentionné que les fibrés principaux. Mais en analogie avec la théorie "topologique" on peut procéder à l'étude des fibrés au sens de EHRESMANN avec "fibre-type" et des "fibrés associés à un fibré principal". Alors pour tout groupe simplicial $G$ et tout ensemble simplicial $F$ sur lequel $G$ opère à gauche, soit $\mathcal{E}_{G,F}$ le fibré de base $B_G$, groupe $G$, fibré $F$ associé au fibré universel $E_G$. Les groupes de cohomologie $H^i(\mathcal{E}_{G,F} ; \Pi)$ que l'on peut noter $\mathcal{H}^i(G ; F , \Pi)$ ne dépendent que de $G$, $F$, $\Pi$ mais non de $E_G$. De plus, pour tout fibré $E$ de base $X$, groupe $G$, fibre $F$, on a un homomorphisme caractéristique de $\mathcal{H}^i(G ; F ; \Pi)$ dans $H^i(E ; \Pi)$.

En transformant quelque peu un résultat de KOSZUL [11], on peut définir les groupes $\mathcal{H}^i(G ; F ; \Pi)$ de la manière suivante. Tout d'abord on définit la catégorie abélienne $\mathfrak{M}$ des groupes commutatifs cosimpliciaux $M$ sur lesquels le groupe simplicial $G$ opère à droite. Pour un tel $M$, on définit $H^0_G(M)$ comme le groupe des éléments de $M_0$ qui sont invariants pour $G_0$ et annulés pour $F_0 - F_1$ (qui applique $M_0$ dans $M_1$). On notera alors $H^i_G$ le i-ième foncteur dérivé de $H^0_G$, foncteur qui peut se calculer pour un groupe de cochaînes analogue au cas usuel d'un groupe opérant sur un groupe commutatif. Alors le résultat de KOSZUL peut s'écrire sous la forme suivante

$$\mathcal{H}^i(G ; F ; \Pi)) = H^i_G(C^*(F ; \Pi))$$

où $C^*(F ; \Pi)$ est, rappelons-le, le groupe des cochaînes de l'ensemble simplicial $F$, à valeurs dans $\Pi$.

## 7. Applications diverses.

Il appartient à l'avenir de révéler de nouveaux chapitres intéressants. Je ne voudrais en signaler qu'un seul qui me semble prometteur pour la géométrie algébrique à la Grothendieck, aussi bien que pour le corps des classes ; il conviendrait de faire le mariage. [Il me tient à coeur, étant à l'origine de mon intérêt pour la théorie simpliciale].

Soit $A$ une algèbre commutative sur un anneau commutatif $K$. On lui associe un anneau cosimplicial $\mathfrak{A}$ comme suit ; $\mathfrak{A}_n$ est le produit tensoriel de $n + 1$ exemplaires de $A$ et l'on a

$$(8) \quad \begin{cases} F_i[a_o , \dots , a_n] = [a_o , \dots , a_{i-1} , 1 , a_i , \dots , a_n] \\ D_i[a_o , \dots , a_n] = [a_o , \dots , a_{i-1} , a_i a_{i+1} , a_{i+2} , \dots , a_n] \end{cases}$$

où l'on a noté $[a_o , \dots , a_n]$ le produit tensoriel $a_o \otimes \dots \otimes a_n$. On transforme alors $\mathfrak{A}$ en un groupe simplicial commutatif par un foncteur $T$ de la catégorie des $K$-algèbres commutatives dans celle des groupes commutatifs et l'on étudie les groupes $H^i(T\mathfrak{A})$. Lorsque $A$ est un corps galoisien fini sur le corps $K$ et si $T$ est le foncteur qui associe à une $K$-algèbre commutative $B$ le groupe $G_B$ des points à coordonnées dans $B$ d'un groupe algébrique commutatif $G$ (pour simplifier, supposer que $G$ est un groupe de matrices défini par des équations algébriques), alors $H^i(T\mathfrak{A})$ n'est autre que le $i$-ième groupe de cohomologie du groupe de Galois de $A/K$ opérant sur $G_A$.

On pourra consulter à ce sujet un exposé de GROTHENDIECK [9].

BIBLIOGRAPHIE

[1] DOLD (Albrecht). - Homology of symmetric products and other functors of complexes, Annals of Math., Series 2, t. 68, 1958, p. 54-80.

[2] DOLD (Albrecht). - Les foncteurs dérivés d'un foncteur non additif, Séminaire Bourbaki, t. 11, 1958/59, n° 170, 7p.

[3] EILENBERG (Samuel). - Singular homology theory, Annals of Math., Series 2, t. 45, 1944, p. 407-447.

[4] EILENBERG (S.) and MACLANE (S.). - On the groups $H(\Pi, n)$, I., Annals of Math., Series 2, t. 58, 1953, p. 55-106.

[5] EILENBERG (S.) and MACLANE (S.). - On the groups $H(\Pi, n)$, II., Annals of Math., Series 2, t. 60, 1954, p. 49-139.

[6] EILENBERG (S.) and MACLANE (S.). - On the groups $H(\Pi, n)$, III., Annals of Math., Series 2, t. 60, 1954, p. 513-557.

[7] EILENBERG (S.) and ZILBER (J. A.). - Semi-simplicial complexes and singular homology, Annals of Math., Series 2, t. 51, 1950, p. 499-513.

[8] GODEMENT (Roger). - Topologie générale et théorie des faisceaux. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1252 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 13).

[9] GROTHENDIECK (Alexander). - Techniques de descente et théorèmes fondamentaux d'existence en géométrie algébrique, Séminaire Bourbaki, t. 12, 1959/60, n° 190, 29 p.

[10] KAN (Daniel M.). - Abstract homotopy, III., Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 42, 1956, p. 419-421 ; IV., Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 42, 1956, p. 542-544.

[11] KOSZUL (Jean-Louis). - Multiplicateurs et classes caractéristiques, Trans. Amer. math. Soc., t. 89, 1958, p. 256-266.

[12] MILNOR (John). - Construction of universal bundles, I., Annals of Math., Series 2, t. 63, 1956, p. 272-284 ; II., Annals of Math., Series 2, t. 63, 1956, p. 430-436.

[13] MILNOR (John). - The Steenrod algebra and its dual, Annals of Math., Series 2, t. 67, 1958, p. 150-171.

[14] SERRE (Jean-Pierre). - Homologie singulière des espaces fibrés, Applications, Annals of Math., t. 54, 1951, p. 425-505 (Thèse Sc. math. Paris. 1951).

[15] SERRE (Jean-Pierre). - Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane, Comment. Math. Helvet., t. 27, 1953, p. 198-232.