SHIING-SHEN CHERN

Les hypersurfaces dans l'espace euclidien

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. nº 193, p. 349-357
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__349_0>

Séminaire BOURBAKI
12e année, 1959/60, n° 193

Février 1960

LES HYPERSURFACES DANS L'ESPACE EUCLIDIEN

par Shiing-Shen CHERN

1. Définitions et considérations locales.

Une hypersurface dans l'espace euclidien est l'ensemble d'une variété différentiable (connexe) M à n dimensions et d'une application différentiable $x : M \longrightarrow E$ de M dans l'èspace euclidien E à $n+1$ dimensions telle que le jacobien soit partout de rang n. Pour éviter le cas des courbes planes qui ont des propriétés spéciales, nous supposerons que $n \geqslant 2$. L'hypersurface s'appelle plongée ("imbedded") si l'application x est biunivoque. Nous ne nous intéresserons pas à la question de la classe de différentiabilité et la supposerons être soit égale à 2, soit aussi haute qu'on veut. On dit que l'hypersurface est complète si sa métrique riemannienne induite est complète.

Soit M orientée. Alors à chaque point $p \in M$ on peut attacher le vecteur normal unitaire $\xi(p)$; on désigne par $\xi : M \longrightarrow S_0$ l'application sphérique de Gauss, où S_0 est l'hypersphère unitaire avec son centre à l'origine de E ; à partir des fonctions $x(p)$, $\xi(p)$, $p \in M$, à valeurs vectorielles, on introduit les formes différentielles quadratiques ordinaires

$$(1) \qquad I = dx\, dx \ , \quad II = dx\, d\xi \ , \quad III = d\xi\, d\xi \quad ,$$

dites formes fondamentales, dont la première est définie positive. Les valeurs propres $k_1(p)$, ... , $k_n(p)$ de II par rapport à I , qui sont toujours réelles, s'appellent les courbures principales. Leurs interprétations géométriques (théorèmes de Meusnier et d'Euler) sont bien connues. On pose

$$(2) \qquad \begin{aligned} \binom{n}{r} \rho_r &= \sum k_1 , \ldots , k_r \quad , \\ \rho_n &= K = \text{courbure de Gauss-Kronecker,} \end{aligned}$$

où la somme désigne la r-ième fonction symétrique élémentaire. Si l'on renverse l'orientation de M , K garde ou change son signe, suivant que n est pair ou impair.

En utilisant les repères orthonormaux $e_1(p)$, ... , $e_n(p)$ par rapport à la métrique induite sur M , on peut écrire

$$(3)\qquad \begin{aligned} dx &= \omega_1 e_1 + \dots + \omega_n e_n , \\ d\xi &= \theta_1 e_1 + \dots + \theta_n e_n , \end{aligned}$$

où l'on identifie les vecteurs tangents de M avec leurs images dans E. Les ω_i, θ_i sont alors des formes différentielles linéaires sur l'espace fibré principal de M (avec le groupe structural $SO(n)$), et les ω_i sont linéairement indépendantes. Parce que $\xi . dx = 0$, on a $d\xi \wedge dx = 0$ c'est-à-dire

$$(4)\qquad \omega_1 \wedge \theta_1 + \dots + \omega_n \wedge \theta_n = 0 .$$

Remarquons qu'on a

$$(5)\qquad \begin{aligned} I &= \omega_1^2 + \dots + \omega_n^2 , \\ II &= \theta_1 \omega_1 + \dots + \theta_n \omega_n , \\ III &= \theta_1^2 + \dots + \theta_n^2 . \end{aligned}$$

Un problème fondamental (problème d'unicité) est le suivant : soient deux hypersurfaces $x : M \to E$, $x' : M \to E$. Existe-t-il un mouvement T (propre ou impropre) tel que le diagramme

$$(6)\qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "x'"'] & E \arrow[d, "T"] \\ & E \end{tikzcd}$$

soit commutatif, c'est-à-dire tel que $x' = T \circ x$? Une condition nécessaire et suffisante est que $I = I'$, $II = \pm II'$. C'est un théorème local. Beaucoup de problèmes en géométrie différentielle des hypersurfaces consistent à donner des conditions suffisantes moins fortes.

2. Hypersurfaces dont la courbure de Gauss-Kronecker garde un signe constant.

Dans le cas n impair, on peut, en renversant l'orientation de M si nécessaire, supposer que $K \geqslant 0$. D'autre part, si M est compact, on a, pour n pair, l'inégalité $K \geqslant 0$, parce que ce sera le cas au point où l'une des fonctions coordonnées prend son maximum.

Une classe importante d'hypersurfaces est celle où M est compact et $K > 0$. Dans ce cas, l'application ξ de Gauss est localement biunivoque et $\xi(M) = S_0$. Par un raisonnement bien connu d'HADAMARD, M sera un espace de revêtement de S_0. Comme S_0 est simplement connexe, ξ est un homéomorphisme. Il est facile de démontrer que M est plongé dans E et que $x(M)$ est la frontière d'un domaine convexe. L'hypersurface s'appelle strictement convexe. Il est commode, dans ce cas, d'identifier M et S_0 et de définir l'hypersurface par l'application $x : S_0 \longrightarrow E$; pour $\xi \in S_0$ le point $x(\xi)$ est le point de contact de l'hyperplan tangent normal à ξ . La fonction $h = x.\xi$ est appelée la fonction de support.

Si l'on admet la valeur zéro pour K , la situation est beaucoup plus compliquée. D'abord, il n'est pas vrai qu'une hypersurface compacte de dimension $n \geqslant 3$ avec $K \geqslant 0$ soit la frontière d'un domaine connexe, même si elle est plongée [2]. Il faut faire une étude des points de M où K est égal à zéro. Pour $p \in M$, soit $r(p)$ le rang du déterminant jacobien de l'application ξ , et soit $r^*(p)$ le plus grand nombre entier s tel que tout voisinage de p contient un point p^* avec $r(p^*) = s$; on a, par définition, $r(p) \leqslant r^*(p)$. Soit S_m l'ensemble de tous les points $p \in M$ tels que $r^*(p) \leqslant m \leqslant n$; S_m est alors ouvert. Le lemme suivant est fondamental :

LEMME. - *Soit* $x : M \longrightarrow E$ *une hypersurface dont la courbure* K *est identiquement nulle. Soit* $p_0 \in M$ *un point tel que* $r(p_0) = r^*(p_0) = m < n$. *Soient* B *l'ensemble des points* p *tel que* $\xi(p) = \xi(p_0)$ *et* N *la composante connexe de* p_0 *dans* $B \cap S_m$; N *est alors relativement ouvert dans* B *et est une sous-variété de dimension* $n - m$ *de* M *passant par* p_0 , *qui possède les propriétés suivantes :*

1° $x(N)$ *est dans un espace linéaire* π *à* $n - m$ *dimensions ; l'application* $x : N \longrightarrow \pi$ *est un homéomorphisme local.*

2° $r^*(p) = r(p) = m$ *pour tout* $p \in N$.

La démonstration de ce lemme utilise les équations de structure de l'espace euclidien [2], [5].

THÉORÈME 2, 1. (HARTMAN-NIRENBERG). - *Supposons que la courbure* K *garde un signe constant. Alors l'application* ξ *est monotone, c'est-à-dire que, pour tout domaine borné* D *avec la frontière* ∂D , *la frontière* $\partial(\xi(D))$ *de* $\xi(D)$ *est contenue dans* $\xi(\partial D)$.

THÉORÈME 2, 2 (CHERN-LASHOF). - *Soit* $x : M \longrightarrow E$ *une hypersurface orientable compacte de dimension* n . *Pour qu'elle soit plongée comme une hypersurface convexe, il faut et il suffit que* $K \geqslant 0$ *et que le degré de l'application sphérique* ξ *soit égal à* ± 1 . *La dernière condition peut être supprimée si* $n = 2$.

On a aussi des conclusions pour les hypersurfaces avec $K \leqslant 0$. Écrivons les vecteurs de E sous la forme $x = (y , z)$, où $y = (x^1 , \dots , x^n)$, $z = x^{n+1}$, et appelons l'axe des z l'axe vertical. Un ensemble A_1 de E s'appelle sur (resp. sous) l'ensemble A_2 de E, si, pour tout couple de points $(y, z_1) \in A_1$, $(y, z_2) \in A_2$, avec le même y, on a l'inégalité $z_1 \geq z_2$ (resp. $z_1 \leq z_2$). On entend par pente d'une hypersurface dans E la valeur absolue de la tangente de l'angle entre la normale et l'axe vertical.

THÉORÈME 2, 3 (RADO-HARTMAN-NIRENBERG). - *Soit D un domaine convexe borné dans l'espace à n dimensions des y. Soit $z(y)$, $y \in D$, une fonction de classe C_2 sur D et de classe C_1 sur $\bar{D}$, dont la restriction à D définit par l'application $y \to (y, z)$, une hypersurface dans E. Supposons que, en chaque point y de D, le Hessien $(z_{ij}(y))$, où $z_{ij} = \partial^2 z/\partial y_i \partial y_j$, possède des valeurs propres non négatives et non positives et que $\det(z_{ij})$ ne change pas de signe dans D. (Si n est pair, ces conditions sont satisfaites, par exemple, si $\det(z_{ij}) \leq 0$ dans D). Soit μ un nombre ayant la propriété suivante : par tout point de $z(\partial D)$ passent deux hyperplans, tous deux de pente μ, tels que $z(\partial D)$ soit sur l'un et sous l'autre. Alors*

$$|\operatorname{grad} z(y)| \leq \mu, \quad y \in D \quad .$$

3. Hypersurfaces dont la seconde forme fondamentale est semi-définie.

Une condition plus forte que la constance du signe de K est la condition que la seconde forme fondamentale II soit semi-définie ou définie. Cette condition ne dépend que de la métrique riemannienne induite, parce que les mineurs d'ordre 2 de II par rapport à un repère s'expriment avec les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel. (Conséquence des équations de structure de E). Un cas simple est celui dans lequel II est de rang ≤ 1. Par la remarque précédente, la métrique riemannienne induite sur M est localement isométrique à celle de l'espace euclidien, et inversement. La nature de l'hypersurface est décrite par le théorème suivant.

THÉORÈME 3, 1. (HARTMAN-NIRENBERG). - *Soit $x : M \to E$ une hypersurface complète telle que la seconde forme fondamentale II soit de rang ≤ 1. Alors $x(p)$ a une paramétrisation globale*

$$x(p) = a_1 t_1 + \dots + a_{n-1} t_{n-1} + b(t_n) \qquad (7)$$

où $a_1, \dots, a_{n-1}$, $b(t_n)$ sont des vecteurs dans l'espace à $n+1$ dimensions, les a_i, $1 \leq i \leq n-1$, étant des vecteurs constants, et $a_1, \dots, a_{n-1}$, $\frac{\partial b}{\partial t_n}$ étant orthonormaux. Géométriquement cela signifie que l'hypersurface est un cylindre engendré par des espaces linéaires à $n-1$ dimensions.

Ce théorème montre que l'hypersurface n'est pas nécessairement convexe si la forme II est semi-définie. Cependant, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 3, 2 (SACKSTEDER). - Supposons que la seconde forme fondamentale d'une hypersurface complète $x : M \to E$ soit semi-définie partout et définie en un point. Alors l'hypersurface est plongée dans E, $x(M)$ est la frontière d'un domaine convexe, et M est homéomorphe soit à la sphère, soit à l'espace euclidien à n dimensions.

Ce théorème généralise des théorèmes de Stoker et Van Heijenoort, et la dernière partie du théorème 2, 2. Sa démonstration est assez longue.

4. Formules intégrales.

Pour les hypersurfaces compactes, il y a des formules intégrales, qui ont des conséquences importantes. Ces formules tiennent à l'existence de certaines formes différentielles extérieures non fermées sur M. Pour être plus spécifique, soient x, $x' : M \to E$ deux hypersurfaces. Posons

$$\begin{aligned}
A_{rs} &= (x\ ,\ \xi\ ,\ \underbrace{d\xi\ ,\ \ldots\ ,\ d\xi}_{n-1-(r+s)}\ ,\ \underbrace{dx\ ,\ \ldots\ ,\ dx}_{r}\ ,\ \underbrace{dx'\ ,\ \ldots\ ,\ dx'}_{s}) \quad , \\
A'_{rs} &= (x'\ ,\ \xi\ ,\ d\xi\ ,\ \ldots\ ,\ d\xi\ ,\ dx\ ,\ \ldots\ ,\ dx\ ,\ dx'\ ,\ \ldots\ ,\ dx') \quad , \\
B_{rs} &= (x\ ,\ x'\ ,\ d\xi\ ,\ \ldots\ ,\ d\xi\ ,\ dx\ ,\ \ldots\ ,\ dx\ ,\ dx'\ ,\ \ldots\ ,\ dx') \quad , \\
&\qquad\qquad 0 \leq r+s \leq n-1 \quad , \\
D_{uv} &= (\xi\ ,\ d\xi\ ,\ \ldots\ ,\ d\xi\ ,\ dx\ ,\ \ldots\ ,\ dx\ ,\ dx'\ ,\ \ldots\ ,\ dx') \quad , \\
&\qquad\qquad 0 \leq u+v \leq n \quad ,
\end{aligned} \tag{8}$$

où $\xi(p)$, $p \in M$, est le vecteur normal unitaire à $x(p)$.

Ces expressions sont définies comme suit : soit V un espace vectoriel réel à $n+1$ dimensions, pour lequel on a choisi un générateur ζ de $\Lambda^{n+1}(V)$. Supposons que $z_1, \ldots, z_k$ soient des fonctions différentiables, à valeurs dans V sur une variété M de dimension m, et que $\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_{n+1}$ soient des formes différentielles linéaires, aussi à valeurs dans V. Chacune de ces dernières définit, pour un champ L de vecteurs dans M, une fonction vectorielle dans M, que nous désignerons par $\varphi_i(L)$. Nous définissons $(z_1, \ldots, z_k, \varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_{n+1})$ comme étant la forme différentielle extérieure Φ de degré $n-k+1$ dans M, telle que, pour $n-k+1$ champs $L_{k+1}, \ldots, L_{n+1}$ dans M, la formule suivante soit valable :

$$\Phi(L_{k+1}, \ldots, L_{n+1})\zeta = \frac{1}{(n-k+1)!} \sum_{\lambda} (\operatorname{sgn} \lambda)\, z_1 \wedge \ldots \wedge z_k \wedge \varphi_{k+1}(L_{\lambda(k+1)}) \wedge \ldots \wedge \varphi_{n+1}(L_{\lambda(n+1)}) ,$$

où λ est une permutation de $k+1, \ldots, n+1$ et où la sommation est étendue à toutes les permutations. Par définition, A_{rs}, A'_{rs}, B_{rs} sont des formes différentielles extérieures de degré $n-1$ sur M, tandis que les D_{uv} sont de degré n ; les r, s ou u, v désignent respectivement les nombres de dx et de dx' dans ces expressions.

Soient

$$h(p) = x(p).\xi(p) , \quad h'(p) = x'(p).\xi(p) \tag{9}$$

les fonctions de support. Par dérivation extérieure, on a

$$\begin{aligned} dA_{rs} &= hD_{rs} - D_{r+1,s} , \\ dA'_{rs} &= h' D_{rs} - D_{r,s+1} , \\ dB_{rs} &= hD_{r,s+1} - h' D_{r+1,s} , \quad 0 \leqslant r+s \leqslant n-1 . \end{aligned} \tag{10}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} &\int hD_{rs} - D_{r+1,s} = 0 , \\ &\int h' D_{rs} - D_{r,s+1} = 0 , \\ &\int hD_{r,s+1} - h' D_{r+1,s} = 0 , \quad 0 \leqslant r+s \leqslant n-1 , \end{aligned} \tag{11}$$

les intégrations étant sur M.

On peut exprimer ces formules plus explicitement et les appliquer aux questions géométriques dans le cas des hypersurfaces strictement convexes. Comme dans le paragraphe 2, on identifie M et S_o et on oriente M de telle manière que II soit aussi définie positive. Il suit de (4) qu'on peut poser

$$\omega_i = \sum_k \lambda_{ik} \theta_k \tag{12}$$

où (λ_{ik}) est une matrice symétrique définie positive. Soit (λ'_{ik}) la matrice correspondante de la deuxième hypersurface. Avec les variables arbitraires y, y' posons

$$\det(y\lambda_{ik} + y'\lambda'_{ik} + \delta_{ik}) = \sum_{0 \leqslant r+s \leqslant n} \frac{n!}{r!\, s!\,(n-r-s)!} y^r y'^s P_{rs} ; \tag{13}$$

$P_{rs}(\lambda, \lambda')$ est un polynôme en les λ_{ik}, λ'_{ik}, respectivement homogène des degrés r et s. En particulier, $P_{ro}(\lambda, \lambda') = P_r(\lambda)$ est la r-ième fonction symétrique élémentaire des rayons de courbure principaux de la première hypersurface. Dans ces notations, les formules intégrales (11) s'écrivent

$$\begin{aligned} &\int (hP_{rs} - P_{r+1,s})\, dV = 0 , \\ (14) \qquad &\int (h'\, P_{rs} - P_{r,s+1})\, dV = 0 , \\ &\int (hP_{r,s+1} - h'\, P_{r+1,s})\, dV = 0 , \quad 0 \leq r + s \leq n - 1 , \end{aligned}$$

ou dV est l'élément de volume de S_o. On en déduit

$$(15) \qquad 2\int h(P_{or} - P_{r-1,1})\, dV = \int \left\{ h'(P_{1,r-1} - P_{ro}) - h(P_{r-1,1} - P_{or}) \right\} dV .$$

5. Théorèmes d'unicité.

Nous allons appliquer la formule (15) pour démontrer les théorèmes d'unicité suivants :

THÉORÈME 5, 1 (ALEKSANDROV-FENCHEL-JESSEN). - Deux hypersurfaces compactes et strictement convexes ne diffèrent que par une translation, si la fonction P_r pour une certaine valeur de r, $1 \leq r \leq n$, prend la même valeur aux points avec le même vecteur normal.

THÉORÈME 5, 2 (CHERN-HANO-HSIUNG). - Si deux hypersurfaces compactes et strictement convexes satisfont aux conditions

$$(16) \qquad P_{r-1}(p) \leq P_{r-1}(p') , \quad P_r(p) \geq P_r(p') , \quad 2 \leq r \leq n ,$$

aux points p, $p' \in M$ avec le même vecteur normal, elles ne diffèrent que par une translation.

COROLLAIRE du théorème 5, 2. - Supposons qu'il y ait, pour une hypersurface compacte et strictement convexe, une constante c telle que

$$(17) \qquad P_{r-1}^{1/r-1}(p) \geq c \geq P_r^{1/r}(p) .$$

Alors l'hypersurface est une hypersphère.

Pour les démonstrations de ces théorèmes, on a besoin des lemmes algébriques suivants :

LEMME 5, 1 (GÅRDING). - Pour le polynôme $P_r(\lambda) = P_{ro}$ défini dans (13), soit $P_r(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)})$ la forme multilinéaire symétrique, telle que

$P_r(\lambda, \dots, \lambda) = P_r(\lambda)$. On a l'inégalité

$$P_r(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)}) \geqslant P_r(\lambda^{(1)})^{1/r} \dots P_r(\lambda^{(r)})^{1/r} \quad , \tag{18}$$

pour des matrices $(\lambda^{(1)}_{ik})$, ... , $(\lambda^{(r)}_{ik})$ symétriques définies positives. L'inégalité devient une égalité, si et seulement si les matrices sont proportionnelles deux à deux.

LEMME 5, 2. - Soient (λ_{ik}) , (λ'_{ik}) deux matrices symétriques définies positives telles que

$$P_{r-1}(\lambda) \leqslant P_{r-1}(\lambda') \ , \quad P_r(\lambda) \geqslant P_r(\lambda') \ , \quad 2 \leqslant r \leqslant n \quad . \tag{19}$$

Alors on a

$$P_r(\lambda) + P_r(\lambda') - 2P_{r-1,1}(\lambda, \lambda') \leqq 0 \quad . \tag{20}$$

Esquisse de la démonstration du théorème 5, 1. - Il suffit de démontrer que $(\lambda_{ik}) = (\lambda'_{ik})$. On choisit l'origine de E de sorte que $h > 0$. L'hypothèse du théorème et le lemme 5, 1 entraînent que $P_{or} - P_{r-1,1} \leq 0$. Il s'ensuit que le second membre de (15) est ≤ 0 . Mais le dernier est anti-symétrique par rapport aux deux hypersurfaces ; il est alors égal à zéro. Parce que la quantité sous le signe somme du premier membre de (15) garde un signe constant, elle est identiquement nulle. Le théorème résulte du lemme 5, 1.

Esquisse de la démonstration du théorème 5, 2. - On déduit de (14) la formule intégrale

$$\int_{S_o} \left\{(P_{ro} + P_{or} - 2P_{r-1,1}) + (P_{or} - P_{ro}) + 2h'(P_{r-1,o} - P_{o,r-1})\right\} dV = 0 \quad . \tag{21}$$

On peut supposer $h' > 0$. L'hypothèse et le lemme 5, 2 montrent que la quantité sous le signe somme de la formule précédente garde le même signe. En particulier, on a $P_{or} = P_{ro}$ identiquement. Le théorème est alors une conséquence du théorème 5, 1.

REMARQUE. - Un avantage des démonstrations des théorèmes d'unicité par des formules intégrales est le fait qu'elles s'étendent facilement aux hypersurfaces à bord.

6. Les travaux d'A. D. ALEKSANDROV.

Une méthode puissante pour démontrer les théorèmes d'unicité a été développée par A. D. ALEKSANDROV. Elle s'appuie sur des théorèmes d'unicité des équations elliptiques aux dérivées partielles et s'applique aux hypersurfaces plongées, non nécessairement convexes. Citons un de ces théorèmes :

THÉORÈME 6, 1 (ALEKSANDROV). - Soit $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction de n variables assujettie à la condition que $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} > 0$, $1 \leq i \leq n$. Soient $k_1, \ldots, k_n$ les courbures principales d'une hypersurface compacte plongée. Si $\Phi(k_1, \ldots, k_n)$ est constant, l'hypersurface est une hypersphère.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALEKSANDROV (A. D.). - Théorèmes globaux d'unicité des surfaces [en russe], Vestnik Leningradskogo Universiteta, I : 1956, n° 19, p. 5-17 ; II : 1957, n° 7, p. 15-44 ; III : 1958, n° 7, p. 14-26 ; IV : 1958, n° 13, p. 27-34 ; V : 1958, n° 19, p. 5-8 ; VI : 1959, n° 1, p. 5-13.

[2] CHERN (S.-S.) and LASHOF (R. K.). - On the total curvature of immersed manifolds, I : Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 306-318 ; II : Michigan math. J., t. 5, 1958, p. 5-12.

[3] CHERN (S.-S.). - Integral formulas for hypersurfaces in Euclidean space and their applications to uniqueness theorems, J. Math. and Mech., t. 8, 1959, p. 947-955.

[4] CHERN (S.-S.), HANO (I.) and HSIUNG (C. C.). - A uniqueness theorem on closed convex hypersurfaces in Euclidean space (à paraître).

[5] HARTMAN (P.) and NIRENBERG (L.). - On spherical image maps whose Jacobians do not change sign (à paraître).

[6] SACKSTEDER (R.). - On local and global properties of convex sets and hypersurfaces (Thèse Sc. math. Johns Hopkins Univ. Baltimore. 1960).