GEORGES REEB

Sur les feuilletages analytiques

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. nº 192, p. 339-345
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__339_0>

Séminaire BOURBAKI
12e année, 1959/60, n° 192

Décembre 1959

SUR LES FEUILLETAGES ANALYTIQUES

par Georges REEB

(d'après la thèse de André HAEFLIGER [1])

INTRODUCTION. - Les résultats exposés ici sont (presque) tous énoncés et démontrés dans les 15 dernières pages de la thèse de HAEFLIGER.

Il est question ici des propriétés des feuilletages, dues à la conjonction des deux circonstances suivantes :

(i) Les feuilletages considérés sont analytiques (réels).

(ii) Les feuilletages considérés sont de co-dimension un.

1. Définition des variétés feuilletées, et rappel de certaines notions.

DÉFINITION. - Une structure de variété feuilletée de dimension p, ou de co-dimension $n - p$, de classe C_∞, C_α (analytique réelle) ou Γ_α (analytique complexe) sur une variété $\mathcal{V}_n$ de classe C_∞, C_α ou Γ_α est définie par la donnée d'un système de Pfaff Σ, complètement intégrable, de rang $n - p$ en tout point, de classe C_∞, C_α ou Γ_α sur $\mathcal{V}_n$.

On abrégera la locution "structure de variété feuilletée..." en $(\mathcal{V}_{n,n-p}, C, \Sigma)$-structure.

Un système différentiel ordinaire (Σ), sans singularités, fournit évidemment une structure feuilletée de dimension 1. Une forme de Pfaff ω sans singularités, de classe appropriée, vérifiant la condition de complète intégrabilité $\omega \wedge d\omega = 0$, définie sur $\mathcal{V}_n$, munit $\mathcal{V}_n$ d'une structure $(\mathcal{V}_n, 1, C, \omega)$. La réciproque est vraie à une question d'orientabilité près.

La forme ω définie sur S_3 : $[x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2]$ par les relations :

$$
(1) \qquad \omega = \begin{cases} d(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2 - 1)(x\,dy - y\,dx) & \text{si } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \\ d(z^2 + t^2) + (z^2 + t^2 - 1)(z\,dt - t\,dz) & \text{si } 1 \leq z^2 + t^2 \leq 2 \end{cases}
$$

est complétement intégrable, sans singularités (on pourrait la remplacer par une forme de classe C_∞ en remplaçant $(x^2 + y^2 - 1)$ et $(z^2 + t^2 - 1)$ par $\varphi(x^2 + y^2 - 1)$ et $\varphi(z^2 + t^2 - 1)$ où φ est une fonction qui s'annule en 0 seulement et dont toutes les dérivées en 0 sont 0.

Le système différentiel Σ qui définit $(\mathcal{V}_{n,n-p}\ ,\ C\ ,\ \Sigma)$ peut, dans des cartes locales cubiques appropriées, (on les appelle cartes <u>distinguées</u>), se mettre sous la forme :

$$(2) \qquad dx_1 = dx_2 = \dots dx_{n-p} = 0 \quad .$$

La formule (2) montre que les changements de variables entre deux cartes distinguées sont <u>localement</u> de la forme :

$$(3) \qquad \begin{cases} \bar{x}_1 = \varphi_1(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_{n-p}) \\ \vdots \\ \bar{x}_{n-p} = \varphi_{n-p}(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_{n-p}) \\ x_{n-p+1} = \varphi_{n-p+1}(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_n) \\ \vdots \end{cases} \quad .$$

Les sous-espaces définis par les équations $x_1 = Cte\ ,\ \dots\ ,\ x_{n-p} = Cte$ (dans une carte distinguée) sont des plaques. Par suite de (3), les plaques constituent la base d'une topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{V}_n$; les composantes connexes de $\mathcal{T}$ sont les <u>feuilles</u>. Les feuilles sont munies de structure de variété à p dimensions de classe C ; ce sont les intégrales de Σ. Ici s'introduiraient des développements naturels sur la "dynamique topologique", dont je suis obligé (à contrecoeur), de faire grâce à l'auditeur.

Les feuilles de (1) sont toutes homéomorphes à R^2 , à l'exception d'une seule qui est homéomorphe à T^2 . Les feuilles de (1) sont toutes <u>propres</u> : i. e. leur topologie $\mathcal{T}$ coïncide avec la topologie induite par $\mathcal{V}_n$. (Cette circonstance est hautement exceptionnelle).

Le gros ennui de notre définition des feuilletages provient de la circonstance suivante :

Soit φ une application de classe C de $\mathcal{V}_m$ dans $\mathcal{V}_n$ muni d'une structure $(\mathcal{V}_{n,n-p}\ ,\ C\ ,\ \Sigma)$; soit Σ^* l'image réciproque de Σ par φ. Le système Σ^* est complétement intégrable (mais son rang n'est pas nécessairement constant). En d'autres termes, on n'a pas une notion de structure feuilletée induite par une application. C'est pour parer à cet inconvénient que HAEFLIGER a écrit les 50 premières pages de sa thèse. Nous sommes bien obligés ici de nous dispenser des notions introduites par HAEFLIGER.

2. <u>Sur la notion de groupe d'holonomie d'une feuille.</u>

Cette notion est un outil puissant (dû à Charles EHRESMANN) ; voici une description heuristique, mais bien suffisante, de cette notion et des propriétés fondamentales. Considérons un ouvert distingué Ω_1 , la plaque ω_1 définie par

(1) $$x_1^1 = \dots = x_{n-q}^1 = 0$$

et la feuille γ contenant ω_1 . Soit c un chemin fermé dans γ d'origine $0 \in \omega$ et recouvrons c par une suite de cartes distinguées

$$\Omega_1 , \dots , \Omega_N , \Omega_{N+1} = \Omega_1$$

tel que chaque carte contienne une plaque $\omega_1 , \dots , \omega_{N+1} = \omega_1$ (définie par des équations analogues à (1)) vérifiant :

(i) $\omega_i \cap \omega_{i+1} \neq \emptyset$

(ii) $c \subset \bigcup_i \omega_i$

Entre Ω_i et Ω_{i+1} on a le changement de coordonnées (cf. le paragraphe 1) :

$$\varphi_i \begin{cases} x_1^{i+1} = \varphi_1^i(x_1^i , \dots , x_n^i) \\ x_{n-q}^{i+1} = \varphi_{n-q}^i(x_1^i , \dots , x_n^i) \end{cases} .$$

Posons :

$$\varphi_c = \text{germe en } 0 \text{ de } \varphi_N \circ , \dots , \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 .$$

Le germe φ_c ne dépend pas de la suite $\Omega_1 , \dots , \Omega_N$ choisie (mais il dépend de Ω_1). Les germes φ_c forment un groupe $\mathcal{G}(\gamma)$ (c'est un groupe de germes d'homéomorphisme locaux de classe C de R^{n-q} en 0), appelé groupe d'holonomie de γ (relativement à Ω_1).

Les propriétés suivantes sont banales :

(i) Si on remplace Ω_1 par Ω_1' , alors $\mathcal{G}(\gamma)$ est remplacé par $\mathcal{G}'(\gamma)$, mais $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont semblables.

(ii) L'application $c \to \varphi_c$ induit un homomorphisme du groupe de Poincaré $\pi(\gamma)$ de γ sur $\mathcal{G}(\gamma)$.

Le résultat suivant est plus profond (mais inutile à la suite) :

THÉORÈME de stabilité. - Soit γ une feuille compacte ; si $\mathcal{G}(\gamma)$ a un nombre fini $\mathcal{K}$ d'éléments, alors tout voisinage W' de γ contient un voisinage saturé W de γ (c'est-à-dire tel que, pour toute feuille α , $\alpha \cap W \neq \emptyset$ implique $\alpha \subset W$) dont toutes les feuilles sont compactes et homéomorphes à des revêtements de γ , à $\mathcal{K}' \leq \mathcal{K}$ feuillets.

Un élément φ de $\mathcal{G}$, étant un germe d'homéomorphisme de classe C , admet un développement illimité (éventuellement non convergent)

$$(1) \qquad \varphi = \left\{ \begin{matrix} \varphi_1 \sim \varphi_{1j}\, x^j + \varphi_{1j_1j_2}\, x^{j_1} x^{j_2} + \dots \\ \vdots \\ \varphi_{n-q} \sim \varphi_{n-qj}\, x^j + \dots \end{matrix} \right\} = \varphi_\infty \quad .$$

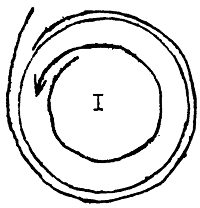
Désignons par φ_r les termes de φ_∞ limités au degré r . Les φ_r par la loi de composition habituelle forment un groupe $\mathcal{G}_r$, appelé groupe d'holonomie restreint à l'ordre r . On définit de même $\mathcal{G}_\infty$.

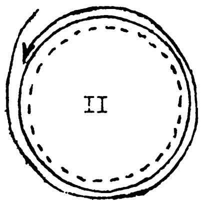
$\mathcal{G}_\infty$ est la limite inductive des $\mathcal{G}_r$. Si la structure est de classe C_α , alors $\mathcal{G}_\infty \simeq \mathcal{G}$.

On a une famille naturelle d'homomorphismes sur, résumée dans le schéma associatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{G}_\infty \arrow[r, "\cdots"] \arrow[r, bend right] \arrow[rr, bend right] \arrow[rrr, bend right] & \mathcal{G}_r \arrow[r] & \mathcal{G}_{r-1} \arrow[r, "\cdots"] & \mathcal{G}_1 \end{tikzcd}$$

Le groupe d'holonomie du cercle de la figure I est le groupe libre engendré par





le germe de la fonction $x' = \alpha x \quad \alpha \neq 1$ (α index de stabilité [Henri POINCARÉ] du cercle). Pour la figure II, l'holonomie est engendrée par le germe de la fonction

$$\begin{cases} x' = \alpha x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \quad \alpha \neq 1 \quad . \\ x' = x & \text{si} \quad 0 \quad . \end{cases}$$

Le groupe d'holonomie de la feuille de (1) en 1 est le groupe libre abélien à deux générateurs, constitués par les germes des 2 fonctions :

$$\begin{cases} x' = x + \alpha x^2 & x' \geqslant 0 \\ x' = x & x' \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = x & x \geqslant 0 \\ x' = x + \beta x^2 & x \geqslant 0 \end{cases}$$

3. Propriétés dues à l'analyticité.

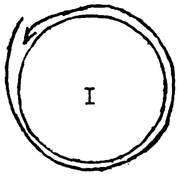
Nous mentionnerons seulement les propriétés les plus simples, utiles pour les théorèmes de Haefliger.

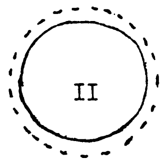
(i) Si une feuille γ d'une structure $(\mathcal{V}_n , 1 , C , \Sigma)$ est compacte, alors il existe pour tout voisinage ouvert W de γ un voisinage W' de γ tel que toute feuille qui rencontre W' appartienne à l'un des deux types suivants :

(a). non compacte ;

(b). compacte et contenue dans W', et homéomorphe à γ ou à un revêtement à deux feuillets de γ.

Cette propriété (i) est amplement illustrée par les figures suivantes :





ruban de Möbius

III

La propriété (i) implique encore : la relation d'équivalence ρ dont les classes sont les feuilles est une relation fermée dans le cas d'une structure feuilletée dont toutes les feuilles sont compactes.

(ii) Le groupe d'holonomie réduit $\mathcal{G}_1$ d'une feuille γ d'une structure $(\mathcal{V}_n , 1 , C , \Sigma)$ est abélien et libre.

4. Propriétés dues à l'analyticité.

(i) Le groupe d'holonomie d'une feuille d'une structure feuilletée analytique ne saurait contenir un germe du type décrit à la fin du paragraphe 2. (Si on préfère, la figure II du paragraphe 2 est impossible pour une structure C_α).

(ii) La remarque antérieure $\mathcal{G}_\infty \approx \mathcal{G}$.

Et, comme conséquence des résultats précédents :

(iii) Le groupe d'holonomie d'une feuille γ d'une structure $(\mathcal{V}_n , 1 , C , \Sigma)$ ayant 0 comme nombre de Betti de la dimension 1 est réduit à l'identité.

5. Le lemme fondamental de Haefliger.

Ce lemme est la clé des résultats de HAEFLIGER et de certains autres résultats que nous énoncerons.

LEMME fondamental. - Il n'existe pas dans le disque $x^2 + y^2 < 1$ une forme de Pfaff $\omega = Adx + Bdy$ de classe C_2 vérifiant les conditions suivantes :

(i) En tout point du cercle $x^2 + y^2 = 1$, on a $Ax + By > 0$.

(ii) Toute feuille de $\omega = 0$ admet un groupe d'holonomie $\mathcal{G}_\gamma$ semblable à un groupe de germes de fonctions analytiques (propriété A).

(iii) Les singularités de ω sont du type df, et non dégénérées. (C'est-à-dire qu'en tout x où $\omega = 0$, la forme ω est localement la différentielle df d'une fonction, admettant x comme point singulier non dégénéré).

En fait, dans l'énoncé de ce lemme (et c'est là la justification des longs développements de HAEFLIGER sur les Γ-structures), il convient de traiter les cycles limites contenant d'éventuelles singularités comme des cycles limites ordinaires et d'étendre à ces cycles singuliers la notion de groupe d'holonomie, (ce qui ne présente guère de difficultés). On remarquera que les seules trajectoires (feuilles) de ω n'ayant pas éventuellement la propriété A (lemme fondamental (ii)) sont les cycles limites.

Voici une démonstration abrégée :

Parmi les singularités de ω il y a au moins un centre. Partons d'un tel centre x et considérons une région ouverte Ω saturée par des cycles limites. L'adhérence $\bar{\Omega}$ de Ω est également saturée par des cycles limites (ceci résulte essentiellement du paragraphe 3). Soit γ , un cycle limite appartenant à la frontière de $\bar{\Omega}$. Les courbes voisines de γ sont toutes fermées, à moins que γ n'ait pas la propriété A (conséquence du paragraphe 4). Mais il existe d'après ce qui précède un compact maximal Λ saturé par des cycles limites, et celui-ci n'est pas le disque entier, d'où le lemme.

Il nous faut encore deux lemmes dont le premier est évident.

LEMME 1. - Pour toute structure $(\mathcal{V}_n , 1 , C_\infty , \Sigma)$ où $\mathcal{V}_n$ est compact, il existe une transversale C fermée aux feuilles de classe C_∞ .

LEMME 2. - Les hypothèses sont celles du lemme 1 ; la transversale C est supposée homotope à zéro. On peut plonger un disque D dans $\mathcal{V}_n$ par une application φ de classe C_∞ telle que $\varphi(D) = C$ (ici D est le bord de D), et telle que l'image réciproque par φ du feuilletage vérifie les hypothèses du lemme fondamental.

Le lemme 2 est une application du fameux lemme d'approximation de M. MORSE.

6. Applications du lemme fondamental.

Elles sont immédiates. (Les dernières applications citées nécessitent cependant la connaissance d'une série de résultats que l'on trouvera dans ma thèse [2]).

THÉORÈME 1. - Une variété compacte et à groupe de Poincaré fini $\mathcal{V}_n$ ne saurait admettre de structure $(\mathcal{V}_n , 1 , C_\infty , \Sigma)$ dont toutes les feuilles aient un groupe d'holonomie semblable à un groupe de germes de fonctions analytiques. Une telle variété $\mathcal{V}_n$ en particulier ne saurait admettre une structure $(\mathcal{V}_n , 1 , C_\infty , \Sigma)$ dont toutes les feuilles soient simplement connexes.

Le théorème montre donc qu'une sphère S_n ne saurait admettre de feuilletage de classe C_∞ et de co-dimension 1 dont toutes les feuilles soient homéomorphes à R^{n-1} (cf. le paragraphe 1).

THÉORÈME 3. - Soit $\mathcal{V}_n$ une variété compacte munie d'une structure $(\mathcal{V}_n , 1 , C_\alpha , \Sigma)$. Si $\pi(\mathcal{V}_n)$ est cyclique toutes les feuilles sont propres et il existe au moins une feuille compacte.

THÉORÈME 3. - Soit $\mathcal{V}_n$ une variété compacte munie d'une structure $(\mathcal{V}_n , 1 , C , \Sigma)$. Il existe au moins une feuille compacte.

THÉORÈME 4. - Soit $\mathcal{V}_n$, une variété non compacte de classe C_α dont le groupe de Poincaré n'ait que des éléments d'ordre fini. Soit ω une forme de Pfaff analytique sur $\mathcal{V}_n$ vérifiant $\omega \wedge d\omega = 0$; $n \geqslant 3$. On suppose qu'en tout point singulier de ω la matrice des dérivées partielles des coefficients soit de rang n (singularités non dégénérées) alors, il existe une fonction de classe C_∞ f sur $\mathcal{V}_n$ non constante, telle que $df \wedge \omega = 0$ (f est une intégrale première globale).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] HAEFLIGER (André). - Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes, Comment. Math. Helvet., t. 33, 1959 (Thèse Sc. math. Paris. 1958).

[2] REEB (Georges). - Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées. - Paris, Hermann, 1952 (Act. scient. et ind., 118 ; Publ. Inst. math. Univ. Strasbourg, 11) (Thèse Sc. math. Strasbourg. 1948).