

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-LOUIS KOSZUL

Travaux de B. Kostant sur les groupes de Lie semi-simples

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. n° 191, p. 329-337

http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__329_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TRAVAUX DE B. KOSTANT
SUR LES GROUPES DE LIE SEMI-SIMPLES [4]

par Jean-Louis KOSZUL

1. Les transformations de Coxeter-Killing.

Dans un espace vectoriel euclidien E , on appelle réflexion une symétrie par rapport à un hyperplan. Soit Γ un sous-groupe fini du groupe des transformations orthogonales de E engendré par des réflexions. Un élément $x \in E$ est dit régulier s'il n'est invariant par aucune réflexion de Γ . L'ensemble des éléments réguliers est un ouvert de E dont les composantes connexes sont appelées les chambres de Γ . Le groupe Γ opère transitivement dans l'ensemble des chambres. Pour toute chambre W de Γ , soit $R(W)$ l'ensemble des réflexions $S \in \Gamma$, telles que \bar{W} contienne un point invariant par S qui n'est invariant par aucune autre réflexion de Γ . Les hyperplans qui correspondent aux réflexions de $R(W)$ sont appelés les murs de la chambre W . Toutes les chambres ont le même nombre ℓ de murs et $\ell \leq \dim E$, l'égalité ayant lieu lorsque 0 est le seul élément de E invariant par Γ . Un élément $R \in \Gamma$ est appelé une transformation de Coxeter-Killing lorsqu'il existe une chambre W de Γ telle que R soit le produit (dans un certain ordre) des éléments de $R(W)$. Les transformations de Coxeter-Killing ont beaucoup de propriétés remarquables (cf. [1], [2], [3]) :

1° elles constituent une classe d'éléments conjugués dans Γ ,

2° si h est l'ordre des transformations de Coxeter-Killing, le nombre des réflexions du groupe Γ est $\frac{1}{2} \ell h$,

3° si R est une transformation de Coxeter-Killing et si

$$\det(T - R) = \prod_{j=1}^{j=m} (T - \exp(\frac{2\pi i k_j}{h}))$$

avec $m = \dim E$ et $0 \leq k_j < h$, alors l'algèbre des invariants symétriques du groupe linéaire Γ est engendrée par m polynômes algébriquement indépendants de degrés $k_j + 1$.

2. Transformations de Coxeter-Killing des groupes de Lie semi-simples.

Les groupes linéaires finis engendrés par des réflexions qui sont cristallographiques

c'est-à-dire qui conservent un réseau de l'espace euclidien, sont les groupes de Weyl de la théorie des algèbres de Lie semi-simples.

Dans la suite, on désignera par \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple complexe de rang ℓ et par \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . Soit Δ l'ensemble des racines pour la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} . La forme de Killing $(\ , \)$ permet de les identifier à des éléments de \mathfrak{h} . Le sous-espace réel \mathfrak{h}° engendré par Δ est de dimension ℓ et a pour complexifié \mathfrak{h} ; la restriction de la forme de Killing à \mathfrak{h}° étant définie positive, c'est un espace euclidien. Soit G le groupe de Lie linéaire défini par \mathfrak{g} et soit H le sous-groupe abélien connexe de G qui correspond à \mathfrak{h} . L'ensemble Δ et par conséquent \mathfrak{h}° sont stables par le normalisateur $N(\mathfrak{h})$ de H dans G . Ceci donne un homomorphisme de $N(\mathfrak{h})$ dans le groupe des transformations orthogonales de \mathfrak{h}° ; l'image de cet homomorphisme, isomorphe à $N(\mathfrak{h})/H$, est appelé le groupe de Weyl relatif à \mathfrak{h} . On sait que c'est un groupe fini, engendré par les réflexions par rapport aux hyperplans d'équations $(\alpha, X) = 0$ avec $\alpha \in \Delta$. Comme Δ engendre un réseau de \mathfrak{h}° , c'est un groupe cristallographique.

On supposera choisi un ordre lexicographique dans \mathfrak{h}° et on désignera par α_i ($i = 1, 2, \dots, \ell$) les racines simples positives. Les conditions $(\alpha_i, X) > 0$ définissent une chambre du groupe de Weyl dont les murs sont les hyperplans d'équations $(\alpha_i, X) = 0$. Soit R_i la réflexion

$$X \rightarrow X - 2 \frac{(X, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i$$

qui correspond à la racine simple α_i . Alors $R_1 R_2 \dots R_\ell$ est une transformation de Coxeter-Killing du groupe de Weyl relatif à \mathfrak{h} (on dira une transformation de Coxeter-Killing de \mathfrak{h}). A. J. COLEMAN a démontré le résultat suivant : si h est l'ordre de R et si $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{h})$, il existe un élément régulier $Z \in \mathfrak{h}$ tel que $RZ = \omega Z$. On sait de plus que R n'admet pas la valeur propre 1 (cf. [2], [3]), et que h ne dépend pas du choix de la sous-algèbre \mathfrak{h} .

LEMME 1. - Les racines positives dont les images par R sont négatives sont les racines $\theta_i = R_\ell R_{\ell-1} \dots R_{i+1} \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, \ell$). Elles constituent une base de \mathfrak{h} .

On a en effet

$$\theta_i = \alpha_i + \sum_{j>i} c_{ij} \alpha_j \quad ,$$

donc $\theta_i > 0$ et $(\theta_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ est une base de \mathfrak{h} . On a :

$$R\theta_i = -\alpha_i + \sum_{j < i} c'_{ij} \alpha_j$$

donc $R\theta_i < 0$. Comme, d'autre part, α_i est la seule racine positive dont l'image par R_i soit négative, il est clair que, si $\alpha > 0$ et $R\alpha < 0$, il existe un entier i ($1 \leq i \leq \ell$) tel que $\alpha_i = R_{i+1} \dots R_{\ell-1} R_{\ell} \alpha$.

Soit Δ_j ($j = 1, 2, \dots, L$) la famille des orbites de R dans Δ . Pour tout j , la somme des éléments de Δ_j est nulle puisque 1 n'est pas valeur propre de R . Compte tenu du lemme 1, chaque Δ_j contient au moins une racine θ_i et par suite $L \leq \ell$. Soit Z un élément régulier de \mathfrak{h} tel que $RZ = \omega Z$. Si $\alpha \in \Delta$ et si $R^p \alpha = \alpha$, alors

$$(Z, \alpha) = (Z, R^p \alpha) = (R^{-p} Z, \alpha) = \omega^{-p} (Z, \alpha) \quad ;$$

puisque Z est régulier, ceci entraîne que p est multiple de h . Par conséquent, chaque Δ_j contient exactement h éléments et, si r désigne le nombre des racines positives, on a :

$$hL = 2r \quad .$$

Un élément S de G est dit régulier si il est semi-simple et si la sous-algèbre des éléments de \mathfrak{g} invariants par S est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} .

THÉOREME 1. - Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} et soit h l'ordre des transformations de Coxeter-Killing des groupes de Weyl de \mathfrak{g} . Tout élément P du normalisateur $N(\mathfrak{h})$ ayant pour restriction à \mathfrak{h}^0 une transformation de Coxeter-Killing est un élément régulier d'ordre h .

Supposons en effet que $P \in N(\mathfrak{h})$ ait pour restriction à \mathfrak{h}^0 la transformation R définie plus haut. Puisque P^h est l'identité sur \mathfrak{h} , il existe un élément $X \in \mathfrak{h}$ tel que $P^h = \exp X$. Pour tout $\alpha \in \Delta$, soit X_α un élément $\neq 0$ de \mathfrak{g} tel que $[X, X_\alpha] = (X, \alpha) X_\alpha$ pour tout $X \in \mathfrak{h}$. On a

$$P^h X_\alpha = e^{(X, \alpha)} X_\alpha$$

et

$$(X, \alpha) = (X, R\alpha) \quad .$$

Par suite

$$e^{(X, \alpha)h} = e^{((X, \alpha) + (X, R\alpha) + \dots + (X, R^{h-1}\alpha))} = 1$$

puisque $\alpha + R\alpha + \dots + R^{h-1}\alpha = 0$.

Ceci prouve que P est d'ordre fini, donc semi-simple. Soit b_j ($j=1, 2, \dots, L$) le sous-espace stable par P engendré par les X_α avec $\alpha \in \Delta_j$. Si $\alpha \in \Delta_j$ et si $e^{(X, \alpha)} \neq 1$, alors P n'admet pas la valeur propre 1 dans b_j ; si $e^{(X, \alpha)} = 1$, alors $(I + P + \dots + P^{h-1}) X_\alpha$ est invariant par P et engendre l'espace des vecteurs de b_j invariants par P . Comme P est semi-simple et n'admet pas la valeur propre 1 dans \mathfrak{h} , ceci implique que $L \geq \ell$. Or on a vu plus haut que $L \leq \ell$, donc $L = \ell$ ce qui entraîne que la sous-algèbre des éléments de \mathfrak{g} invariants par P est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , donc que P est régulier. On doit de plus avoir $e^{(X, \alpha)} = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta$, ce qui prouve que P est d'ordre h . On a en même temps démontré le 2° du paragraphe 1 dans le cas où Γ est un groupe de Weyl.

On montrera dans la suite que ces propriétés de P caractérisent une classe d'éléments conjugués dans G .

3. Éléments réguliers principaux.

A partir de ce paragraphe, on supposera que \mathfrak{g} est une algèbre de Lie simple. Soit H_i ($i = 1, 2, \dots, \ell$) la base de \mathfrak{h}^0 définie par les conditions $(H_i, \alpha_j) = \delta_{ij}$ et soit $X_0 = \sum_i H_i$. Toute racine α s'écrivant $\alpha = \sum_i n_i \alpha_i$ où les n_i sont des entiers tous positifs ou tous négatifs, $(X_0, \alpha) = \sum_i n_i$ est un entier $\neq 0$. Soit

$$\psi = \sum_i q_i \alpha_i$$

la plus haute racine et soit

$$q = (X_0, \psi) = \sum_i q_i \quad .$$

On démontre que $q_i \geq 1$ pour tout i et que pour toute racine α , $(X_0, \alpha) \leq q$, l'égalité ayant lieu seulement pour $\alpha = \psi$.

Comme le groupe de Weyl relatif à \mathfrak{h} opère transitivement dans l'ensemble des chambres, tout élément de $\exp i\mathfrak{h}^0$ est conjugué d'un élément de la forme $\exp(2\pi iX)$ avec $X \in \mathfrak{h}^0$ et $(X, \alpha_i) \geq 0$ pour tout i . Si X appartient au réseau engendré par la base $(H_i)_{1 \leq i \leq \ell}$, alors $\exp(2\pi iX) = I$. On en déduit que tout élément de $\exp i\mathfrak{h}^0$ est conjugué d'un élément de la forme $\exp(2\pi iX)$ avec $(X, \psi) \leq 1$ et $(X, \alpha_i) \geq 0$ pour $i = 1, 2, \dots, \ell$. Soit alors S un élément régulier d'ordre fini k de G . Il est conjugué d'un élément $S' \in G$ ayant pour invariants les éléments de \mathfrak{h} . Comme S' est d'ordre fini, on a $S' \in \exp i\mathfrak{h}^0$. D'après ce qui précède, on voit donc que S est conjugué d'un élément de la forme $\exp(2\pi iX)$ avec $X \in \mathfrak{h}^0$, $(X, \psi) \leq 1$ et $(X, \alpha_i) \geq 0$ pour tout i . Posant

$X = \sum x_i H_i$, on a donc $x_i \geq 0$ et $\sum q_i x_i \leq 1$. Puisque S est régulier, on a même $x_i > 0$ et $\sum q_i x_i < 1$. Par conséquent, $k > \sum k x_i q_i \geq q$. Ainsi, tout élément régulier d'ordre fini est d'ordre $\geq q + 1$. Si $k = q + 1$, alors $kx_i = 1$ pour tout i , c'est-à-dire que tout élément régulier d'ordre $q + 1$ est conjugué de l'élément

$$P_0 = \exp\left(\frac{2\pi i}{q+1} X_0\right)$$

où $X_0 = \sum_i H_i$. Les éléments réguliers d'ordre $q + 1$ sont appelés les éléments réguliers principaux de G . Ils constituent une classe d'éléments conjugués de G . On montrera dans ce qui suit que $q + 1 = h$ (théorème 3, corollaire 1).

4. Sous-algèbres principales de dimension 3.

Soit \mathfrak{A} une algèbre de Lie simple complexe de dimension 3 et soit X, E, F une base de \mathfrak{A} telle que $[X, E] = E$, $[X, F] = -F$ et $[E, F] = X$. Les résultats suivants sont classiques : soit M un \mathfrak{A} -module simple ; les valeurs propres de X dans M sont de la forme $\frac{\dim M - 1}{2} - k$, où $k = 0, 1, \dots, \dim M - 1$;

chaque valeur propre a la multiplicité 1 et le sous-espace propre correspondant à la valeur propre $\frac{\dim M - 1}{2}$ est le sous-espace de dimension 1 des zéros de E dans M . Si \mathfrak{A} est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie simple \mathfrak{g} , le nombre des sous-modules simples d'une décomposition de \mathfrak{g} considéré comme \mathfrak{A} -module est donc au moins égal à la dimension du noyau de $\text{ad}(X)$, c'est-à-dire qu'il est au moins égal à ℓ . Ce minimum est atteint : supposons les vecteurs propres X_α choisis de sorte que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = \alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta$ et posons :

$$X_0 = \sum_i H_i, \quad E_0 = \sum_i \sqrt{q_i} X_i, \quad F_0 = \sum_i \frac{(X_0, H_i)}{\sqrt{q_i}} X_{-\alpha_i}.$$

Alors $[X_0, E_0] = E_0$, $[X_0, F_0] = -F_0$, $[E_0, F_0] = X_0$, donc le sous-espace \mathfrak{A}_0 de \mathfrak{g} engendré par X_0, E_0, F_0 est une sous-algèbre simple de dimension 3. Comme les valeurs propres de $\text{ad}(X_0)$ sont les entiers 0 et (X_0, α) , chaque sous-module simple de \mathfrak{g} considéré comme \mathfrak{A}_0 -module est de dimension impaire, et contient donc un élément $\neq 0$ du noyau de $\text{ad}(X_0)$ c'est-à-dire de \mathfrak{h} . Ceci montre que \mathfrak{g} se décompose en somme directe de ℓ sous-modules simples sur \mathfrak{A}_0 .

Une sous-algèbre simple \mathfrak{A} de dimension 3 de \mathfrak{g} est appelée une sous-algèbre

principale lorsque \mathfrak{g} , considéré comme \mathfrak{a} -module est somme directe de ℓ sous-modules simples. On démontre que toute sous-algèbre principale est conjuguée de la sous-algèbre \mathfrak{a}_0 .

Les valeurs propres de P^0 sont étroitement liées à la décomposition de \mathfrak{g} en somme directe de \mathfrak{a}_0 -modules simples. Soit $Z_0 = E_0 + X_{-\psi}$; on va montrer que Z_0 est un élément régulier de \mathfrak{g} . Soit \mathfrak{g}' la sous-algèbre compacte réelle de \mathfrak{g} engendrée par $i\mathfrak{h}^0$, $X_\alpha - X_{-\alpha}$ et $i(X_\alpha + X_{-\alpha})$ avec $\alpha \in \Delta$. Le conjugué \bar{Z}_0 de Z_0 par rapport à \mathfrak{g}' est

$$\sum q_i X_{-\alpha_i} + X_{-\psi} .$$

On a donc $[Z_0, \bar{Z}_0] = 0$, ce qui prouve que Z_0 est dans la sous-algèbre complexe engendrée par une sous-algèbre abélienne de dimension maximale de \mathfrak{g}' . Ceci entraîne que Z_0 est semi-simple. Soit maintenant ζ le projecteur de \mathfrak{g} sur la sous-algèbre de \mathfrak{g} engendrée par les X_α avec $\alpha > 0$ qui a pour noyau la sous-algèbre engendrée par \mathfrak{h} et les X_α avec $\alpha < 0$. On vérifie facilement que ζ applique injectivement le noyau de $\text{ad}(Z_0)$ dans le noyau de $\text{ad}(E_0)$, lequel est de dimension ℓ d'après ce qui précède. Ceci prouve que le noyau de $\text{ad}(Z_0)$ est de dimension ℓ et par suite que Z_0 est régulier.

Soit \mathfrak{h}' la sous-algèbre de Cartan noyau de $\text{ad}(Z_0)$. Puisque $[X_0, E_0] = E_0$ et $[X_0, X_{-\psi}] = -qX_{-\psi}$, on a :

$$P_0 Z_0 = \exp\left(\frac{2\pi i}{q+1} X_0\right) Z_0 = Z_0 .$$

Par conséquent, \mathfrak{h}' est stable par P_0 .

LEMME 2. - Soient $k_1 \leq k_2 \dots \leq k_\ell$ les entiers > 0 tels que les sous-modules simples d'une décomposition de \mathfrak{g} considéré comme \mathfrak{a}_0 -module aient pour dimensions les entiers $2k_i + 1$. Les valeurs propres de la restriction de P_0 à \mathfrak{h}' sont les nombres ν^{k_i} où $\nu = \exp\left(\frac{2\pi i}{q+1}\right)$. On a $k_{\ell-1} < k_\ell = q$.

En effet, le projecteur ζ commute avec $\text{ad}(X_0)$ et applique isomorphiquement \mathfrak{h}' sur le noyau de $\text{ad}(E_0)$. On a vu que sur ce noyau les valeurs propres de $\text{ad}(X_0)$ sont les entiers k_i . Comme ψ est la seule racine α telle que (X_0, α) ait la valeur maximum q , on a $k_{\ell-1} < k_\ell = q$.

THÉORÈME 2 (égalité). - On a $k_i + k_{\ell-i} = q + 1$ pour $i = 1, 2, \dots, \ell$.

En effet, P_0 conserve le sous-espace réel \mathfrak{h}'^0 engendré par les racines de la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h}' . Si ν^p est une valeur propre de P_0 dans \mathfrak{h}' ayant

la multiplicité s , alors $\chi^P = \nu^{q+1-p}$ est une valeur propre de P_0 dans \mathfrak{h}' ayant la même multiplicité s . Comme $0 < k_1 \leq k_2 \dots k_\ell \leq q$, ceci démontre le théorème.

THÉORÈME 3. - Si r est le nombre des racines positives, alors $2r = (q + 1)\ell$.

Soit n_k le nombre des \mathfrak{A}_0 -modules simples de dimension $2k + 1$ figurant dans une décomposition du \mathfrak{A}_0 -module \mathfrak{g} . On a $n_k = 0$ pour $k < 1$ et $k > q$, donc $\ell = n_1 + n_2 + \dots + n_q$. Du théorème de dualité résulte de plus que $n_k = n_{q+1-k}$. Soit s_k la multiplicité de l'entier k comme valeur propre de $\text{ad}(X_0)$. On a $s_k = s_{-k}$ et $s_k = 0$ pour $|k| > q$. Par conséquent,

$$\dim \mathfrak{g} = s_{-q} + s_{-q+1} + \dots + s_q = \ell + 2(s_1 + s_2 + \dots + s_q) \quad .$$

D'après les remarques du début de ce paragraphe, on a

$$s_k = n_k + n_{k+1} + \dots + n_q$$

ce qui, avec la dualité, peut s'écrire

$$s_k = n_1 + n_2 + \dots + n_{q+1-k} \quad .$$

On a donc :

$$(*) \quad s_k + s_{q+1-k} = \ell + n_k \quad .$$

En sommant de $k = 1$ à $k = q$, on obtient $\dim \mathfrak{g} = \ell + (q + 1)\ell$, ce qui démontre le théorème puisque $\dim \mathfrak{g} = 2r + \ell$.

COROLLAIRE 1. - L'ordre h des transformations de Coxeter-Killing des groupes de Weyl de G est égal à $q + 1$.

Cela résulte de la relation $2r = \frac{1}{2}\ell h$ (cf. paragraphe 1).

COROLLAIRE 2. - Soit P un élément de G ; pour que P soit un élément régulier principal, il faut et il suffit qu'il existe une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} telle que la restriction de P à $\hat{\mathfrak{h}}^0$ soit une transformation de Coxeter-Killing de \mathfrak{h} .

Cela résulte du corollaire 1 et du théorème 1.

5. Relations entre les valeurs propres d'une transformation de Coxeter-Killing et

les sous-algèbres principales de dimension 3 .

Soit P un élément régulier principal ; pour préciser le corollaire 2 du théorème 3, il reste à caractériser les sous-algèbres de Cartan $\hat{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{g}$ telles que la restriction de P à $\hat{\mathfrak{h}}^0$ soit une transformation de Coxeter-Killing de $\hat{\mathfrak{h}}$.

THÉOREME 4. - Soit P un élément régulier principal de G et soit $\hat{\mathfrak{h}}$ une sous-algèbre de Cartan stable par P . Pour que la restriction de P à $\hat{\mathfrak{h}}^0$ soit une transformation de Coxeter-Killing de $\hat{\mathfrak{h}}$, il faut et il suffit que P admette dans $\hat{\mathfrak{h}}$ la valeur propre $\nu = \exp\left(\frac{2\pi i}{q+1}\right)$.

La condition est nécessaire d'après le résultat de COLEMAN cité au début du paragraphe 2. La démonstration s'achève en établissant trois lemmes.

LEMME 3. - Pour $0 \leq k \leq q$, le noyau de $P_0 - \nu^k I$ est de dimension $\ell + n_k$ (où n_k est le nombre des sous-modules simples de dimension $2k + 1$ figurant dans une décomposition du \mathfrak{A}_0 -module \mathfrak{g}).

En effet, le noyau de $P_0 - \nu^k I$ est somme du noyau de $\text{ad}(X_0) - kI$ et du noyau de $\text{ad}(X_0) - (q + 1 - k) I$. Sa dimension est donc

$$(*) \quad s_k + s_{q+1-k} = \ell + n_k \quad .$$

LEMME 4. - Si L est le noyau de $P_0 - \nu I$, tout élément régulier de L est de la forme cAZ_0 avec $c \neq 0$ et $A \in H$.

Puisque $k_{\ell-1} \leq k_\ell$ (lemme 2), le théorème de dualité montre que $k_1 < k_2$, autrement dit \mathfrak{A}_0 est le seul sous-module simple de dimension 3 du \mathfrak{A}_0 -module \mathfrak{g} . On a donc $n_1 = 1$ et $X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \dots, X_{\alpha_\ell}, X_{-\psi}$ est une base de L .
Si

$$Y = \sum b_i X_{\alpha_i} + b_{\ell+1} X_{-\psi}$$

est un élément de L et si l'un des coefficients b_j est nul, alors $\text{ad}(Y)$ est nilpotent, car, en changeant au besoin l'ordre lexicographique, Y est combinaison linéaire de vecteurs X_{β_i} ($i = 1, 2, \dots, \ell$) où les β_i sont des racines positives. Si Y est régulier, tous les coefficients b_j sont donc $\neq 0$ et cela permet de déterminer un scalaire $c \neq 0$ et un élément $A \in H$ tels que $Y = cAZ_0$.

LEMME 5. - Soient P_1 et P_2 deux éléments réguliers principaux et $\hat{\mathfrak{h}}$ une sous-algèbre de Cartan stable par P_1 et P_2 . Si $\nu = \exp\left(\frac{2\pi i}{q+1}\right)$ est valeur propre de P_1 et de P_2 dans $\hat{\mathfrak{h}}$, alors P_1 et P_2 sont conjugués dans le

sous-groupe $N(\hat{\mathfrak{h}})$.

Il suffit de démontrer le lemme dans le cas $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}'$ et $P_2 = P_0$. Soit \mathfrak{h}_1 la sous-algèbre de Cartan des éléments de \mathfrak{g} invariants par P_1 et soit S un élément de G tel que $SP_1^{-1}S = P_0$. On a $S\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}'$, et $S\mathfrak{h}'$ contient un élément régulier Y tel que $P_0 Y = \forall Y$. D'après le lemme 4, il existe donc une constante $c \neq 0$ et un élément $A \in H$ tels que $Y = cAZ_0$. Par conséquent $A\mathfrak{h}' = S\mathfrak{h}'$, donc $S A \in N(\mathfrak{h}')$ et

$$P_1^{-1} = S P_0^{-1} S = S A P_0^{-1} A S$$

est conjugué de P_0 dans $N(\mathfrak{h}')$.

Le théorème 4 montre que les valeurs propres des transformations de Coxeter-Killing sont les valeurs propres de la restriction de P_0 à \mathfrak{h}' données par le lemme 2, c'est-à-dire les ν^{k_i} . Compte tenu des résultats sur les invariants du groupe de Weyl indiqués au paragraphe 1, on a donc démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 5. - Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple et \mathfrak{a} une sous-algèbre principale de dimension 3 de \mathfrak{g} . Les dimensions des sous-modules simples d'une décomposition du \mathfrak{a} -module \mathfrak{g} sont des entiers impairs $2k_i + 1$ ($i = 1, 2, \dots, \ell$). L'algèbre des invariants symétriques d'un groupe de Weyl de G est engendrée par des polynômes de degrés $k_i + 1$ algébriquement indépendants.

Enfin, compte tenu des relations entre les invariants symétriques des groupes de Weyl et la cohomologie réelle de G (cf. [1]), le résultat précédent s'énonce encore comme suit : l'algèbre de cohomologie réelle de G est engendrée par ℓ éléments dont les degrés sont les dimensions $2k_i + 1$ des sous-modules simples d'une décomposition de \mathfrak{g} considéré comme module sur une sous-algèbre principale de dimension 3 (résultat dû à A. SHAPIRO).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHEVALLEY (Claude). - The Betti numbers of the exceptional simple Lie groups, Proc. intern. Congr. Math. [1950. Cambridge], vol. 2, p. 21-24. - Providence, Amer. math. Soc., 1952.
- [2] COLEMAN (A. J.). - The Betti numbers of the simple Lie groups, Canadian J. Math., t. 10, 1958, p. 349-356.
- [3] COXETER (H. S. M.). - The product of the generators of a finite group generated by reflexions, Duke math. J., t. 18, 1951, p. 765-782.
- [4] KOSTANT (B.). - The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group (à paraître).
- [5] STEINBERG (R.). - Finite reflexion groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 91, 1959, p. 493-504.