ALEXANDER GROTHENDIECK

Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. I. Généralités. Descente par morphismes fidèlement plats

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. n° 190, p. 299-327

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__299_0>

Séminaire BOURBAKI
12e année, 1959/60, n° 190

Décembre 1959

TECHNIQUE DE DESCENTE ET THÉORÈMES D'EXISTENCE EN GÉOMETRIE ALGÉBRIQUE
I. GÉNÉRALITÉS. DESCENTE PAR MORPHISMES FIDÈLEMENT PLATS

par Alexander GROTHENDIECK

D'un point de vue technique, le présent exposé, et ceux qui lui feront suite, peuvent être considérés comme des variations sur le célèbre "théorème 90" de Hilbert. L'introduction de la méthode de descente en géométrie algébrique semble due à A. WEIL, sous le nom de "descente du corps de base". WEIL se restreint d'ailleurs au cas d'extensions finies séparables de corps. Le cas d'extensions radicielles de hauteur 1 a été ensuite traité par P. CARTIER. Faute du langage des schémas, et plus particulièrement faute d'éléments nilpotents dans les anneaux qu'on se permettait de considérer, l'identité essentielle entre ces deux cas n'avait pu être formulée par CARTIER.

A l'heure actuelle, il semble que la technique générale de descente qui sera exposée (jointe le cas échéant aux théorèmes fondamentaux de la "géométrie formelle", cf. [3]) est à la base de la plupart des théorèmes d'existence en géométrie algébrique. Il convient de noter d'ailleurs que la dite technique peut certainement se transposer en "géométrie analytique", et on peut espérer que dans un proche avenir, les spécialistes sauront démontrer les analogues "analytiques" des théorèmes d'existence en géométrie formelle qui seront donnés dans l'exposé II. En tout cas, les récents travaux de KODAIRA-SPENCER, dont les méthodes semblent inaptes à la définition et l'étude de "variétés de modules" au voisinage de leurs points singuliers, montrent assez clairement la nécessité de méthodes plus proches de la théorie des schémas (que devront compléter bien entendu les techniques transcendantes).

Dans le présent exposé I, nous traiterons le cas de descente le plus élémentaire (indiqué dans le titre). Les applications des théorèmes 1, 2, 3 ci-dessous, sont cependant déjà fort nombreuses. Nous nous sommes bornés à en donner quelques-unes à titre d'exemple, sans essayer de leur donner ici le maximum de généralité possible.

Nous utiliserons librement le langage des schémas, pour lequel nous renvoyons à l'exposé déjà cité, ainsi qu'à [2]. Notons cependant expressément que les pré-schémas envisagés dans le présent exposé ne sont pas nécessairement noethériens, et les morphismes ne sont pas nécessairement de type fini. Ainsi, si A est un anneau local noethérien, de complété $\bar{A}$, on aura à considérer l'anneau non noethérien $\bar{A} \otimes_{A} \bar{A}$, et les morphismes de schémas affines correspondants aux inclusions entre les anneaux envisagés.

A. Préliminaires sur les catégories.

1. Catégories fibrées, données de descente, morphismes de $\mathcal{F}$-descente.

a. DÉFINITION 1.1. - Une catégorie fibrée $\mathcal{F}$ de base $\underset{\sim}{C}$ est formée d'une catégorie $\underset{\sim}{C}$, pour tout $X \in \underset{\sim}{C}$ d'une catégorie $\mathcal{F}_X$, pour tout $\underset{\sim}{C}$-morphisme $f : X \longrightarrow Y$ d'un foncteur $f^* : \mathcal{F}_Y \longrightarrow \mathcal{F}_X$, noté aussi

$$f^*(\xi) = \xi \times_Y X$$

pour $\xi \in \mathcal{F}_Y$ (X étant considéré comme un "objet de $\underset{\sim}{C}$ au-dessus de Y ", i. e. comme muni du morphisme f), et enfin pour deux morphismes composables $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, d'un isomorphisme de foncteurs

$$c_{f,g} : (gf)^* \longrightarrow f^* g^*$$

ces données étant assujetties aux conditions suivantes :

(i) $id^* = id$

(ii) $c_{f,g}$ est l'isomorphisme identique si f ou g est un isomorphisme identique

(iii) Etant donnés trois morphismes composables $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$, on a commutativité dans le diagramme suivant d'isomorphismes formé au moyen des isomorphismes de la forme $c_{u,v}$:

$$\begin{array}{ccc} (h(gf))^* = ((hg)\ f)^* & \longrightarrow & f^*(hg)^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ (gf)^*\ h^* & \longrightarrow & (f^*\ g^*)\ h^* = f^*(g^*\ h^*) \end{array}$$

EXEMPLE 1. - Soit $\underset{\sim}{C}$ une catégorie où les produits fibrés existent, on définit alors une catégorie fibrée $\mathcal{F}$ de base $\underset{\sim}{C}$ en posant $\mathcal{F}_X$ = catégorie des objets de $\underset{\sim}{C}$ au-dessus de X , le foncteur $f^* : \mathcal{F}_Y \longrightarrow \mathcal{F}_X$ correspondant à un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ étant défini par le produit fibré $Z \rightsquigarrow Z \times_Y X$.

EXEMPLE 2. - Soit $\underset{\sim}{C}$ la catégorie des pré-schémas, et pour $X \in \underset{\sim}{C}$, soit $\mathcal{F}_X$ la catégorie des faisceaux quasi-cohérents de modules sur X . Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de pré-schémas, $f^* : \mathcal{F}_Y \longrightarrow \mathcal{F}_X$ est le foncteur image inverse de faisceaux de modules. On obtient ainsi une catégorie fibrée de base $\underset{\sim}{C}$.

b. DÉFINITION 1.2. - Un diagramme

$$E \xrightarrow{u} E' \underset{v_2}{\overset{v_1}{\rightrightarrows}} E''$$

d'applications d'ensembles est dit exact si u est une bijection de E sur la partie de E' formée des $x' \in E'$ tels que $v_1(x') = v_2(x')$.

DÉFINITION 1.3. - Soit $\mathcal{F}$ une catégorie fibrée de base $\underset{\sim}{C}$, considérons un diagramme

$$(+) \qquad S \xleftarrow{\alpha} S' \underset{\beta_2}{\overset{\beta_1}{\leftleftarrows}} S''$$

de morphismes dans $\underset{\sim}{C}$ tels que $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$; ce diagramme est dit $\mathcal{F}$-exact si pour tout couple ξ , η d'éléments de $\mathcal{F}_S$, le diagramme suivant d'applications d'ensembles

$$(+) \qquad \mathrm{Hom}(\xi , \eta) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}(\alpha^*(\xi) , \alpha^*(\eta)) \underset{\beta_2^*}{\overset{\beta_1^*}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}(\gamma^*(\xi) , \gamma^*(\eta))$$

(ou $\gamma = \alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$) est exact.

Dans ce dernier diagramme, nous avons identifié $\beta_i^* \alpha^*$ à $(\alpha\beta_i)^* = \gamma^*$ grâce à $c_{\beta_i,\alpha}$, pour simplifier.

DÉFINITION 1.4. - Soit $\mathcal{F}$ une catégorie fibrée de base $\underset{\sim}{C}$, considérons deux morphismes $\beta_1 , \beta_2 : S'' \longrightarrow S'$ dans $\underset{\sim}{C}$. Soit $\xi' \in \mathcal{F}_{S'}$. On appelle donnée de recollement sur ξ' (relativement au couple (β_1 , β_2)), un isomorphisme de $\beta_1^*(\xi')$ sur $\beta_2^*(\xi')$. Si ξ' , $\eta' \in \mathcal{F}_{S'}$ sont munis chacun d'une donnée de recollement, un morphisme $u : \xi' \longrightarrow \eta'$ dans $\mathcal{F}_{S'}$ est dit compatible avec les données de recollement si on a commutativité dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \beta_1^*(\xi') & \longrightarrow & \beta_2^*(\xi') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \beta_1^*(\eta') & \longrightarrow & \beta_2^*(\eta') \end{array}$$

De cette façon, les objets de $\mathcal{F}_{S'}$ munis d'une donnée de recollement (relativement à β_1 , β_2) forment alors une catégorie. Si $\alpha : S' \longrightarrow S$ est un morphisme tel que $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$, alors pour tout $\xi \in \mathcal{F}_{S'}$, l'objet $\xi' = \alpha^*(\xi)$

de $\mathcal{F}_{S'}$ est muni d'une donnée de recollement canonique, puisque

$$\beta_i^* \alpha^*(\xi) \simeq (\alpha\beta_i)^* (\xi) = \gamma^*(\xi) \quad ,$$

en posant encore $\gamma = \alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$; de plus, si $u : \xi \longrightarrow \eta$ est un morphisme dans $\mathcal{F}_S$, alors

$$\alpha^*(u) : \alpha^*(\xi) \longrightarrow \alpha^*(\eta)$$

est un morphisme dans $\mathcal{F}_{S'}$ compatible avec les données de recollement canoniques. On obtient ainsi un <u>foncteur canonique</u> de la catégorie $\mathcal{F}_S$ dans la catégorie des objets de $\mathcal{F}_{S'}$ munis d'une donnée de recollement relativement au couple (β_1 , β_2) . Ceci dit, on peut aussi exprimer la définition 3 en disant que le diagramme (+) de ladite est dit $\mathcal{F}$-exact si le foncteur précédent est "pleinement fidèle", i. e. définit une équivalence de la catégorie $\mathcal{F}_S$ avec une sous-catégorie de la catégorie des objets de $\mathcal{F}_{S'}$ munis d'une donnée de recollement relativement à (β_1 , β_2) .

DÉFINITION 1.5. - On dit qu'une donnée de recollement sur $\xi' \in \mathcal{F}_{S'}$ est <u>effective</u> (relativement à α) si ξ' muni de cette donnée est isomorphe à un $\alpha^*(\xi)$, avec $\xi \in \mathcal{F}_S$.

Dans le cas où le diagramme (+) est $\mathcal{F}$-exact, l'objet ξ de la définition précédente est donc déterminé à un isomorphisme unique près, et <u>la catégorie $\mathcal{F}_S$ est équivalente à la catégorie des objets de $\mathcal{F}_{S'}$ munis d'une donnée de recollement effective</u>.

c. Le cas le plus important est celui où

$$S'' = S' \times_S S'$$

les β_i étant les deux projections p_1 et p_2 de $S' \times_S S'$ sur ces deux facteurs (on suppose maintenant que dans $\underset{\sim}{C}$, les produits fibrés existent). On a alors deux conditions nécessaires immédiates pour qu'une donnée de recollement $\varphi : p_1^*(\xi') \longrightarrow p_2^*(\xi')$ sur un $\xi' \in \mathcal{F}_{S'}$ soit effective.

On a

(i) $$\Delta^*(\varphi) = \mathrm{id}_{\xi'}$$

où $\Delta : S' \longrightarrow S' \times_S S'$ désigne le morphisme diagonal, et où on a identifié $\Delta^* p_i^*(\xi')$ à $(p_i \Delta)^*(\xi') = \xi'$.

On a

(ii) $$p_{31}^*(\varphi) = p_{32}^*(\varphi)\ p_{21}^*(\varphi)$$

où p_{ij} désigne la projection canonique de $S' \times_S S' \times_S S'$ sur le produit partiel de son i-ième et j-ième facteur.

DÉFINITION 1.6. - On appelle <u>donnée de descente</u> sur $\xi' \in \mathcal{F}_{S'}$, relativement au morphisme $\alpha : S' \longrightarrow S$, une donnée de recollement sur ξ' relativement au couple (p_1, p_2) des projections canoniques $S' \times_S S' \longrightarrow S'$, satisfaisant aux conditions (i) et (ii) ci-dessus.

DÉFINITION 1.7. - Un morphisme $\alpha : S' \longrightarrow S$ est appelé un <u>morphisme de $\mathcal{F}$-descente</u> si le diagramme de morphismes

$$S \xleftarrow{\alpha} S' \underset{p_2}{\overset{p_1}{\leftleftarrows}} S' \times_S S'$$

est $\mathcal{F}$-exact (définition 1.3.) ; on dit que α est un <u>morphisme de $\mathcal{F}$-descente strict</u> si de plus toute donnée de descente (définition 1.6.) sur un objet de $\mathcal{F}_{S'}$ est effective.

Cette dernière condition peut aussi de façon plus imagée s'énoncer ainsi : <u>"Il revient au même" de se donner un objet de $\mathcal{F}_S$, ou un objet de $\mathcal{F}_{S'}$ muni d'une donnée de descente</u>.

Notons que si un morphisme de $\mathcal{F}$-descente $\alpha : S' \longrightarrow S$ admet une <u>"section"</u> $s : S \longrightarrow S'$ (i. e. un morphisme s tel que $\alpha s = \mathrm{id}_S$) alors c'est un morphisme de $\mathcal{F}$-descente strict : si $\xi' \in \mathcal{F}_{S'}$ est muni d'une donnée de descente relativement à α, "il provient" en effet de $\xi = s^*(\xi')$.

d. On peut présenter de façon plus intuitive les notions précédentes, en introduisant, pour un objet-paramètre T de $\underset{\sim}{C}$ au-dessus de S, l'ensemble

$$\mathrm{Hom}_S(T, S') = S'(T) \quad ,$$

dont les éléments seront désignés par t, t', etc. Un objet $\xi' \in \mathcal{F}_{S'}$ étant donné, à tout $t \in S'(T)$ correspond alors un objet $t^*(\xi')$ de $\mathcal{F}_T$, qui sera aussi noté ξ'_t. Une donnée de recollement sur ξ' (relativement à p_1, p_2) est alors définie par la donnée, pour tout T sur S, et tout couple de points $t, t' \in S'(T)$, d'un isomorphisme

$$\varphi_{t',t} : \xi'_t \longrightarrow \xi'_{t'}$$

(satisfaisant des conditions évidentes de fonctoralité, pour T variable). Les conditions (i) et (ii) de 1.c) s'écrivent alors

(i bis) $\qquad \varphi_{t,t} = \mathrm{id}_{\xi'_t} \qquad$ pour tout T et tout $t \in S'(T)$

(ii bis) $\varphi_{t,t''} = \varphi_{t,t'}\,\varphi_{t',t''}$ pour tout T et t , t' , $t'' \in S'(T)$

On voit d'ailleurs que (ii bis), en faisant $t = t' = t''$, implique $\varphi^2_{t,t} = \varphi_{t,t}$ d'où, puisque $\varphi_{t,t}$ est un isomorphisme par hypothèse, la relation (i bis), qui est donc en fait une conséquence de (i bis) (donc (i) est une conséquence de (ii)). Mais si on ne suppose plus a priori les $\varphi_{t,t'}$ des isomorphismes (i. e. que $\varphi : p_1^*(\xi') \longrightarrow p_2^*(\xi')$ est un isomorphisme), alors (ii bis) n'implique plus nécessairement (i bis) ; la conjonction de (ii bis) et (i bis) implique cependant que les $\varphi_{t,t'}$ sont des isomorphismes (car on aura $\varphi_{t,t'}\,\varphi_{t',t} = \varphi_{t,t} = \mathrm{id}_{\xi'_t}$).

2. Diagrammes exacts et épimorphismes stricts, morphismes de descente. Exemples.

a. DÉFINITION 2.1. - Soit $\underset{\sim}{C}$ une catégorie. Un diagramme

$$T \xrightarrow{\alpha} T' \underset{\beta_2}{\overset{\beta_1}{\rightrightarrows}} T''$$

de morphismes dans $\underset{\sim}{C}$ est dit exact, si pour tout $Z \in \underset{\sim}{C}$, le diagramme correspondant d'applications ensemblistes

$$\mathrm{Hom}(Z\ ,\ T) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z\ ,\ T') \rightrightarrows \mathrm{Hom}(Z\ ,\ T'')$$

est exact (définition 1.2.). On dit alors que $(T\ ,\alpha)$ (ou par abus de langage, que T) est un noyau du couple de morphismes $(\beta_1\ ,\ \beta_2)$.

Ce noyau est évidemment déterminé à isomorphisme unique près. Si $\underset{\sim}{C}$ est la catégorie des ensembles, la définition précédente est compatible avec la définition 1.2. On définit de façon duale l'exactitude d'un diagramme

$$S \xleftarrow{\alpha} S' \underset{\beta_2}{\overset{\beta_1}{\leftleftarrows}} S''$$

de morphismes dans $\underset{\sim}{C}$; on dit alors que $(S\ ,\alpha)$ est un conoyau du couple de morphismes $(\beta_1\ ,\ \beta_2)$.

DÉFINITION 2.2. - Un morphisme $\alpha : S' \longrightarrow S$ est appelé un épimorphisme strict, si c'est un épimorphisme, et si pour tout morphisme $u : S' \longrightarrow Z$, la condition nécessaire suivante est aussi suffisante pour que u se factorise en $S' \rightarrow S \rightarrow Z$: pour tout $S'' \in \underset{\sim}{C}$ et tout couple de morphismes β_1 , $\beta_2 : S'' \longrightarrow S'$ tel que $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$, on a aussi $u\beta_1 = u\beta_2$.

Si le produit fibré $S' \times_S S'$ existe, il revient au même de dire que le diagramme

$$S \xleftarrow{\alpha} S' \underset{p_2}{\overset{p_1}{\leftleftarrows}} S' \times_S S'$$

est exact, i. e. que S est un conoyau du couple (p_1 , p_2). En tous cas, un morphisme conoyau est un épimorphisme strict. Notons aussi qu'un épimorphisme strict qui est un monomorphisme est un isomorphisme. Nous laissons au lecteur de développer la notion duale de monomorphisme strict.

Pour préciser les relations entre la notion de morphisme de $\mathcal{F}$-descente, et la notion d'épimorphisme strict, nous introduisons encore les définitions suivantes :

DÉFINITION 2.3. - Un morphisme $\alpha : S' \longrightarrow S$ est appelé un épimorphisme universel (resp. un épimorphisme strict universel) si pour tout T sur S, le produit fibré $T' = S' \times_S T$ existe, et la projection $T' \longrightarrow T$ est un épimorphisme (resp. un épimorphisme strict).

Dans les très bonnes catégories (telles la catégorie des ensembles, la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique, les catégories abéliennes, etc.) les 4 notions d'épijectivité ainsi introduites coïncident ; elles sont au contraire toutes distinctes dans une catégorie telle que la catégorie des pré-schémas, où la catégorie des pré-schémas au-dessus d'un pré-schéma non vide donné S, même si on se borne à des S-schémas finis sur S.

DÉFINITION 2.4. - Un morphisme $\alpha : S' \longrightarrow S$ est appelé morphisme de descente (resp. un morphisme de descente strict) si c'est un morphisme de $\mathcal{F}$-descente (resp. un morphisme de $\mathcal{F}$-descente strict) (cf. définition 1.7.), où $\mathcal{F}$ désigne la catégorie fibrée de base $\underset{\sim}{C}$ des objets de $\underset{\sim}{C}$ sur des objets de $\underset{\sim}{C}$ (n° 1, exemple 1).

PROPOSITION 2.1. - Si dans $\underset{\sim}{C}$ les produits finis et les produits fibrés (finis) existent, alors il y a identité dans $\underset{\sim}{C}$ entre morphismes de descente, et épimorphismes stricts universels.

b. EXEMPLES. - Soit $\underset{\sim}{C}$ la catégorie des pré-schémas. Soit $S \in \underset{\sim}{C}$, soient S' et S'' deux pré-schémas finis sur S, i. e. correspondants à des faisceaux d'algèbres $\underset{\sim}{A}'$, $\underset{\sim}{A}''$ sur S qui en tant que faisceaux de modules sont quasi-cohérents et de type fini (i. e. cohérents si S est localement noethérien). Soit $\alpha : S' \longrightarrow S$ le morphisme structural de S', et soient β_1, β_2 deux S-morphismes de S'' dans S', définis par des homomorphismes d'algèbres $\underset{\sim}{A}' \longrightarrow \underset{\sim}{A}''$ désignés encore par β_1, β_2. Utilisant le fait qu'un morphisme fini est fermé (premier théorème de Cohen-Seidenberg) on prouve facilement que le diagramme

$$(+) \qquad S \xleftarrow{\alpha} S' \underset{\beta_2}{\overset{\beta_1}{\leftleftarrows}} S''$$

dans $\underset{\sim}{C}$ est exact si et seulement si le diagramme de faisceaux

$$\underset{\sim}{O}_S = \underset{\sim}{A} \xrightarrow{\alpha} \underset{\sim}{A}' \underset{\beta_2}{\overset{\beta_1}{\rightrightarrows}} \underset{\sim}{A}''$$

sur S est exact. En particulier, si $\alpha : S' \longrightarrow S$ est un morphisme fini correspondant à un faisceau $\underset{\sim}{A}'$ d'algèbres sur S , alors α est un épimorphisme strict si et seulement si le diagramme de faisceaux

$$\underset{\sim}{O}_S = \underset{\sim}{A} \to \underset{\sim}{A}' \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} \underset{\sim}{A}' \otimes_{\underset{\sim}{A}} \underset{\sim}{A}'$$

est exact (c'est un épimorphisme si et seulement si $\underset{\sim}{A} \to \underset{\sim}{A}'$ est injectif). Si S est affine d'anneau A , donc S' affine d'anneau A' fini sur A , alors $S' \longrightarrow S$ est un épimorphisme strict si et seulement si $A \longrightarrow A'$ est un isomorphisme de A sur le sous-anneau de A' formé des $x' \in A'$ tels que

$$1_{A'} \otimes_A x' - x' \otimes_A 1_{A'} = 0$$

(c'est un épimorphisme si et seulement si $A \longrightarrow A'$ est injectif). Comme nous l'avons déjà signalé, même si S est le schéma d'un anneau local artinien, un morphisme fini $S' \longrightarrow S$ qui est un épimorphisme n'est pas nécessairement un épimorphisme strict. Cependant, on peut prouver que <u>si</u> S <u>est un pré-schéma noethérien, tout morphisme fini</u> $S' \longrightarrow S$ <u>qui est un épimorphisme, est le composé d'une suite finie d'épimorphismes stricts</u> (également finis). Cela montre d'ailleurs que le composé de deux épimorphismes stricts n'est pas nécessairement un épimorphisme strict.

c. Si (+) est un diagramme exact de morphismes finis, alors pour tout morphisme <u>plat</u> $T \longrightarrow S$ de pré-schémas, le diagramme transformé de (+) par le changement de base $T \longrightarrow S$ est encore exact. Il en résulte que si X , Y sont deux S-pré-schémas, X étant <u>plat</u> sur S , alors le diagramme d'applications ensemblistes suivant (où X' , Y' sont les images réciproques de X , Y sur S' , et X" , Y" leurs images réciproques sur S")

$$\mathrm{Hom}_S(X , Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S'}(X' , Y') \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{S''}(X'' , Y'')$$

est exact. En particulier, si $\mathcal{F}$ désigne la catégorie fibrée de base la catégorie $\underset{\sim}{C}$ des pré-schémas, telle que pour $X \in \underset{\sim}{C}$, $\mathcal{F}_X$ soit la catégorie des X-pré-schémas <u>plats</u>, alors le diagramme (+) est $\mathcal{F}$-exact. (Ce résultat devient faux si on ne fait pas d'hypothèse de platitude, en particulier un épimorphisme strict fini n'est pas nécessairement un morphisme de descente). On voit de même que (+) est $\mathcal{F}$-exact si $\mathcal{F}$ désigne la catégorie fibrée pour laquelle $\mathcal{F}_X$ est la catégorie des faisceaux quasi-cohérents et <u>plats</u> sur le pré-schéma X (ici encore l'hypothèse de platitude est essentielle). Dans l'un et l'autre cas, la question de l'effectivité d'une donnée de recollement (et plus particulièrement, d'une donnée de descente, lorsque $S'' = S' \times_S S'$) sur un objet plat au-dessus de S' , est délicate, (et sa réponse dans divers cas particuliers est un des objets principaux des présents exposés). Le conférencier ignore si, pour tout épimorphisme strict fini $S' \longrightarrow S$, toute donnée de descente sur un faisceau quasi-cohérent plat sur S' est effective (même en supposant que S est le spectre d'un anneau local artinien, et en se bornant aux faisceaux localement libres de rang 1). Plus généralement, soient A un anneau, A' une A-algèbre (tout est commutatif) telle que le diagramme d'applications

$$A \longrightarrow A' \rightrightarrows A' \otimes_A A'$$

soit exact, ce qui équivaut aussi au fait que le morphisme $S' \longrightarrow S$ correspondant pour les spectres de A , A' soit un morphisme de $\mathcal{F}$-descente, où $\mathcal{F}$ est la catégorie fibrée des faisceaux quasi-cohérents plats. Soit M' un A'-module plat muni d'une donnée de descente à A , i. e. d'un isomorphisme

$$\varphi : \ M' \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} A' \otimes_A M'$$

de $A' \otimes_A A'$-modules, satisfaisant les conditions (i) et (ii) de 1.(c) (que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter en termes de modules). Cette donnée est-elle effective (relativement à la catégorie fibrée des faisceaux quasi-cohérents plats) ? Soit M le sous-ensemble de M' formé des $x' \in M'$ tels que

$$\varphi(x' \otimes_A 1_{A'}) = 1_{A'} \otimes_A x' \quad ,$$

c'est un sous-A-module de M' . L'injection canonique $M \longrightarrow M'$ définit un homomorphisme de A'-modules $M \otimes_A A' \longrightarrow M'$. L'effectivité de φ signifie alors ceci : M est un A-module plat, et l'homomorphisme précédent est un isomorphisme.

REMARQUE. - Dans les considérations précédentes, nous n'avions fait aucune hypothèse de platitude sur les morphismes du diagramme (+) , ce qui nous obligeait, pour avoir une technique de descente, de faire des hypothèses de platitude sur les objets au-dessus de S , S' qu'on considère. Dans le paragraphe 2, nous ferons une hypothèse de platitude sur $\alpha : S' \longrightarrow S$, ce qui nous permettra d'avoir une technique de descente pour des objets au-dessus de S , S' qui ne sont plus soumis à aucune condition de platitude. Dans tous les cas, il y a une hypothèse de platitude qui intervient. C'est là une des principales raisons de l'importance de la notion de platitude en géométrie algébrique (dont le rôle ne pouvait apparaître tant qu'on se bornait à des corps de base, sur lesquels n'importe quoi, en effet, est plat !).

3. Application aux étalements.- Soient A un anneau local, B une algèbre locale sur A dont l'idéal maximal induit celui de A . Nous dirons que B est étalé sur A (au lieu de "non ramifié", utilisé par ailleurs) s'il satisfait les conditions suivantes :

(i) B est plat sur A

(ii) $B/\mathfrak{m}B$ est une extension finie séparable de $A/\mathfrak{m} = k$ (où $\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximal de A).

Lorsque A et B sont noethériens et k algébriquement clos, cela signifie que l'homomorphisme $\bar{A} \longrightarrow \bar{B}$ sur les complétés qui prolonge $A \longrightarrow B$ est un isomorphisme. Un morphisme de type fini $f : T \longrightarrow S$ est dit étale en $x \in T$, ou encore T est dit étalé sur S en x , si $\underline{O}_x$ est étalé sur $\underline{O}_{f(x)}$, et f est dit étale ou encore f est appelé un étalement, ou T est dit étalé sur S , si f est étale en tout $x \in T$. Remarquons d'ailleurs que si S est localement noethérien, l'ensemble des points de T où f est étale est ouvert, et l'utilisation du "main theorem" de Zariski permet de préciser la structure de T/S au voisinage d'un tel point (par une équation de type bien connu).

Lorsque S est un schéma de type fini sur le corps des complexes, il lui correspond un espace analytique $\bar{S}$ au sens de SERRE [5], à cela près que $\bar{S}$ peut avoir des éléments nilpotents dans son faisceau structural, ce qui ne change rien d'essentiel dans [5]. On voit alors facilement que f est un étalement si et seulement si $\bar{f} : \bar{T} \longrightarrow \bar{S}$ l'est, i. e. si tout point de $\bar{T}$ admet un voisinage sur lequel $\bar{f}$ induit un isomorphisme sur un ouvert de $\bar{S}$. En particulier, à tout revêtement étale T de S (i. e. un morphisme fini étale $f : T \longrightarrow S$) correspond un revêtement étale $\bar{T}$ de $\bar{S}$, qui est connexe si et seulement si T l'est [5]. On voit d'ailleurs facilement que si T , T' sont deux schémas étalés sur S , alors l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}_S(T\ ,\ T') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\bar{S}}(\bar{T}\ ,\ \bar{T}')$$

est bijective, i. e. le foncteur $T \longrightarrow \bar{T}$ de la catégorie des schémas étalés sur S dans la catégorie des espaces analytiques étalés sur $\bar{S}$ est "pleinement fidèle", donc définit une équivalence de la première catégorie avec une sous-catégorie de la seconde. Un théorème de GRAUERT-REMMERT [2] implique que si S est normal, on obtient ainsi une équivalence de la catégorie des revêtements étales de S et de la catégorie des revêtements étales (finis) de $\bar{S}$, **i. e. que tout revêtement étale** de $\bar{S}$ est $\bar{S}$-isomorphe à un $\bar{T}$, où T est un revêtement étale de S . Montrons que le théorème de Grauert-Remmert reste valable sans hypothèse de normalité sur S . Soit en effet d'abord $S' \longrightarrow S$ un épimorphisme strict fini, supposons le théorème démontré pour S' , montrons qu'il sera vrai pour S . En effet, soit $\mathcal{C}$ un revêtement étale de $\bar{S}$, considérons son image réciproque $\mathcal{C}'$ sur S' , qui correspond à un faisceau analytique cohérent $\mathcal{A}$ d'algèbres sur S' , image réciproque du faisceau d'algèbres $\mathcal{A}$ sur $\bar{S}$ définissant $\mathcal{C}$. Par hypothèse, sur S' , $\mathcal{C}'$ provient d'un revêtement étale T' de S', i. e. $\mathcal{A}'$ provient d'un faisceau cohérent d'algèbres $\underset{\sim}{A}'$ sur S' . D'autre part $\mathcal{A}'$ est muni d'une donnée de descente canonique relativement à $\bar{S}' \to \bar{S}$, i. e. d'un isomorphisme entre ses deux images réciproques sur $\bar{S}' \times_{\bar{S}} \bar{S}' = \overline{(S' \times_S S')}$, (satisfaisant des conditions (i), (ii)) et cet isomorphisme provient, d'après ce qui a été dit, d'un isomorphisme sur les faisceaux algébriques correspondants, i. e. d'une donnée de descente sur $\underset{\sim}{A}'$ relativement à $S' \to S$. On vérifie facilement que cette dernière est effective (car celle sur $\mathcal{A}'$ l'est, et l'effectivité d'une donnée de descente, telle qu'elle a été explicitée au numéro précédent, se reconnaît localement sur les complétés des modules qui entrent en jeu). D'où un faisceau cohérent d'algèbres $\underset{\sim}{A}$ sur S , définissant un revêtement T de S , qui est le revêtement cherché. Le résultat précédent reste alors manifestement valable si $S' \to S$ est seulement un composé d'un nombre fini d'épimorphismes stricts finis, i. e. est un épimorphisme fini quelconque (d'après le résultat de factorisation signalé au paragraphe 2). Il s'ensuit que le théorème de Grauert-Remmert reste valable si S est un schéma réduit, i. e. tel que $\underset{\sim}{O}_S$ n'ait pas d'éléments nilpotents, comme on voit en introduisant son normalisé S' . On passe facilement de là au cas général.

Une démonstration toute analogue, utilisant encore le résultat de factorisation pour les épimorphismes stricts finis et la nature "formelle" de l'effectivité de données de descente, permet de prouver le résultat suivant : soit S un pré-schéma localement noethérien et soit $S' \to S$ un morphisme fini, surjectif, radiciel (ou, ce qui revient au même, un morphisme de type fini tel que pour tout T sur S , le morphisme $T' = S' \times_S T \to T$ soit un homéomorphisme, ce qu'on exprime encore en disant que $S' \to S$ est un homéomorphisme universel). Pour tout T étalé sur S , considérons son image inverse $T' = T \times_S S'$, qui est étalé sur S' . Alors le foncteur $T \rightsquigarrow T'$ est une équivalence de catégories de la catégorie des pré-schémas T étalés sur S avec la catégorie des pré-schémas T' étalés sur S' . (On utilise la bijectivité de

$$\mathrm{Hom}_S(T_1 , T_2) \to \mathrm{Hom}_{S'}(T'_1 , T'_2)$$

pour deux pré-schémas T_1 , T_2 étalés sur S , fait dont la vérification directe est facile, et le fait que le théorème énoncé est vrai si $S' = (S , \underset{\sim}{O}_S/\mathcal{J})$

où $\mathcal{J}$ est un faisceau cohérent nilpotent d'idéaux de $\underset{\sim}{O}_S$ ([4], lemme 6)). Noter d'ailleurs que nous ne supposons pas ici les T envisagés finis sur S. Ce résultat implique en particulier, que le morphisme $S' \longrightarrow S$ induit un isomorphisme du groupe fondamental [ ] de S' sur celui de S ("invariance topologique du groupe fondamental d'un pré-schéma").

4. Relations avec la 1-cohomologie.

a. Soit $\underset{\sim}{C}$ une catégorie ou le produit de deux objets existe toujours, soit $T \in \underset{\sim}{C}$. Pour tout ensemble fini $I \neq \emptyset$, on peut considérer T^I, pour I variable, on obtient ainsi un foncteur covariant de la catégorie des ensembles finis non vides dans $\underset{\sim}{C}$, i. e. ce qu'on peut appeler un objet simplicial de $\underset{\sim}{C}$, noté K_T. Ce dernier dépend de façon covariante de T ; d'ailleurs si u, v sont deux morphismes $T \longrightarrow T'$, alors les morphismes correspondants $K_T \longrightarrow K_{T'}$ sont homotopes. Disons que T domine T' si $\mathrm{Hom}(T, T') \neq \emptyset$, c'est là une relation de préordre filtrante croissante dans $\underset{\sim}{C}$. Il résulte de ce qui précède que si T domine T', il existe une classe (à une homotopie près) canonique d'homomorphismes d'objets simpliciaux $K_T \longrightarrow K_{T'}$, en particulier si K_T et $K_{T'}$ sont tels que chacun domine l'autre, alors K_T et $K_{T'}$ sont homotopiquement équivalents. Soit maintenant F un foncteur (contravariant pour fixer les idées) de $\underset{\sim}{C}$ dans une catégorie abélienne $\underset{\sim}{C}'$, alors

$$C^*(T, F) = F(K_T)$$

est un objet cosimplicial de $\underset{\sim}{C}'$, donc définit de façon bien connue un complexe (de cochaînes) dans $\underset{\sim}{C}'$, dont on peut prendre la cohomologie

$$H^*(T, F) = H^*(C^*(T, F)) = H^*(F(K_T))$$

(on pourra mettre un $\underset{\sim}{C}$ en indice du H^* s'il y a possibilité de confusion). C'est là un foncteur cohomologique en F, dont la variance pour T variable résulte de ce qui a été dit sur les K_T ; de façon précise, pour F fixé et T variable dans $\underset{\sim}{C}$ (préordonné par la relation de domination) les $H^*(T, F)$ forment un système inductif d'objets gradués de $\underset{\sim}{C}'$; en particulier, si T et T' sont tels que chacun domine l'autre, alors $H^*(T, F)$ et $H^*(T', F)$ sont canoniquement isomorphes.

Supposons que dans $\underset{\sim}{C}$ les produits fibrés existent, alors on peut, pour $S \in \underset{\sim}{C}$ fixé, appliquer ce qui précède à la catégorie $\underset{\sim}{C}_S$ des objets de $\underset{\sim}{C}$ au-dessus de S, on écrira $C^*(T/S, F)$ et $H^*(T/S, F)$ au lieu de $C^*(T, F)$ et $H^*(T, F)$ si on veut préciser que l'on se place dans la catégorie $\underset{\sim}{C}_S$; ainsi,

$C^*(T/S\ , F)$ est un complexe de cochaînes dans $\underset{\sim}{C}'$ qui, en dimension n est égal à $F(T \times_S T \times_S \dots \times_S T)$ (où la parenthèse comporte $n+1$ facteurs).

Notons que comme d'habitude, on peut définir $H^0(T/S\ , F)$ sans supposer la catégorie $\underset{\sim}{C}'$ abélienne : c'ést le noyau (définition 2.1), s'il existe, du couple de morphismes $F(p_i)$ $(i = 1\ , 2)$

$$F(T) \rightrightarrows F(T \times_S T)$$

correspondants aux deux projections $p_1\ , p_2\ :\ T \times_S T \rightrightarrows T$. En particulier, on aura un morphisme naturel (dit d'<u>augmentation</u>)

$$F(S) \longrightarrow H^0(T/S\ , F)$$

qui sera un isomorphisme dans les cas favorables (en particulier si $T \longrightarrow S$ est un épimorphisme strict et si F est "exact à gauche"). De même, lorsque F prend ses valeurs dans la catégorie des groupes dans une catégorie $\underset{\sim}{C}''$, on peut aussi définir $H^1(T/S\ , F)$; dans le cas où $\underset{\sim}{C}''$ est la catégorie des ensembles (i. e. F prend ses valeurs dans la catégorie des groupes ordinaires, non nécessairement commutatifs), $H^1(T\ , F)$ est le quotient du sous-groupe $Z^1(T/S\ , F)$ de $C^1(T/S\ , F) = F(T \times_S T)$ formé des g tels que

$$F(p_{31})(g) = F(p_{32})(g)\ F(p_{21})(g)$$

par le groupe d'opérateurs $F(T)$, opérant sur $C^1(T/S\ , F)$ et en particulier, sur le sous-ensemble $Z^1(T/S\ , F)$ par

$$\rho(g').g = F(p_2)(g')\, g\, F(p_1)(g')^{-1}$$

b. Soit par exemple $\mathcal{F}$ une catégorie fibrée de base $\underset{\sim}{C}$. Soient $\xi, \eta \in \mathcal{F}_S$, et pour tout S' sur S , soit

$$F_{\xi,\eta}(S') = \mathrm{Hom}\ (\xi \times_S S'\ , \eta \times_S S')$$

Ainsi, $F_{\xi,\eta}$ est un foncteur contravariant de $\underset{\sim}{C}_S$ dans la catégorie des ensembles. Ceci posé, <u>dire que le mormhisme d'augmentation</u>

$$F_{\xi,\eta}(S) \longrightarrow H^0(S'/S\ , F_{\xi,\eta})$$

<u>est un isomorphisme pour tout couple d'éléments</u> $\xi\ , \eta \in \mathcal{F}_S$, <u>signifie que</u> $\alpha :\ S' \longrightarrow S$ <u>est un morphisme de</u> $\mathcal{F}$<u>-descente</u> (définition 1.7).

c. Posons de même, pour $\xi \in \mathcal{F}_S$ et tout objet S' de $\underset{\sim}{C}$ au-dessus de

$$G_\xi(S') = \mathrm{Aut}\ (\xi \times_S S')\qquad ,$$

on a ainsi défini un foncteur contravariant G_ξ de $\underset{\sim}{C}_S$ dans la catégorie des groupes. Ceci posé, on constate que $Z^1(S'/S , G)$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des données de descente sur $\xi' = \xi \times_S S'$ relativement à $S' \longrightarrow S$ (définition 1.6), et $H^1(S'/S , G)$ s'identifie à l'ensemble des classes (à un isomorphisme près) d'objets de $\mathcal{F}_{S'}$ munis d'une donnée de descente relativement à $\alpha : S' \longrightarrow S$, qui, en tant qu'objets de $\mathcal{F}_{S'}$ sont isomorphes à $\xi' = \xi \times_S S'$ Si donc $\alpha : S' \longrightarrow S$ est un morphisme de $\mathcal{F}$-descente (cf. (b)), alors $H^1(S'/S , G)$ contient comme sous-ensemble l'ensemble des classes (à un isomorphisme près) d'objets η de $\mathcal{F}_S$ tels que $\eta \times_S S'$ soit isomorphe dans $\mathcal{F}_{S'}$ à $\xi \times_S S'$; et cette inclusion est une identité si et seulement si toute donnée de descente sur $\xi' = \xi \times_S S'$ relativement à $\alpha : S' \longrightarrow S$ est effective. (Ce sera le cas en particulier si $\alpha : S' \longrightarrow S$ est un morphisme de S-descente strict).

REMARQUE. - Les complexes de cochaînes du type $C^*(T/S , F)$ contiennent comme cas particuliers la plupart des complexes standard connus (cohomologie de Čech, cohomologie des groupes, etc.), et jouent un rôle important en géométrie algébrique, (notamment dans la "cohomologie de Weil" des préschémas).

d. EXEMPLE 1. - Soit S' un objet au-dessus de $S \in \underset{\sim}{C}$, et soit Γ un groupe d'automorphismes de S' tel que S' soit "formellement principal sur S , de groupe Γ ", i. e. tel que le morphisme naturel

$$\Gamma \times S' \longrightarrow S' \times_S S' \qquad ,$$

où $\Gamma \times S'$ désigne la somme directe de Γ copies de S' , soit un isomorphisme. (On suppose que dans $\underset{\sim}{C}$ les sommes directes qui interviennent ici existent). Soit F un foncteur contravariant de $\underset{\sim}{C}$ dans la catégorie des groupes abéliens. Alors $C^*(S'/S , F)$ est canoniquement isomorphe au groupe simplicial de cochaînes standard homogènes $C^*(\Gamma , F(S'))$, donc $H^*(S'/S , F)$ est canoniquement isomorphe à $H^*(\Gamma , F(S'))$.

e. EXEMPLE 2. - Soit $\underset{\sim}{C}$ la catégorie des pré-schémas. On désigne par G_a ("groupe additif") le foncteur contravariant de G dans la catégorie des groupes abéliens, défini par

$$G_a(X) = H^o(X , \underset{\sim}{O}_X) \qquad .$$

On définit de même le foncteur G_m ("groupe multiplicatif") par

$$G_m(X) = H^o(X , \underset{\sim}{O}_X)^*$$

(= groupe des éléments inversibles de l'anneau $H^o(X , \underset{\sim}{O}_X)$), et plus généralement le foncteur $Gl(n)$ ("groupe linéaire d'ordre n ") par

$$\mathrm{Gl}(n)(X) = \mathrm{Gl}(n\ ,\ H^{o}(X\ ,\ \underset{\sim}{O}_X))$$

qui est un foncteur de $\underset{\sim}{C}$ dans la catégorie des groupes (non nécessairement commutatifs si $n > 1$; pour $n = 1$ on retrouve G_m). On peut d'ailleurs interpréter $\mathrm{Gl}(n)$ comme un foncteur-automorphisme (cf. (c)) en considérant la catégorie fibrée $\mathcal{F}$ de base $\underset{\sim}{C}$ telle que pour $X \in \underset{\sim}{C}$, $\mathcal{F}_X$ soit la catégorie des faisceaux localement libres sur X : on a en effet $\mathrm{Gl}(n)(X) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(\underset{\sim}{O}_X^n)$. D'après (b) il s'ensuit que si $\alpha : S' \longrightarrow S$ est un morphisme de $\mathcal{F}$-descente (cf. paragraphe 2.(c)) $H^1(S'/S\ ,\ \mathrm{Gl}(n))$ contient l'ensemble des classes (à un isomorphisme près) de faisceaux localement libres sur S dont l'image inverse sur S' est isomorphe à $\underset{\sim}{O}_{S'}^n$, et cette inclusion est une égalité si et seulement si toute donnée de descente sur $\underset{\sim}{O}_{S'}^n$ (relativement à $\alpha : S' \longrightarrow S$) est effective. Lorsque S est le spectre d'un anneau local, cela signifie donc $H^1(S'/S\ ,\ \mathrm{Gl}(n)) = (e)$, puisque tout faisceau localement libre sur S est alors trivial.

Notons l'équivalence des conditions suivantes sur un morphisme $\alpha : S' \longrightarrow S$:

(i). L'homomorphisme d'augmentation $H^{o}(S\ ,\ \underset{\sim}{O}_S) = G_a(S) \longrightarrow H^{o}(S'/S\ ,\ G_a)$ est un isomorphisme

(ii). $S' \longrightarrow S$ est un morphisme de $\mathcal{F}$-descente ($\mathcal{F}$ étant la catégorie fibrée de base $\underset{\sim}{C}$ envisagée ci-dessus).

Si $S' \longrightarrow S$ est fini, ces conditions équivalent aussi à

(iii). $S' \longrightarrow S$ est un épimorphisme strict (cf. paragraphe 2.(c)).

Supposons maintenant que $S = \mathrm{Spec}\ (A)$, $S' = \mathrm{Spec}\ (A')$; alors on a

$$C^n(S'/S\ ,\ G_a) = C^n(A'/A\ ,\ G_a) = \overset{n+1}{\otimes_A} A'$$

l'opérateur cobord $C^n(A'/A\ ,\ G_a) \longrightarrow C^{n+1}(A'/A\ ,\ G_a)$ étant somme alternée des opérateurs faces

$$\partial_i(x_o \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = x_o \otimes \dots \otimes x_{i-1} \otimes 1_{A'} \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_n$$

De même, $C^n(S'/S\ ,\ G_m) = C^n(A'/A\ ,\ G_m)$ s'identifie à $(\overset{n+1}{\otimes_A} A')^*$, les opérations simpliciales dans $C^*(A'/A\ ,\ G_m)$ étant induites par celles de $C^*(S'/S\ ,\ G_a)$. On explicite de même les opérations simpliciales dans $C^*(A'/A\ ,\ \mathrm{Gl}(n))$. <u>Dans tous les cas à la connaissance du conférencier, on a</u> $H^i(A'/A\ ,\ G_a) = 0$ <u>pour</u> $i > 0$, <u>et si</u> A <u>est local, on a</u> $H^1(A'/A\ ,\ G_m) = 0$ <u>et plus généralement</u> $H^1(A'/A\ ,\ \mathrm{Gl}(n)) = (e)$ (lorsque $S' \longrightarrow S$ est un morphisme de $\mathcal{F}$-descente, i. e. le diagramme $A \longrightarrow A' \rightrightarrows A' \otimes_A A'$ est exact, comparer avec le paragraphe 2.(c)). On notera que <u>le "théorème</u> 90" <u>de Hilbert n'est autre que la relation</u>

$H^1(S'/S\ , G_m) = 0$ lorsque A est un corps et A' une extension galoisienne finie de ce dernier (cf. exemple 1), et peut encore s'exprimer en disant que dans le cas envisagé, $S' \longrightarrow S$ est un morphisme de descente strict pour la catégorie fibrée des faisceaux localement libres de rang 1. C'est sous cette dernière forme qu'il convient de généraliser le théorème de Hilbert, en variant les hypothèses aussi bien sur le morphisme $S' \longrightarrow S$ que sur les faisceaux quasi-cohérents envisagés.

Notons enfin l'équivalence des propriétés suivantes, lorsque A est un anneau local artinien d'idéal maximal m, A' une A-algèbre (en désignant, pour tout entier $k > 0$, par A_k (resp. A'_k) les anneaux $A/\mathfrak{m}^{k+1}$ (resp. $A'/\mathfrak{m}^{k+1}A'$)) :

(i). $H^1(A'_k/A_k\ , G_a) = 0$ pour tout k.

(ii). $H^1(A'_k/A_k\ , G_m) = 0$ pour tout k.

(iii). $H^1(A'_k/A_k\ , Gl(n)) = (e)$ pour tout k et tout n.

Si $S' \longrightarrow S$ est un épimorphisme strict, alors les conditions précédentes impliquent même que c'est un morphisme de descente strict pour les modules libres (de type fini ou non) sur A'.

REMARQUE. - La définition des groupes $H^i(S'/S\ , G_m)$, dans le cas où S, S' sont des schémas de corps A, A', est due à AMITSUR. Le groupe $H^2(S'/S\ , G_m)$ est particulièrement intéressant comme variante "globale" du groupe de Brauer, variante pour laquelle on pourra se référer à [1], chapitre VII.

B. Descente par morphismes fidèlement plats.

1. Enoncé des théorèmes de descente.

DÉFINITION 1.1. - Un morphisme $\alpha : S' \longrightarrow S$ de pré-schémas est dit plat si pour tout $x' \in S'$, $\mathcal{O}_{x'}$ est un module plat sur l'anneau $\mathcal{O}_{\alpha(x')}$ (i. e. $\mathcal{O}_{x'} \otimes_{\mathcal{O}_{\alpha(x')}} M$ est un foncteur exact en le $\mathcal{O}_{\alpha(x')}$-module M). Un morphisme est dit fidèlement plat s'il est plat et surjectif.

Par exemple, si $S = \mathrm{Spec}\,(A)$, $S' = \mathrm{Spec}\,(A')$, alors S' est plat sur S si et seulement si A' est un A-module plat, et S' est fidèlement plat sur S si et seulement si A' est un A-module fidèlement plat (i. e. le foncteur $A' \otimes_A M$ en le A-module M est exact et fidèle) ; cela signifie aussi, dans la terminologie de SERRE [5], que le couple (A, A') est plat. Si S' est fidèlement plat sur S, alors le foncteur image inverse de faisceaux quasi-cohérents sur S est exact et fidèle, en d'autres termes, pour qu'une suite d'homomorphismes de faisceaux quasi-cohérents sur S soit exacte, il faut et il suffit que son image réciproque sur S' le soit (en particulier, pour qu'un homomorphisme de faisceaux quasi-cohérents sur S soit un monomorphisme, resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme, il faut et il suffit que son image inverse sur S' le soit). Cette propriété reste vraie si on se restreint au-dessus d'un ouvert quelconque de S, et sous cette forme caractérise les morphismes fidèlement plats.

DÉFINITION 1.2. - Un morphisme $\alpha : S' \longrightarrow S$ est dit quasi-compact si l'image inverse de toute partie ouverte quasi-compacte U de S est quasi-compacte (i. e. réunion finie d'ouverts affines).

Il suffit évidemment de vérifier cette propriété pour les ouverts affines de S. Par exemple, un morphisme affine (i. e. tel que l'image inverse d'un ouvert affine soit affine) est quasi-compact.

La classe des morphismes plats, resp. fidèlement plats, resp. quasi-compacts, est stable par composition et par "extension de la base", et contient bien entendu les isomorphismes.

THÉORÈME 1. - Soit $\alpha : S' \longrightarrow S$ un morphisme de pré-schémas, fidèlement plat et quasi-compact. Alors α est un morphisme de descente strict (A, définition 1.7) pour la catégorie fibrée $\mathcal{F}$ des faisceaux quasi-cohérents (A, paragraphe 1, exemple 2).

Cet énoncé signifie deux choses :

(i) Si F et G sont deux faisceaux quasi-cohérents sur S, F' et G' leurs images inverses sur S', alors l'homomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}\,(F\,,\,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(F'\,,\,G')$$

est une bijection du premier membre sur le sous-groupe du second formé des homomorphismes $F' \longrightarrow G'$ qui sont compatibles avec les données de descente canoniques sur ces faisceaux, i. e. dont les images inverses par les deux projections de $S'' = S' \times_S S'$ sur S' donnent un même homomorphisme $F'' \longrightarrow G''$.

(ii) Tout faisceau quasi-cohérent F' sur S', muni d'une donnée de descente relativement au morphisme $\alpha : S' \longrightarrow S$ (A, définition 1.6), est isomorphe (muni de cette donnée) à l'image inverse d'un faisceau quasi-cohérent F sur S.

Faisant $F = \underline{O}_S$ dans (i), on trouve :

COROLLAIRE 1. - Soit G un faisceau quasi-cohérent sur S, soient G' et G'' ses images inverses sur S' et sur $S'' = S' \times_S S'$, soient p_1, p_2 les deux projections de S'' sur S', alors le diagramme suivant d'applications d'ensembles

$$\Gamma(G) \xrightarrow{\alpha^*} \Gamma(G') \underset{p_2^*}{\overset{p_1^*}{\rightrightarrows}} \Gamma(G'')$$

est exact (A, définition 1.(a)).

D'autre part, la conjonction de (i), (ii) et de la définition 1.1 donne le

COROLLAIRE 2. - Soit G comme dans le corollaire 1. Alors il y a correspondance biunivoque entre les sous-faisceaux quasi-cohérents de G, et les sous-faisceaux quasi-cohérents de G' dont les images inverses sur S'', par les deux projections p_1, p_2, donnent le même sous-faisceau de G''.

Bien entendu, on a un énoncé équivalent en termes de faisceaux quotients. Comme on l'a vu (A, paragraphe 4, (e)), le théorème 1 doit être considéré comme une généralisation du "théorème 90" de Hilbert, et implique comme cas particuliers diverses formulations en termes de 1-cohomologie. Pour la démonstration, on est ramené facilement au cas où $S = \mathrm{Spec}(A)$, $S' = \mathrm{Spec}(A')$, et pour (i) on se ramène facilement à prouver le corollaire 1, i. e. l'exactitude du diagramme

$$M = A \otimes_A M \longrightarrow A' \otimes_A M \rightrightarrows A' \otimes_A A' \otimes_A M$$

pour tout A-module M, ce qui résulte du lemme plus général :

LEMME 1.1. - Soit A' une A-algèbre fidèlement plate. Alors pour tout A-module M, le complexe M-augmenté $C^*(A'/A, G_a) \otimes_A M$ (cf. A, paragraphe 4, (e)) est une résolution de M.

Il suffit de prouver que le complexe augmenté déduit du précédent par extension de la base de A à A' satisfait les mêmes conclusions. Cela amène à vérifier l'énoncé quand on remplace A par A' et A' par $A' \otimes_A A'$, donc nous ramène à un cas où il existe un homomorphisme de A-algèbres $A' \longrightarrow A$ (ou, en termes géométriques, au cas où S' sur S admet une section). Dans ce cas, cela résulte des généralités du A, paragraphe 4, (a). Signalons en passant le corollaire suivant, qui généralise un énoncé bien connu en cohomologie de Galois (comparer A, paragraphe 4, (e)) :

COROLLAIRE. - Si A' est fidèlement plat sur A, on a $H^0(A'/A, G_a) = A$ et $H^i(A'/A, G_a) = 0$ pour $i \geqslant 1$.

Pour prouver la partie (ii) du théorème 1, on procède comme pour (i) en se ramenant au cas où S' sur S admet une section, où cela résulte de (i) (cf. A, paragraphe 1, (c)).

On peut évidemment varier ad libitum le théorème 1 et ses corollaires en introduisant des structures supplémentaires diverses sur les faisceaux (ou systèmes de faisceaux) quasi-cohérents envisagés. Par exemple, la donnée sur S d'un faisceau quasi-cohérent d'algèbres commutatives "équivaut" à la donnée sur S' d'un tel faisceau, muni d'une donnée de descente relativement à $\alpha : S' \longrightarrow S$. Compte tenu de la correspondance fonctorielle entre de tels faisceaux quasi-cohérents sur S , et des pré-schémas affines au-dessus de S , on obtient la deuxième assertion du théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soit $\alpha : S' \longrightarrow S$ comme dans le théorème 1. Alors α est un <u>morphisme de descente</u> (non strict en général) (A définition 2.4), et c'est un <u>morphisme de descente strict</u> pour la catégorie fibrée des schémas; affines au-dessus de pré-schémas, (A, définition 1.7).

La première assertion du théorème signifie ceci : soient X , Y deux pré-schémas au-dessus de S , X' , Y' leurs images inverses sur S' et X'' , Y'' leurs images inverses sur $S'' = S' \times_S S'$, alors le diagramme suivant d'applications naturelles

$$\mathrm{Hom}_S(X , Y) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_{S'}(X' , Y') \underset{p_2^*}{\overset{p_1^*}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}_{S''}(X'' , Y'')$$

est <u>exact</u>, i. e. α^* est une bijection de $\mathrm{Hom}_S(X , Y)$ sur la partie de $\mathrm{Hom}_{S'}(X' , Y')$ formé des homomorphismes qui sont compatibles avec les données de descente canoniques sur X' , Y' (i. e. dont les images inverses par les deux projections de S'' sur S' sont égales). Cela résulte facilement du théorème 1, corollaire 1, lorsqu'on se borne à Y affine sur S ; dans le cas général, il faut conjuguer le théorème 1 avec le résultat suivant :

LEMME 1.2. - Soit $\alpha : S' \longrightarrow S$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact. Alors S s'identifie à un <u>espace topologique quotient de</u> S' , i. e. toute partie U de S telle que $\alpha^{-1}(U)$ soit ouverte, est ouverte.

Pour compléter le théorème 2, il faut donner des critères d'effectivité pour une donnée de descente sur un S'-pré-schéma X' (dans le cas où X' n'est pas supposé affine sur S'). Remarquons d'abord qu'<u>une telle donnée de descente n'est pas nécessairement effective</u>, même si S est le spectre d'un corps k , S' le spectre d'une extension quadratique k' de ce dernier, et S' un schéma algébrique propre de dimension 2 sur S' (comme on peut voir, d'après SERRE, en utilisant la surface non projective de NAGATA). <u>Pour qu'une donnée de descente sur</u> X'/S' <u>relativement à</u> $\alpha : S' \longrightarrow S$ <u>(fidèlement plat et quasi-compact) soit effective, il faut et il suffit que</u> X' <u>soit réunion d'ouverts</u> X'_i , <u>affines sur</u> S' , <u>qui soient "stables" par la donnée de descente sur</u> X' . Il en est certainement ainsi (quel que soit X'/S' et la donnée de descente sur X') si le morphisme $\alpha : S' \longrightarrow S$ est <u>radiciel</u> (i. e. injectif, et à extensions résiduelles qui sont radicielles). On peut montrer aussi qu'il en est encore ainsi si $\alpha : S' \to S$ est fini, et toute partie finie de X', contenue dans une fibre de X' sur S, est contenue dans un ouvert de X' affine sur S (c'est le critère de Weil). Il en est en particulier ainsi, si X'/S' est quasi-projectif, et dans ce cas, on peut montrer que le pré-schéma "descendu" X/S est aussi quasi-projectif (et projectif si X'/S' l'est). En résumé :

THÉORÈME 3. - Soit $\alpha : S' \to S$ un morphisme de pré-schémas, fidèlement plat et quasi-compact. Si α est radiciel, c'est un morphisme de descente strict. Si α est fini, c'est un morphisme de descente **strict relativement** à la catégorie fibrée des pré-schémas quasi-projectifs (ou projectifs) sur des pré-schémas.

REMARQUES. - J'ignore si, dans la deuxième assertion ci-dessus, l'hypothèse que α soit un morphisme fini est bien nécessaire ; on vérifie en tous cas de façon "formelle" qu'on peut la remplacer par l'hypothèse suivante, plus faible en apparence : pour tout point de S existe un voisinage ouvert U, un U' fini et fidèlement plat sur U, et un S-morphisme de U' dans S'. Un cas type qui ne rentre pas dans le précédent est celui où $S = \mathrm{Spec}\,(A)$, $S' = \mathrm{Spec}\,(\bar{A})$, où A est un anneau local noethérien et $\bar{A}$ son complété ; ou encore celui où S' est quasi-fini sur S (i. e. localement isomorphe à un ouvert d'un S-schéma fini) et non fini. Dans ces deux cas, le conférencier ignore aussi la réponse à la question suivante : soit X un S-schéma tel que $X' = X \times_S S'$ soit projectif sur S', est-il vrai que X est projectif sur S ?

2. Application à la descente de certaines propriétés de morphismes. - Soit P une classe de morphismes de pré-schémas. Soit $\alpha : S' \to S$ un morphisme de pré-schémas, et soit $f : X \to Y$ un morphisme de S-pré-schémas, $f' : X' \to Y'$ l'image réciproque de f par α. On peut se demander alors si la relation " $f' \in P$ " implique " $f \in P$ ". Il apparaît que la réponse est affirmative dans beaucoup de cas importants lorsque l'on suppose que α est fidèlement plat et quasi-compact (cette dernière hypothèse étant parfois surabondante). Cela se voit directement sans difficulté si P est la classe des morphismes surjectifs, resp. radiciels (ces cas résultant de la surjectivité de α), resp. plats, resp. fidèlement plats, resp. simples (ces cas résultant de la fidèle platitude de α), resp. de type fini. Utilisant les théorèmes 1, 2 et le lemme 1.2, on voit aussi qu'il en est de même si P est une des classes suivantes : isomorphismes, immersions ouvertes, immersions fermées, immersions (si f est de type fini et Y localement noethérien), morphismes affines, morphismes finis, morphismes quasi-finis, morphismes ouverts, morphismes fermés, homéomorphismes, morphismes séparés,

morphismes propres. Le seul cas important non élucidé est celui des morphismes projectifs et quasi-projectifs, déjà signalé dans la remarque du paragraphe 1.

3. Descente par morphismes finis fidèlement plats. - Soit $\alpha : S' \longrightarrow S$ un morphisme fini, correspondant à un faisceau d'algèbres $\underset{\sim}{A}'$ sur S qui est localement libre de type fini en tant que faisceau de modules, et partout $\neq 0$; alors α est un morphisme fidèlement plat et quasi-compact, auquel on peut donc appliquer les résultats précédents. La donnée d'un faisceau quasi-cohérent F' sur S' équivaut à la donnée du faisceau quasi-cohérent $\alpha_*(F')$ sur S, muni de sa structure de $\underset{\sim}{A}'$-module (notant que $\underset{\sim}{A}' = \alpha_*(\underset{\sim}{O}_{S'})$). Pour simplifier, ce faisceau sur S sera également noté F'. Les deux images inverses $p_i^*(F')$ de F' sur $S' \times_S S'$ correspondent de même aux faisceaux quasi-cohérents de $(\underset{\sim}{A}' \otimes_{\underset{\sim}{O}_S} \underset{\sim}{A}')$-modules $F' \otimes_{\underset{\sim}{O}_S} \underset{\sim}{A}'$ et $\underset{\sim}{A}' \otimes_{\underset{\sim}{O}_S} F'$. La donnée d'un $(S' \times_S S')$-homomorphisme du premier dans le second équivaut à la donnée d'un homomorphisme de $(\underset{\sim}{A}' \otimes \underset{\sim}{A}')$-module, et compte tenu que $\underset{\sim}{A}'$ est localement libre, cela équivaut à la donnée d'un homomorphisme de $(\underset{\sim}{A}' \otimes \underset{\sim}{A}')$-modules :

$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_{\underset{\sim}{O}_S}(\underset{\sim}{A}', \underset{\sim}{A}') = \underset{\sim}{A}' \otimes \check{\underset{\sim}{A}}' \longrightarrow \underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_{\underset{\sim}{O}_S}(F', F')$$

i. e. à la donnée, pour toute section ξ de $\underset{\sim}{U}$ sur un ouvert V, d'un homomorphisme de $\underset{\sim}{O}_S$-modules $T_\xi : F'|V \longrightarrow F'|V$, satisfaisant les conditions

(3.1) $$T_{f\xi}(x) = fT_\xi(x) \qquad T_{\xi f}\, x = T_\xi(fx)$$

où f, x sont respectivement des sections de $\underset{\sim}{A}'$, F' sur un ouvert de S contenu dans V. Les conditions (i) et(ii) d'une donnée de descente (A, paragraphe 1, (c)) s'écrivent alors respectivement :

(3.2) $$T_{1_U}\, x = x\,, \qquad \text{i. e.} \qquad T_{1_U} = \mathrm{id}_{F'}$$

(3.3) $$T_{\xi\eta} = T_\xi\, T_\eta$$

En d'autres termes, une donnée de descente sur F' équivaut à une représentation du faisceau de $\underset{\sim}{O}_S$-algèbres $\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_{\underset{\sim}{O}_S}(\underset{\sim}{A}', \underset{\sim}{A}')$ dans le faisceau de $\underset{\sim}{O}_S$-algèbres $\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_{\underset{\sim}{O}_S}(F', F')$, satisfaisant les deux conditions de linéarité (3.1). Si on a un accouplement de faisceaux quasi-cohérents sur S' :

$$F_1' \times F_2' \longrightarrow F_3'$$

(qu'on peut interpréter comme un accouplement de faisceaux de $\underset{\sim}{A}'$-modules sur S), et des données de recollement sur les F'_i , définies par des homomorphismes T_i ($i = 1 , 2 , 3$) $\underline{U} \longrightarrow \underline{Hom}_{\underline{O}_S}(F'_i , F'_i)$, alors ces données sont <u>compatibles avec l'accouplement donné</u>, dans le sens évident du terme, si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

Pour toute section ξ de $\underline{U}$ sur un ouvert, désignant par $\Delta\xi = \sum \xi'_i \otimes_{A'} \xi''_i$ la section de $\underline{U} \otimes_{\underline{A}'} \underline{U}$ ($\underline{U}$ étant considéré comme $\underline{A}'$-module pour sa structure à gauche) défini par la formule

$$\xi.(fg) = \sum_i \xi'_i(f)\, \xi''_i(g)$$

(où f et g sont deux sections de $\underline{A}'$ sur un ouvert plus petit), on a la formule

$$T^{(3)}_{\xi}(x.y) = \sum_i T^{(1)}_{\xi'_i}\, x.T^{(2)}_{\xi''_i}\, y \tag{3.4}$$

pour tout couple de sections x , y de $\underline{A}'$ sur un ouvert plus petit. (On pourra exprimer cette propriété en disant que les homomorphismes $T^{(i)}$ sont <u>compatibles avec l'application diagonale</u> de $\underline{U}$, relativement à l'accouplement donné). En particulier, les formules (3.1) à (3.4) nous permettent d'interpréter en termes de représentations d'algèbres à applications diagonales, les données de descente sur un faisceau quasi-cohérent d'<u>algèbres</u> sur S' , donc aussi (se restreignant aux algèbres commutatives) les données de descente sur un S'-schéma affine.

De là, on passe à une interprétation analogue des données de descente sur un S'-pré-schéma X' quelconque : la donnée d'un tel X' équivaut à la donnée d'un pré-schéma X' <u>sur</u> S , muni d'un homomorphisme de $\underline{O}_S$-algèbres

$$\underline{A}' \longrightarrow \underline{O}_{X'}$$

et une donnée de descente sur X' équivaut à la donnée d'un homomorphisme de faisceaux (compatible avec le morphisme $h : X' \longrightarrow S'$) :

$$\underline{U} \longrightarrow \underline{Hom}_{h^{-1}(\underline{O}_S)}(\underline{O}_{X'} , \underline{O}_{X'})$$

satisfaisant les conditions analogues aux conditions (3.1) à (3.4) ci-dessus.

EXEMPLE 1 ("WEIL"). - Supposons S'/S un <u>revêtement étale galoisien</u> de groupe de Galois Γ (cf. A, paragraphes 3, et 4,(d)). Alors une donnée de descente sur un faisceau quasi-cohérent F' sur S' (resp. sur un S'-pré-schéma X') équivaut à la donnée d'une représentation de Γ par automorphismes de (S' , F') (resp. de (S' , X')) compatible avec les opérations de Γ sur S' . Ce résultat est "formel", i. e. se démontre en termes de catégories, mais du point de vue de ce numéro résulte aussi de la structure explicite de $\underset{\sim}{U}$, (muni de sa structure d'anneau, l'homomorphisme d'anneaux $\underset{\sim}{A}' \longrightarrow \underset{\sim}{U}$ et l'application diagonale), complètement connue grâce au résultat suivant : $\underset{\sim}{U}$ admet, en tant que A'-module à gauche, une base formée des sections de $\underset{\sim}{U}$ qui correspondent aux éléments de Γ.

EXEMPLE 2 ("CARTIER"). - Soit p un nombre premier, supposons $p\underset{\sim}{O}_S = 0$ (i. e. $\underset{\sim}{O}_S$ est de caractéristique p), $\underset{\sim}{A}'^p \subset \underset{\sim}{O}_S = \underset{\sim}{A}$ (i. e. S'/S est radiciel de hauteur 1) et que le faisceau d'algèbres $\underset{\sim}{A}'$ sur $\underset{\sim}{A}$ admet localement une p-base, i. e. une famille (x_i) de sections telle que $\underset{\sim}{A}'$ soit engendré comme algèbre par les x_i, soumis aux seules conditions $x_i^p = 0$. Nous supposons l'ensemble des i fini, de cardinal n . Soit $\mathfrak{G}$ le faisceau des A-dérivations de A' , c'est un faisceau de A'-modules localement libre de rang n , de plus c'est un faisceau de p-algèbres de Lie sur $\underset{\sim}{A}$ (mais non sur $\underset{\sim}{A}'$) satisfaisant la condition

$$[X , fY] = X(f)\, Y + f[X , Y] \tag{3.5}$$

LEMME. - $\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{Hom}_{\underset{\sim}{O}_S}(\underset{\sim}{A}' , \underset{\sim}{A}')$ est engendré, en tant que $\underset{\sim}{O}_S$-algèbre muni d'un homomorphisme d'algèbres $\underset{\sim}{A}' \longrightarrow \underset{\sim}{U}$, par le sous-A'-module à gauche $\mathfrak{G}$, avec les relations supplémentaires :

$$\left\{\begin{aligned} Xf - fX &= X(f)\\ XY - YX &= [X , Y]\\ X^p &= X^{(p)} \end{aligned}\right. \tag{3.6}$$

Il résulte du lemme précédent qu'une donnée de descente sur le faisceau quasi-cohérent F' sur S' équivaut à la donnée, pour tout $X \in \mathfrak{G}$, d'un $\underset{\sim}{O}_S$-endomorphisme $\bar{X}$ de F' , satisfaisant les conditions

$$\overline{fX} = f\bar{X} \tag{3.7}$$

$$\bar{X}(fx) = X(f)\, x + f\bar{X}(x) \tag{3.8}$$

$$\overline{[X , Y]} = [\bar{X} , \bar{Y}] \tag{3.9}$$

$$\overline{X^{(p)}} = \bar{X}^p \tag{3.10}$$

(C'est ce qu'on pourrait appeler une connexion linéaire sur F' , sans courbure et compatible avec la puissance p-ième). On explicite de même la notion de donnée de descente sur un S'-pré-schéma X' ; la relation (3.4) est remplacée ici par la condition que les $\bar{X}$ sont des dérivations de $\underset{\sim}{O}_{X'}$. Comme le morphisme $S' \longrightarrow S$ est radiciel, le théorème 3 garantit que toute telle donnée de descente est effective, donc définit un S-pré-schéma X .

On notera qu'on n'a pas eu à faire d'hypothèse de platitude, de non singularité ou de finitude quelconque sur F' resp. X' .

4. Application à des critères de rationalité. - Soit X un S-pré-schéma tel que l'image directe de $\underline{O}_X$ sur S soit $\underline{O}_S$; cette propriété restera vraie alors par toute extension plate $S' \longrightarrow S$ de la base S . Si F est un faisceau inversible (i. e. localement libre de rang 1) sur X , les automorphismes de F , s'identifiant aux sections inversibles de $\underline{O}_X$, correspondent biunivoquement aux sections inversibles de $\underline{O}_S$. Soit alors s une section de X au-dessus de s ; nous appellerons de façon imagée, section de F au-dessus de s , une section du faisceau inversible $s^*(F)$ sur S . Il résulte de ce qui précède que si F_i $(i = 1 , 2)$ sont deux faisceaux inversibles sur X , munis chacun d'une section au-dessus de s , et si F_1 et F_2 sont isomorphes, il existe un isomorphisme et un seul de F_1 sur F_2 compatible avec les sections en question (i. e. transformant la première en la seconde). D'ailleurs, et indépendamment de la section s , convenons de regarder comme équivalents deux faisceaux inversibles F_1 et F_2 sur X tel que tout point de S ait un voisinage ouvert U tel que les restrictions de F_1 et F_2 à $X|U$ soient isomorphes. Alors tout faisceau inversible F sur X est équivalent à un faisceau inversible F_1 muhi d'une section marquée au-dessus de s (on prend $F_1 = Fs^*(F)^{-1}$), et F_1 est déterminé à un isomorphisme près. En d'autres termes, la classification des faisceaux inversibles sur X à une équivalence près est la même que la classification à un isomorphisme près des faisceaux inversibles munis d'une section marquée.

Comme ces propriétés restent vraies par extension plate $\alpha : S' \longrightarrow S$ de la base, (en remplaçant la section s par son image inverse s' par α), on en conclut, compte tenu du théorème 1 :

Le pré-schéma X/S étant comme ci-dessus et admettant une section s , soit $\alpha : S' \longrightarrow S$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact ; soit F' un faisceau inversible sur $X' = X \times_S S'$. Pour que F' soit équivalent à l'image inverse sur X' d'un faisceau inversible F sur X , il faut et il suffit que ses images inverses $p_1^*(F')$ et $p_2^*(F')$ sur $X' \times_X X' = X \times_S (S' \times_S S')$ soient équivalentes. S'il en est ainsi, F est déterminé à une équivalence près. (On dira alors que F' est rationnel sur S).

S'inspirant de ce principe dans le cas où $\alpha : S' \longrightarrow S$ est comme dans l'exemple 1 ou l'exemple 2 du numéro précédent, on trouve les critères de rationalité de Weil ou de Cartier. (On notera que ses auteurs se bornent au cas où S et S'

sont des spectres de corps ; a fortiori, S est alors le spectre d'un anneau local, et la relation d'équivalence introduite ci-dessus n'est autre que la relation d'isomorphie). Dans le premier cas, F' est rationnel sur S si et seulement si ses transformés par Γ sont équivalents à F'. Pour exprimer le critère de rationalité dans le deuxième cas, on considère, de façon générale, le morphisme diagonal $X' \longrightarrow X'' = X' \times_X X'$ de X'/X, le faisceau d'idéaux $\underset{\sim}{I}$ correspondant sur $X' \times_X X'$ et le faisceau $\underset{\sim}{I}/\underset{\sim}{I}^2$, qui s'identifie à son image réciproque $\Omega^1_{X'/X}$ sur X (faisceau des 1-différentielles de X' par rapport à X). Comme les restrictions des $F''_i = p_i(F')$ $(i = 1, 2)$ à la diagonale sont isomorphes (car isomorphes à F'), i. e. $F''_1 F''^{-1}_2 = F''$ a une restriction à la diagonale qui est triviale, il s'ensuit que la restriction de F'' à $(X'', \underset{\sim}{O}_{X''}/\underset{\sim}{I}^2)$ est donnée, à un isomorphisme près, par un élément bien déterminé ξ de

$$H^1(X'', \underset{\sim}{I}/\underset{\sim}{I}^2) = H^1(X', \Omega^1_{X'/X}) .$$

D'ailleurs, en l'occurence, on a $\Omega^1_{X'/X} = \Omega^1_{S'/S} \otimes_{\underset{\sim}{O}_S} \underset{\sim}{O}_X$, et par suite, si $\Omega^1_{S'/S}$ est localement libre sur S (comme dans le cas de Cartier), ξ définit une section de $R^1 f'(\underset{\sim}{O}_{X'}) \otimes \Omega^1_{S'/S}$ sur S' (appelée classe de Atiyah-Cartier du faisceau inversible F' sur X'/S) dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour que les images réciproques de F' par les deux projections de

$$(X'', \underset{\sim}{O}_{X''}/\underset{\sim}{I}^2) = X \times_S (S'', \underset{\sim}{O}_{S''}/\underset{\sim}{J}^2)$$

sur X' soient équivalentes (où $\underset{\sim}{J}$ est le faisceau d'idéaux sur $S'' = S' \times_S S'$ défini par le morphisme diagonal $S' \longrightarrow S' \times_S S'$). Cette annulation est donc trivialement nécessaire pour que les images réciproques de F' sur $X'' = X \times_S S''$ lui-même soient équivalentes, donc aussi pour que F soit équivalent à l'image inverse d'un faisceau inversible F sur X. D'ailleurs, la classe de Atiyah- Cartier peut aussi s'interpréter comme l'obstruction à l'existence, localement au-dessus de S', d'une connexion de F' relativement aux dérivations de X'/X, une telle connexion étant de plus déterminée quand on connait les dérivations de F' correspondant aux prolongements naturels à X' des dérivations de S'/S. De ceci, et des développements du numéro précédent, on conclut facilement que dans le cas de l'exemple 2 dudit, et lorsque X/S admet une section, l'annulation de la classe de Atiyah-Cartier est aussi suffisante pour que F' soit rationnelle sur S.

5. Application à la restriction du schéma de base dans un schéma abélien. - Soit S un pré-schéma. On appelle schéma abélien sur S un schéma X simple et propre

sur S dont les fibres en les points $x \in S$ sont des schémas de variétés abéliennes sur les $\kappa(x)$. Supposons S noethérien et régulier (i. e. ses anneaux locaux réguliers), alors on peut montrer en utilisant le théorème de connexion de MURRE [4] (du moins dans le cas "d'égales caractéristiques", où le théorème cité est actuellement démontré) que toute section rationnelle de X sur S est partout définie (i. e. est une section) (ce qui généralise un théorème classique de WEIL). Il en résulte, plus généralement que si X' est un schéma simple sur S , alors toute S-application rationnelle de X' dans X est partout définie. Il en résulte ceci, qui généralise un résultat de IGUSA-LANG : S étant noethérien et régulier et K désignant son anneau des fonctions rationnelles (composé direct de corps), soit X un schéma abélien au-dessus de K ; si X est isomorphe à un K-schéma de la forme $X_0 \times_S \operatorname{Spec}(K)$, où X_0 est un schéma abélien sur S , alors X_0 est déterminé à un isomorphisme unique près.

Utilisant le résultat d'unicité précédent, on voit que la question de restriction de la base dans X est locale sur S (et par suite, qu'il suffit de savoir faire la restriction aux $\operatorname{Spec}(\underline{O}_x)$, avec $x \in S$). On voit de la même façon que si $S' \longrightarrow S$ est un morphisme simple de type fini, si K' est l'anneau des fonctions rationnelles de S' , et si $X \otimes_K K'$ est de la forme $X'_0 \times_{S'} \operatorname{Spec}(K')$, alors X'_0 est muni d'une donnée de descente canonique relativement à α . Compte tenu du théorème 3, on en conclut :

PROPOSITION 5.1. - Soit S un pré-schéma noethérien et régulier, irréductible, de corps de fonctions rationnelles K , soit K' une extension finie de K , non ramifiée sur S , S' le normalisé de S dans K' (qui est donc un revêtement étale de S), X un schéma abélien sur K tel que $X \otimes_K K'$ soit de la forme $X'_0 \times_{S'} \operatorname{Spec}(K')$, où X'_0 est un schéma abélien projectif sur S' . Alors X est de la forme $X_0 \times_S \operatorname{Spec}(K)$, où X_0 est un schéma abélien projectif sur S .

REMARQUES. - Le conférencier ignore si on peut remplacer l'hypothèse que $S' \longrightarrow S$ est un révêtement étale surjectif (permettant d'utiliser le théorème 3) par l'hypothèse que c'est un morphisme de type fini simple et surjectif (même si on suppose que c'est un étalement), ou si la proposition reste valable sans supposer X'_0 projectif sur S' (condition qui est peut-être remplie automatiquement).

6. Application à des critères de locale trivialité et isotrivialité. - Soient S un pré-schéma, G un "pré-schéma en groupes" au-dessus de S , P un pré-schéma sur S sur lequel " G opère" (à droite). On dit que P est formellement principal homogène sous G si le morphisme bien connu

$$G \times_S P \longrightarrow P \times_S P$$

déduit des opérations de G sur P, est un isomorphisme. Nous supposerons dorénavant G plat sur S (donc fidèlement plat sur S), et nous reserverons le nom de fibré principal homogène sous G à un fibré formellement principal homogène P qui est fidèlement plat et quasi-compact sur S. Il est immédiat qu'il revient au même de dire que l'on peut trouver une extension fidèlement plate et quasi-compacte $S' \longrightarrow S$ de la base S, telle que le fibré formellement principal homogène $P' = P \times_S S'$ sous $G' = G \times_S S'$ soit trivial, i. e. isomorphe à G' (i. e. admette une section) ; on pourra prendre en particulier $S' = P$. Noter d'ailleurs que si S est localement noethérien, alors l'hypothèse de fidèle platitude sur P équivaut à l'hypothèse que $\bar{P}_s = P \times_S \mathrm{Spec}\,(\bar{\mathcal{O}}_s)$ est fidèlement plat sur $\bar{\mathcal{O}}_s$ pour tout $s \in S$ (où $\bar{\mathcal{O}}_s$ désigne le complété de l'anneau local $\mathcal{O}_s$), comme il résulte du fait que $\bar{\mathcal{O}}_s$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}_s$. D'ailleurs, si P est de type fini sur S localement noethérien, l'ensemble des points s satisfaisant à la condition ci-dessus est constructible, donc si S est un "pré-schéma de Jacobson" (par exemple un schéma de type fini sur un corps, ou un anneau de Jacobson plus généralement), il suffit de vérifier la condition en question pour les points fermés de S. Cela nous ramène au cas où la base est le spectre d'un anneau local complet A. Lorsque $S = \mathrm{Spec}\,(A)$ (A anneau local noethérien complet) et que P est de type fini sur S, la fidèle platitude de P/S équivaut aussi à l'existence d'un S' fini et plat sur S tel que P' soit trivial, et si de plus G est simple sur S, on peut supposer S' étalé sur S. Par suite, si de plus le corps résiduel de A est algébriquement clos ("cas géométrique"), P est fidèlement plat sur A si et seulement si il est trivial. Donc, si S est un pré-schéma algébrique sur un corps algébriquement clos, et G simple de type fini sur S, on voit que la condition de fidèle platitude sur S équivaut à la condition de trivialité analytique (SLF) de SERRE ([6] p. 1-12).

On peut introduire d'autres types plus forts de conditions sur P, ayant la nature d'une "trivialité locale". Nous dirons en particulier, que P est isotrivial (resp. strictement isotrivial) si pour tout $s \in S$, il existe un voisinage ouvert U de s, et un morphisme fini et fidèlement plat (resp. un revêtement étale surjectif) $U' \longrightarrow U$ tel que $P' = P \times_S U'$ soit trivial. (Nous nous écartons de la terminologie de SERRE [1], qui appelle localement isotrivial ce que nous appelons strictement isotrivial). La stricte isotrivialité est surtout utile si G est simple sur S, mais est une notion inadéquate par contre dans les autres cas.

Si G est affine sur S, tout fibré principal homogène P sous G est affine d'après le paragraphe 2, d'où la possibilité, grâce au théorème 2, de "descendre" de tels fibrés par des morphismes fidèlement plats et quasi-compacts. Prenons, en particulier, $G = Gl(n)_S$, défini par la condition que le foncteur de S-pré-schémas $S' \longrightarrow Hom_S(S', G)$ (à valeurs dans la catégorie des groupes) s'identifie au foncteur $Gl(n)(S') = Gl(n, H^0(S', \underline{O}_{S'}))$ du A, paragraphe 4, (e). Utilisant le fait (i) que tout fibré principal homogène sous G (resp. tout faisceau localement libre de rang n sur S) devient isomorphe à l'objet "trivial" G (resp. $\underline{O}_S^n$) par une extension fidèlement plate et quasi-compacte convenable de S , (ii) que l'on peut descendre les objets du type envisagé (fibrés principaux homogènes sous G , resp. faisceaux localement libres de rang n) par de tels morphismes, et enfin (iii) que le groupe des automorphismes du fibré trivial sur un S'/S est fonctoriellement isomorphe au groupe des automorphismes du faisceau localement libre de rang n trivial sur S' , on conclut "formellement" qu'il "revient au même" de se donner sur S (ou sur un S'/S) un fibré principal homogène de groupe G , ou de s'y donner un faisceau localement libre de rang n . (De façon plus précise, on a une <u>équivalence de catégories fibrées</u>). On en conclut en particulier :

PROPOSITION 6.1. - <u>Tout fibré principal homogène de groupe</u> $Gl(n)_S$ <u>est localement trivial.</u>

Par des arguments connus, on en conclut le même résultat pour des groupes structuraux tels que $Sl(n)_S$, $Sp(n)_S$ et des produits de tels groupes. On en conclut aussi que, si F est un sous-groupe fermé de $G = Gl(n)_S$, plat sur S , tel que le quotient G/F existe, et que G soit un fibré principal homogène isotrivial (resp. strictement isotrivial) sur G/F , de groupe $F \times_S (G/F)$, alors <u>tout</u> fibré principal homogène de groupe F est isotrivial (resp. strictement isotrivial). Cela s'applique à tous les "groupes linéaires" sur S qui ont été utilisés jusqu'à présent, et en particulier, au cas où $G = S \times_k \Gamma$, S étant un pré-schéma sur le corps k , et Γ un groupe linéaire au sens classique, et en particulier simple, sur k . Cela résout donc, pour de tels groupes, une question de SERRE (loc. cit.).

Signalons aussi que, pour la plupart des groupes (linéaires ou non) simples sur S connus, et en tout cas ceux de la forme $S \times_k \Gamma$ comme ci-dessus, on peut montrer que tout fibré principal homogène isotrivial est strictement isotrivial, ce qui résoud en particulier, une autre question de SERRE (loc. cit. 1-14), compte tenu qu'un fibré principal homogène obtenu par une descente à la CARTIER (cf. paragraphe 3, exemple 2) est manifestement isotrivial.

REMARQUE. - Une des difficultés essentielles dans ces questions (mise à part la question de l'existence des schémas quotients G/F) est le manque de critères d'effectivité pour une donnée de descente par un morphisme fidèlement plat <u>non fini</u>.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] DIEUDONNÉ (J.) et GROTHENDIECK (Alexander). - Eléments de géométrie algébrique, à paraître dans les Publications mathématiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques.

[2] GRAUERT (H.) und REMMERT (R.). - Komplexe Räume, Math. Annalen, t. 136, 1958, p. 245-318.

[3] GROTHENDIECK (Alexander). - Géométrie formelle et géométrie algébrique. Séminaire Bourbaki, t. 11, 1958/59, n° 182.

[4] MURRE (J. P.). - On a connectedness theorem for a birational transformation at a simple point, Amer. J. Math., t. 80, 1958, p. 3-15.

[5] SERRE (Jean-Pierre). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955-56, p. 1-42.

[6] SERRE (Jean-Pierre). - Espaces fibrés algébriques, Séminaire Chevalley, t. 2, 1958 : Anneaux de Chow et applications, n° 1.