JACQUES DENY

Formes et espaces de Dirichlet

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. nº 187, p. 261-271
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__261_0>

Séminaire BOURBAKI
12e année, 1959/60, n° 187

Décembre 1959

FORMES ET ESPACES DE DIRICHLET

par Jacques DENY

1. Rappel concernant les formes hermitiennes fermées.

Soit H un espace hilbertien complexe.

DÉFINITION 1. - Une forme hermitienne positive D est dite fermée si elle est définie sur une variété linéaire V partout dense dans H, et si l'espace obtenu en munissant V du produit scalaire

$$(u , v)_V = D(u , v) + (u , v)$$

est complet.

Dans cette définition, (u , v) désigne le produit scalaire dans H, et $D(u , v)$ la valeur de la forme sesqui-linéaire associée à D.

Pseudo-laplacien. - Soit D une forme hermitienne positive fermée (h. p. f.), de domaine V. A certains éléments $f \in V$ on peut associer un élément $\Lambda f \in H$ (unique) tel que :

(1) $$D(f , v) = (\Lambda f , v) \quad \text{pour tout} \quad v \in V \quad .$$

L'opérateur linéaire $f \to \Lambda f$ est autoadjoint positif, en général non borné. Son domaine $\mathcal{D}(\Lambda)$ est partout dense dans H et dans V (pour les topologies respectives). On l'appellera pseudo-laplacien associé à la forme D.

Réciproquement, tout opérateur autoadjoint positif sur H est le pseudo-laplacien associé à une forme h. p. f. bien déterminée.

Semi-groupe associé à D. - L'opposé du pseudo-laplacien Λ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs hermitiens positifs bornés $A_t = \exp(-t\Lambda)$, vérifiant

$$A_{s+t} = A_s A_t \qquad (s \text{ et } t > 0)$$

$$\|A_t\| \leq 1$$

$$\lim_{t \to 0} A_t u = u \qquad (u \in H)$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f - A_t f) = \Lambda f \qquad (f \in \mathcal{D}(\Lambda)) \quad .$$

Inversement, soit un semi-groupe fortement continu d'opérateurs hermitiens positifs A_t, de norme $\|A_t\| \leq 1$. Introduisons les formes hermitiennes positives "approchées"

$$D_t(u) = \frac{1}{t}(u - A_t\, u\, ,\, u)$$

qui sont définies sur H tout entier. Alors :

LEMME 1. - Pour tout $u \in H$, $\lim\limits_{t \to 0} D_t(u)$ existe, finie ou non. L'ensemble des $f \in H$ pour lesquels

$$D(f) = \lim_{t \to 0} D_t(f) < \infty$$

est le domaine de définition d'une forme h. p. f. admettant le semi-groupe des A_t pour semi-groupe associé.

Propriétés extremales des résolvantes. - Les résolvantes $R_\lambda = (I + \lambda\Lambda)^{-1}$ du semi-groupe A_t peuvent être définies directement : si $f \in H$, $R_\lambda f$ est l'unique élément de V qui rend minimum l'expression

$$\Phi_f^\lambda(u) = \lambda D(u) + \|u - f\|^2 \quad .$$

Ces opérateurs R_λ sont hermitiens positifs, de norme ≤ 1. Rappelons encore la formule

(2) $$A_t = \lim_{k \to \infty} (R_{\frac{t}{k}})^k \qquad (t > 0) \quad .$$

Cas d'une forme définie positive. - Pour que D soit définie positive, il faut et il suffit que le pseudo-laplacien associé Λ soit inversible. Pour cela il faut et il suffit qu'on ait $\int_0^\infty (A_t\, f\, ,\, f)\, dt < \infty$ pour un ensemble d'éléments f partout dense dans H. Lorsqu'il en est ainsi l'inverse G de Λ est un opérateur hermitien positif, en général non borné, qu'on appellera le noyau associé.

A son tour, G est le pseudo-laplacien d'une forme hermitienne fermée définie positive E. Le domaine W de E est l'ensemble des éléments $g \in H$ satisfaisant à

(3) $$E(g) = \int_0^\infty (A_t\, g\, ,\, g)\, dt < \infty$$

ou encore à

(4) $$E(g) = \sup_{f \in V} \frac{|(f,g)|^2}{D(f)} < \infty \quad .$$

La forme E sera appelée "forme-énergie", les éléments de V "potentiels d'énergie finie", ceux de W "distributions d'énergie finie".

Cette terminologie est justifiée, car, dans le cas $H = L^2(R^n)$, $\Lambda = -\Delta$ (Δ = laplacien ordinaire), on retrouve le schéma classique de la théorie des potentiels newtoniens d'énergie finie : G est le noyau newtonien, V est l'ensemble des potentiels d'énergie finie de carré sommable, W est l'ensemble des distributions d'énergie finie de carré sommable.

$$D(u) = \int |\operatorname{grad} u(x)|^2 \, dx \ , \quad E(g) = \iint G(x , y) \, g(x) \, \overline{g(y)} \, dx \, dy \quad .$$

A noter que les espaces hilbertiens obtenus en complétant V et W par les normes respectives $(D(u))^{1/2}$ et $(E(g))^{1/2}$ ne sont des espaces de distributions (de Schwartz) que si $n \geqslant 3$.

2. Mesures sous-markoviennes.

On se donne une fois pour toutes un espace localement compact X , dénombrable à l'infini, et une mesure de Radon positive ξ sur X . On pose $H = L^2(\xi)$.

DÉFINITION 2. - Un opérateur linéaire A défini sur H est dit sous-markovien s'il transforme toute fonction $f \in H$ à valeurs réelles comprises entre 0 et 1 en une fonction de même nature.

DÉFINITION 3. - Une mesure positive α définie sur l'espace produit $X \times X$ est dite sous-markovienne (relativement à la mesure ξ) si sa projection sur X est majorée par ξ .

D'après LEBESGUE-NIKODYM, il existe une fonction réelle localement sommable a , $0 \leqslant a(x) \leqslant 1$, définie sur X , telle que la projection de α sur X soit $a\xi$.

LEMME 2. - Pour que l'opérateur hermitien A sur H soit sous-markovien, il faut et il suffit qu'il existe une mesure positive symétrique α sur $X \times X$ qui soit sous-markovienne relativement à ξ , et telle que

$$(Af , g) = \iint f(x) \, \overline{g(y)} \, d\alpha(x , y)$$

pour tout couple $f , g \in H$.

La démonstration est facile.

Il en résulte que tout opérateur hermitien sous-markovien est de norme $\leqslant 1$.

Les semi-groupes d'opérateurs hermitiens sous-markoviens joueront un rôle important dans la théorie des formes et espaces de Dirichlet. Un cas bien connu et particulièrement intéressant est celui où $X = R^n$, ξ est la mesure de Lebesgue, le semi-groupe étant constitué par des opérateurs de convolution

$$A_t f = \mu_t * f \qquad ,$$

où les μ_t sont des mesures positives, symétriques (par rapport à l'origine), de masse totale $\leqslant 1$;

Pour que l'opérateur $-\Lambda$ soit le générateur infinitésimal d'un tel semi-groupe, il faut et il suffit qu'il soit prolongement autoadjoint d'un opérateur défini sur l'ensemble des fonctions qui sont de carré sommable ainsi que leurs dérivées du second ordre par :

$$(5) \qquad -\Lambda f(x) = -Cf(x) + \sum_i \sum_j a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(x) + \int [f(x+y) - f(x)]\, d\sigma(y)$$

ou C est une constante $\geqslant 0$, les a_{ij} les coefficients d'une forme quadratique $\geqslant 0$, et σ une mesure positive symétrique définie sur $R^n - \{0\}$, de masse totale finie hors tout voisinage de 0 , telle enfin que

$$\int_{0<|y|\leqslant 1} |y|^2 \, d\sigma(y) < \infty \qquad .$$

Rappelons encore que les transformées de Fourier des mesures μ_t sont des fonctions de la forme $\exp(-t\psi)$, où ψ , transformée de Fourier de la distribution Λ, est une fonction "définie négative" au sens de BEURLING. Ceci est valable dans le cas d'un groupe abélien localement compact quelconque X (ξ = mesure de Haar). La fonction ψ est dite fonction caractéristique du semi-groupe μ_t . On vérifiera sans peine le lemme suivant:

LEMME 3. - Si ψ est la fonction caractéristique d'un semi-groupe de mesures positives symétriques μ_t sur le groupe abélien localement compact X , on a, pour toute $f \in L^2(X)$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f - \mu_t * f \, , \, f)_{L^2} = \int |\hat{f}(\hat{x})|^2 \, \psi(\hat{x}) \, d\hat{x}$$

que cette expression soit finie ou non ($\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f).

3. Formes de Dirichlet.

DÉFINITION 4. - Soient u et v deux fonctions à valeurs complexes, définies sur l'espace X . On dit que v est une contraction normale de u si

$$|v(x)| \leqslant |u(x)| \qquad \text{pour tout} \quad x \in X$$

$$|v(x) - v(y)| \leqslant |u(x) - u(y)| \quad \text{pour tout couple} \quad x\ ,\ y \in X\ .$$

Pour que v soit une contraction normale de u, il faut et il suffit qu'il existe une contraction normale T du plan complexe $\mathbb{C}$ (application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ diminuant les distances et conservant l'origine) telle que $v(x) = Tu(x)$ pour tout $x \in X$.

DÉFINITION 5. - On appelle <u>forme de Dirichlet</u> relative à la mesure ξ toute forme hermitienne positive définie sur une variété linéaire V partout dense dans $H = L^2(\xi)$, et telle que :

(i) La forme D est fermée,

(ii) Toute fonction v qui est une contraction normale d'une fonction $u \in V$ est dans V, et on a $D(v) \leqslant D(u)$.

La terminologie est due à l'intégrale de Dirichlet classique (voir fin du paragraphe 1). Autres exemples :

$$D(u) = \|u\|_H^2 \quad (\text{avec} \quad V = H) \qquad ;$$

$$D(u) = \iint |u(x) - u(y)|^2 \sin^{-2} \frac{|x-y|}{2}\, dx\, dy \qquad ,$$

avec $X = T^1$, V = ensemble des u dont les coefficients de Fourier c_n vérifient $\sum n|c_n|^2 < \infty$ (intégrale de Douglas), etc.

On va voir que la recherche des formes de Dirichlet relatives à la mesure ξ se ramène à celle des semi-groupes sous-markoviens sur $L^2(\xi)$. Pour cela les outils essentiels sont la notion de mesure sous-markovienne et le lemme suivant :

LEMME 4. - <u>Soit</u> D <u>une forme de Dirichlet, de pseudo-laplacien associé</u> Λ ; <u>les opérateurs</u> $R_\lambda = (I + \lambda\Lambda)^{-1}$ <u>et</u> $A_t = \exp(-t\Lambda)$ <u>sont sous-markoviens.</u>

Soit en effet T une contraction normale de $\mathbb{C}$, et $f \in L^2(\xi)$ telle que $Tf = f$. Posons

$$\Phi_f(u) = \lambda D(u) + \|u - f\|^2 \qquad (u \in V) \qquad .$$

D'après (ii) et l'hypothèse $f = Tf$, on a

$$\Phi_f^{(\lambda)}(TR_\lambda f) = \lambda D(TR_\lambda f) + \|TR_\lambda f - Tf\|^2 \leqslant \lambda D(R_\lambda f) + \|R_\lambda f - f\|^2 = \Phi_f^\lambda(R_\lambda f)$$

D'où $TR_\lambda f = R_\lambda f$, d'après la propriété extrémale de $R_\lambda f$ (voir paragraphe 1).

Prenant alors pour T la contraction qui consiste à projeter tout point $\zeta \in \mathbb{C}$ sur l'intervalle $[0\ ,\ 1]$ de l'axe réel, on est ramené à la définition des opérateurs sous-markoviens. Les R_λ étant sous-markoviens, il en est de même des A_t, d'après la formule (2).

THÉORÈME 1. - Soit D une forme de Dirichlet relative à ξ ; il existe un semi-groupe d'opérateurs A_t sous-markoviens sur $H = L^2(\xi)$ possédant la propriété suivante : le domaine V de D est l'ensemble des fonctions $f \in H$ pour lesquelles les formes approchées

$$D_t(f) = \frac{1}{t}(f - A_t f\ ,\ f) = \frac{1}{t}\left\{\int[1 - a_t(x)]\ |f(x)|^2\ d\xi(x) + \frac{1}{2}\iint |f(x) - f(y)|^2\, d\alpha_t(x,y)\right\}$$

ont une valeur bornée supérieurement $(t > 0)$, et on a $D(f) = \lim\limits_{t\to 0} D_t(f)$

Inversement, étant donné un semi-groupe d'opérateurs sous-markoviens sur H, l'ensemble V des $f \in H$ pour lesquelles les valeurs des formes approchées D_t sont bornées est le domaine d'une forme de Dirichlet D, définie par $D(f) = \lim\limits_{t\to 0} D_t(f)$.

Dans l'expression intégrale de $D_t(f)$, α_t désigne la mesure sous-markovienne sur $X \times X$ associée à A_t, et a_t est la densité de la projection de α_t sur X (voir le paragraphe 2). La première partie de l'énoncé résulte aisément des lemmes 1, 2 et 4. Pour établir la seconde, on observera que les formes approchées D_t sont des formes de Dirichlet, ce qui est évident d'après leur expression intégrale.

On obtiendra une expression plus explicite de la forme D si on connait le générateur infinitésimal du semi-groupe A_t. On se contentera ici de quelques indications sur un cas particulier important :

DEFINITION 6. - Une forme de Dirichlet D est dite spéciale si X est un groupe localement compact, ξ la mesure de Haar, enfin D est invariante par les translations de X (d'une façon précise : si $f \in V$ il en est de même de ses translatées $U_x f$ pour tout $x \in X$, et on a $D(U_x f) = D(f)$, $\lim\limits_{x\to 0} D(U_x f - f) = 0$).

Lorsqu'il en est ainsi, le pseudo-laplacien Λ associé à D permute avec les translations ; il en est de même des opérateurs $A_t = \exp(-t\Lambda)$, qui sont des opérateurs de convolution par des mesures de Radon positives symétriques sur X.

Dans le cas $X = R^n$, les formules (1) et (5) conduisent immédiatement à l'expression cherchée :

$$D(f) = c\int |f|^2\, dx + \sum_i \sum_j a_{ij} \int \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j}\, dx + \frac{1}{2}\iint |f(x+y) - f(x)|^2\, d\sigma(y)\, dx \quad ,$$

valable pour tout f de carré sommable ainsi que ses dérivées du premier ordre (ces fonctions sont partout denses dans le domaine de D) ; les nombres C et a_{ij} et la mesure σ satisfont aux conditions énoncées au paragraphe 2.

La transformation de Fourier permet de présenter ce résultat sous une autre forme, ayant le double avantage d'être valable dans le cas d'un groupe abélien quelconque, et de mettre en évidence le domaine V de D :

THÉORÈME 2. - Soit D une forme de Dirichlet spéciale sur le groupe abélien localement compact X , de domaine V . Il existe une fonction définie négative ψ sur le groupe dual $\hat{X}$ telle que les éléments de V soient les fonctions $u \in L^2(X)$ dont la transformée de Fourier $\hat{u}$ est de carré sommable par rapport à ψ , et on a

$$D(u) = \int |\hat{u}(\hat{x})|^2 \psi(\hat{x})\, d\hat{x} \qquad .$$

Inversement toute fonction définie négative ψ sur $\hat{X}$ définit, par cette relation, une forme de Dirichlet spéciale sur X .

C'est une conséquence facile du théorème 1 et du lemme 3.

4. Espaces de Dirichlet.

Soit X un espace localement compact dénombrable à l'infini, ξ une mesure de Radon positive sur X .

DÉFINITION 7. - On appelle espace de Dirichlet relativement à la mesure ξ tout espace hilbertien complet D dont les éléments sont des classes de fonctions localement sommables pour la mesure ξ , les axiomes suivants étant vérifiés :

a. $D \cap L^2$ est dense dans D et dans $L^2 = L^2(\xi)$.

b. Si K est un compact de X , il existe une constante $A(K) < \infty$ telle que

$$\int |u(x)|\, d\xi(x) \leq A(K)\, \|u\|$$

pour toute fonction $u \in D$.

c. Si u est dans D et si v est une contraction normale de u , on a :

$$v \in D \quad \text{et} \quad \|v\| \leq \|u\| \qquad .$$

Dans cette définition $\|u\|$ désigne la norme dans D ; deux fonctions égales presque partout (pour la mesure ξ) définissent le même élément de D .

D'après (a) et (c) la forme hermitienne définie positive fermée $D(u) = \|u\|^2$ est une forme de Dirichlet sur $V = D \cap L^2$; mais inversement toute forme de Dirichlet même définie positive, ne donne pas naissance à un espace de Dirichlet (par complétion du domaine V) ; en effet :

THÉORÈME 3. - Soit D une forme de Dirichlet définie positive, de domaine V. Pour que l'espace hilbertien $\hat{V}$, complété de V pour la norme $(D(u))^{1/2}$, soit un espace de Dirichlet, il faut et il suffit que, pour toute fonction φ mesurable bornée à support compact, on ait

$$\int_0^\infty (A_t\varphi, \varphi)_{L^2}\, dt < \infty \quad ,$$

les A_t constituant le semi-groupe d'opérateurs sous-markoviens associé à la forme D.

DÉMONSTRATION sommaire. - Supposons que $\hat{V}$ soit un espace de Dirichlet ; si φ est mesurable bornée à support compact, il existe d'après (b) un élément u_φ de $\hat{V}$ (appelé "potentiel engendré par φ") tel que

$$(u\ ,\ u_\varphi) = \int u\bar{\varphi}\, d\xi \qquad \text{pour tout } u \in \hat{V} \quad .$$

On a donc :

$$\sup_{f \in V} \frac{|\int f\ \bar{\varphi}\, d\xi|^2}{D(f)} = \|u_\varphi\|^2 < \infty \quad ,$$

ce qui exprime que φ est une distribution d'énergie finie (voir fin du paragraphe 1) $E(\varphi) = \|u_\varphi\|^2$ (formule (4)). On a donc, d'après (3) :

$$\int_0^\infty (A_t\ \varphi, \varphi)_{L^2}\, dt = E\ (\varphi) < \infty \quad .$$

Supposons inversement $\int_0^\infty (A_t\ \varphi\ , \varphi)\, dt < \infty$ pour toute φ mesurable bornée à support compact. Ces φ étant partout denses dans L^2, la forme D est définie positive (voir paragraphe 1). L'espace $\hat{V}$, obtenu par complétion de V pour la norme associée, est un espace de fonctions localement sommables vérifiant (a) et (b), car si u_n est une suite de Cauchy d'éléments de V, on a, d'après (3) et (4)

$$\left|\int (u_{n+p} - u_n)\bar{\varphi}\, d\xi\right|^2 \leq D(u_{n+p} - u_n)\int_0^\infty (A_t\ \varphi\ , \varphi)_{L^2}\, dt$$

pour toutes les φ du type précédent, ce qui entraîne que u_n converge faiblement dans $L^1(K)$ pour tout compact K. Reste à prouver (c) pour toute $u \in \hat{V}$ (on sait seulement que (c) est vérifié pour les u de V, qui est dense dans $\hat{V}$)) ; on y parvient par un passage à la limite qu'on ne détaillera pas ici.

Noyau associé à un espace de Dirichlet. - L'énergie mutuelle (forme sesqui-linéaire associée à la forme énergie) de deux fonctions f et g mesurables bornées support compact est, d'après (3) :

$$E(f\ ,\ g) = \int_0^{\infty} (A_t\ f\ ,\ g)_{L^2}\ dt = \int_0^{\infty} [\iint f(x)\ \overline{g(y)}\ d\alpha_t(x\ ,\ y)]\ dt$$

où α_t est la mesure sous-markovienne associée à A_t (voir le paragraphe 2) ; d'où l'existence de l'intégrale $\mathcal{K} = \int_0^{\infty} \alpha_t dt$.

Cette mesure $\mathcal{K}$ définie sur $X \times X$ est symétrique, positive et de type positif ; sa projection sur X est absolument continue par rapport à ξ . On appelera $\mathcal{K}$ le noyau associé à l'espace de Dirichlet.

Ce noyau permet de donner une autre expression, d'aspect plus familier, pour l'énergie d'une f mesurable bornée à support compact et pour le "potentiel" u_f (voir la démonstration du théorème 3) :

$$E(f) = \iint f(x)\ \overline{f(y)}\ d\mathcal{K}(x\ ,\ y)$$
$$u_f(x) = \int f(y)\ d_y\ \mathcal{K}(x\ ,\ y)$$

la dernière formule signifiant que u_f est la densité (par rapport à ξ) de la projection sur X de la mesure $f(y)\ \mathcal{K}(x\ ,\ y)$.

Espaces de Dirichlet spéciaux. - Il est intéressant d'avoir des critères permettant de reconnaître si la condition du théorème 3 est satisfaite. Lorsque D est une forme de Dirichlet spéciale sur un groupe abélien localement compact X , (voir définition 6), une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'inverse de la fonction caractéristique ψ du semi-groupe des mesures μ_t (voir paragraphe 2) soit intégrable sur tout compact.

Cela résulte facilement de la formule

$$\int_0^{\infty} (A_t\ u\ ,\ u)_{L^2}\ dt = \int \frac{|\hat{u}(\hat{x})|^2}{\psi(\hat{x})}\ d\hat{x} \qquad ,$$

valable pour toute $u \in L^2(X)$, les deux membres étant simultanément finis ou infinis.

Les espaces de Dirichlet correspondants sont dits spéciaux. Au noyau associé $\mathcal{K}$ (sur $X \times X$) correspond alors un noyau de convolution K sur X : c'est la mesure positive dont la transformée de Fourier est la fonction positive de type positif $1/\psi$. La forme-énergie devient alors $E(f) = \mathrm{tr}\ K * f * \tilde{f}$, et le potentiel u_f est la densité de la mesure $K * f$ (f mesurable bornée à support compact).

Dans le cas de la forme de Dirichlet classique sur R^n (voir fin du paragraphe 1), on a $\psi(\hat{x}) = |\hat{x}|^2$; il ne lui correspond un espace de Dirichlet que si $n > 2$.

NOTES et RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

Pour la notion de forme hermitienne positive fermée, voir par exemple :

FRIEDRICHS (Kurt). - Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, Math. Annalen, t. 109, 1934, p. 465-487.

La plupart des résultats du n° 1 sont des conséquences faciles, et d'ailleurs bien connues, du théorème de décomposition spectrale relatif aux opérateurs auto-adjoints non bornés.

La formule (5) est équivalente à celle de Lévy-Kolmogorov-Khintchine concernant les lois de probabilités indéfiniment divisibles (dans le cas symétrique). Elle a été étendue récemment aux groupes de Lie par G. HUNT :

HUNT (G. A.). - Semi-groups of measures on Lie groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 81, 1956, p. 264-273.

La détermination "explicite" du générateur infinitésimal du semi-groupe sous-markovien le plus général est un problème très difficile si on ne fait pas quelques hypothèses de régularité. Voir à ce sujet (avec une définition de l'adjectif "markovien" plus classique que celle du texte) les travaux de W. FELLER et de Jacques NEVEU (références dans la thèse de NEVEU) :

NEVEU (Jacques). - Etude des semi-groupes de Markov. - University of California Press, 1958 (Thèse Sc. math. Paris. 1955).

Une fonction continue ψ définie sur un groupe abélien localement compact X est dite "définie négative" si les formes hermitiennes

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [\psi(x_i) + \overline{\psi(x_j)} - \psi(x_i - x_j)] \rho_i \bar{\rho}_j$$

sont positives, quels que soient les $x_i \in X$ $(i = 1 , 2 , \ldots , n ; \; n = 1 , 2 , \ldots)$. Voir à ce sujet :

DENY (Jacques). - Les deux aspects de la théorie du potentiel, Séminaire Bourbaki, t. 9, 1956/57, n° 148.

DENY (Jacques). - Sur les espaces de Dirichlet, Séminaire Brelot-Choquet : Théorie du potentiel, t. 1, 1957, n° 5.

Dans ces exposés, on s'était surtout attaché à la détermination des espaces de Dirichlet spéciaux (voir fin du n° 4), ce qu'on avait obtenu d'une façon très différente, utilisant des méthodes de théorie du potentiel (principe des condensateurs). A noter qu'on avait adopté une définition des espaces de Dirichlet généraux légèrement différente de celle du texte, l'espace $\mathcal{C}(X)$ remplaçant l'espace $L^2(\xi)$ dans l'axiome (a) de la définition 7, ce qui est une condition plus forte. Un tel espace peut être appelé espace de Dirichlet "régulier". Tout espace de Dirichlet spécial est d'ailleurs régulier.

Les seules publications concernant les espaces de Dirichlet (notion qui, on le rappelle est due à BEURLING) sont :

BEURLING (A.) et DENY (J.). - Espaces de Dirichlet, I : Le cas élementaire, Acta Math., t. 99, 1958, p. 203-224.

BEURLING (A.) et DENY (J.). - Dirichlet spaces, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 45; 1959, p. 208-215.

La présente rédaction reproduit deux exposés faits au Séminaire de Théorie du potentiel (11 et 18 mars 1959) et un exposé fait au Séminaire Bourbaki (5 décembre 1959).