

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ALBRECHT DOLD

Les foncteurs dérivés d'un foncteur non-additif

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. n° 170, p. 19-25

http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__19_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LES FONCTEURS DÉRIVÉS D'UN FONCTEUR NON-ADDITIF

par Albrecht DOLD

Soient \mathcal{C} resp. \mathcal{C}' la catégorie des Λ - resp. Λ' -modules (à gauche) et $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur (covariant). Si T est additif, CARTAN-EILENBERG [1] définissent les foncteurs dérivés (gauches) $L_q T$ de T en utilisant les faits suivants :

I. Chaque $A \in \mathcal{C}$ possède des résolutions projectives et deux telles résolutions ont même type d'homotopie.

II. Le prolongement de T à la catégorie des complexes (de chaînes) dans \mathcal{C} resp. \mathcal{C}' conserve la relation d'homotopie.

La propriété (II) n'est plus vraie pour les foncteurs non-additifs quoique le prolongement soit toujours possible si T vérifie seulement $T(0) = 0$. Par contre, il est facile de voir que le prolongement d'un T arbitraire aux FD-complexes conserve la relation de FD-homotopie. L'analogue de (I) pour la FD-catégorie est aussi vrai et résulte d'une équivalence entre "complexes" et "FD-complexes", qu'on expliquera ci-dessous (paragraphe 3). Ceci permet de définir les foncteurs dérivés d'un T arbitraire ([3]). Par exemple, les groupes $H(\pi, n)$ d'EILENBERG-MACLANE [4], ou les groupes d'homologie des produits symétriques, cycliques etc. (des polyèdres, voir [2]) s'expriment ainsi comme foncteurs dérivés de certains foncteurs non-additifs.

Les définitions et résultats se généralisent aux catégories abéliennes ([6]).

1. FD-complexes et FD-homomorphismes.

Un FD-complexe K dans \mathcal{C} est une suite de modules $K_q \in \mathcal{C}$ munie des opérateurs de face et de dégénérescence

$$\partial_i : K_q \rightarrow K_{q-1}, \text{ et } s_i : K_q \rightarrow K_{q+1}, \quad i = 0, 1, \dots, q,$$

satisfaisant aux identités usuelles (les FD-identités ; [4]). Par exemple, les chaînes d'un complexe semi-simplicial forment un FD-complexe.

Un FD-homomorphisme $F : K^1 \rightarrow K^2$ est une suite $F_q : K_q^1 \rightarrow K_q^2$ d'homomorphismes, compatibles avec les ∂_i et s_i .

Les modules d'homologie $H_*(K) = \sum_{q=0}^{\infty} H_q(K)$ de K se définissent avec l'opérateur bord $\partial = \partial_0 - \partial_1 + \partial_2 - \dots$.

Soit $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur covariant. Alors TK sera le FD-complexe (dans \mathcal{C}') dont les opérateurs de face et de dégénérescence sont $T(\partial_i)$ et $T(s_i)$; en particulier, $(TK)_q = T(K_q)$. Définition analogue pour les FD-homomorphismes : $(TF)_q = T(F_q)$. On dit qu'on a prolongé T à la FD-catégorie. On notera que

l'opérateur bord dans TK est $\sum (-1)^i T(\partial_i)$ et non, en général,
 $T(\partial) = T(\sum (-1)^i \partial_i)$.

2. FD-homotopie ([2]).

Soit I le FD-complexe, sur les entiers Z , du segment, qu'on considère comme complexe semi-simplicial. Le Z -module I_q est libre et possède comme base les q -simplexes du segment (ils sont tous dégénérés si $q > 1$). En particulier, les sommets e_0, e_1 forment une base de I_0 . Pour chaque FD-complexe K dans \mathcal{C} le produit cartésien $I \times K$ est un FD-complexe dans \mathcal{C} . On a $(I \times K)_q = I_q \otimes_Z K_q$, et les opérateurs de face et de dégénérescence de $I \times K$ sont $\partial_i \otimes \partial_i$ et $s_j \otimes s_j$.

2.1 Définition. - Une FD-homotopie est un FD-homomorphisme $\theta : I \times K \rightarrow K'$. Deux FD-homomorphismes $F^0, F^1 : K \rightarrow K'$ sont (FD)-homotopes, $F^0 \simeq F^1$, s'il existe une FD-homotopie θ telle que $\theta(s_0^q(e_i) \otimes a_q) = F^1(a_q)$ pour tout $a_q \in K_q$ et $i = 0, 1$. Définition usuelle de l'homotopie-équivalence

$$K \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{F'} \end{array} K' .$$

2.2. Proposition. - Soit $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur covariant. Si $F^0, F^1 : K \rightarrow K'$ sont des FD-homomorphismes homotopes, alors, $TF^0, TF^1 : TK \rightarrow TK'$ sont homotopes. En particulier, si K, K' sont homotopie-équivalents, TK, TK' le sont aussi.

DÉMONSTRATION. - Pour chaque simplexe $\sigma \in I_q$ on a un homomorphisme canonique

$$[\sigma] : K_q \rightarrow I_q \otimes K_q, \quad [\sigma]c = \sigma \otimes c, \quad c \in K_q,$$

d'où un homomorphisme

$$\tau_q : I_q \otimes T(K_q) \rightarrow T(I_q \otimes K_q), \quad \tau_q(\sigma \otimes a) = T[\sigma]a,$$

σ un q -simplexe de I , $a \in T(K_q)$. On vérifie que les τ_q forment un FD-homomorphisme $\tau : I \times (TK) \rightarrow T(I \times K)$; de plus, si $\theta : I \times K \rightarrow K'$ est une homotopie $F^0 \simeq F^1$, l'homomorphisme composé

$$I \times TK \xrightarrow{\tau} T(I \times K) \xrightarrow{T\theta} TK'$$

est une homotopie $TF^0 \simeq TF^1$.

3. Equivalence entre FD-complexes et complexes de chaînes ([5], [2]).

3.1 Définition. - Soit K un FD-complexe. Les modules $(NK)_q = \bigcap_{i > 0} \text{noyau} (\partial_i : K_q \rightarrow K_{q-1})$ forment un sous-complexe de chaînes NK (pas un sous-FD-complexe) de K , qui s'appelle le complexe normal de K . L'opérateur-bord dans NK est réduit à ∂_0 .

A chaque FD-homomorphisme $F : K \rightarrow K'$ on associe, par restriction de F , un homomorphisme de chaînes $NF : NK \rightarrow NK'$.

N est un foncteur additif. On va voir que K est complètement déterminé par son complexe normal.

Soit $J = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ une suite d'entiers ≥ 0 , de longueur $\ell(J) = n < \infty$, $n > 0$. Si pour tout i , $j_i \leq q - i$, elle définit un homomorphisme

$$s_J = s_{j_1} \circ s_{j_2} \circ \dots \circ s_{j_n} : K_{q-n} \rightarrow K_q;$$

c'est un monomorphisme, parce que chaque s_j l'est ($\partial_j s_j = \text{identité}$); donc $s_J K_{q-n} \cong K_{q-n}$. La suite J est q -admissible si pour tout i , $j_i \leq q - i$ et $j_i > j_{i+1}$ (les suites q -admissibles de longueur n correspondent biunivoquement aux applications monotones surjectives $[q] \rightarrow [q - n]$; [4], I, chapitre I, 3). Ceci dit, on a

3.2 Proposition. - $K_q = (NK)_q + \sum_J s_J (NK)_{q-1}(J)$ (somme directe); la somme s'étend sur toutes les suites q -admissibles.

DÉMONSTRATION par récurrence sur q . - A K on associe un nouveau FD-complexe \bar{K} avec $\bar{K}_{q-1} = \text{noyau} (\partial_q : K_q \rightarrow K_{q-1})$; les opérateurs de face et de

dégénérescence de \bar{K} sont les restrictions de ceux de K . La relation $\partial_q s_{q-1} = \text{identité}$ implique

$$K_q = \text{noyau}(\partial_q) + \text{image}(s_{q-1}) = \bar{K}_{q-1} + s_{q-1}(K_{q-1}) .$$

A \bar{K}_{q-1} et K_{q-1} on peut appliquer l'hypothèse de récurrence ; en utilisant $(\bar{N}K)_{i-1} = (NK)_i$ pour $i > 0$, ceci donne la proposition.

De la proposition 3.2 résulte bien que le FD-complexe K est déterminé par la complexe de chaînes NK (on déduit des FD-identités comment les s_i, ∂_i se comportent vis-à-vis des s_j). De plus, elle montre comment on peut associer à un complexe de chaînes C arbitraire (positif) un FD-complexe $K = LC$ tel que $NK \cong C$; on n'a qu'à définir K par les formules 3.2. Plus généralement, la proposition 3.2 indique comment on peut construire un foncteur L réciproque à N , c'est-à-dire tel que L et N forment une équivalence ([6]) entre les catégories des FD-complexes et des complexes de chaînes. En particulier,

$$3.3 \quad N : \text{FD-Hom}(K, K') \cong \text{CH-Hom}(NK, NK') .$$

(Groupe des FD-homomorphismes, resp. des homomorphismes de chaînes) ; ceci peut aussi se déduire immédiatement de 3.2 .

L'isomorphisme 3.3 conserve les homotopies, i.e.

3.4. Proposition. - Deux FD-homomorphismes $F^0, F^1 : K \rightarrow K'$ sont homotopes si et seulement si $NF^0, NF^1 : NK \rightarrow NK'$ sont (chaîne-) homotopes.

DÉMONSTRATION. - On considère les homomorphismes de chaînes

$$(NI) \circ (NK) \xrightarrow{\nabla} N(I \times K) \xrightarrow{f} (NI) \circ (NK)$$

qui figurent dans la démonstration du théorème d'Eilenberg-Zilber ([4], II, chapitre I, 2).

Si maintenant $\theta : I \times K \rightarrow K'$ est une FD-homotopie $F^0 \simeq F^1$, le composé $(N\theta) \circ \nabla : (NI) \circ (NK) \rightarrow NK'$ est une homotopie $NF^0 \simeq NF^1$. Réciproquement, d'une homotopie $D : (NI) \circ (NK) \rightarrow NK'$ entre NF^0 et NF^1 on obtient une homotopie $F^0 \simeq F^1$ par $N^{-1}(D \circ f) : I \times K \rightarrow K'$.

3.5 Corollaire. - Les homomorphismes $F^0, F^1 : H_*(K) \rightarrow H_*(K')$ induits par des FD-homomorphismes homotopes F^0, F^1 sont égaux.

DÉMONSTRATION. - D'après 3.2, NK est canoniquement isomorphe au complexe normalisé de K (quotient de K par les éléments dégénérés ; voir [4], I) ; on peut donc identifier $H_*^*(K) = H_*^*(NK)$ et $F_*^i = (NF_*^i)_*$, d'où le corollaire.

4. Foncteurs dérivés des foncteurs $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ arbitraires ([3]).

Soient $G \in \mathcal{C}$ un module et $n \geq 0$ un entier. Une FD-résolution projective de (G, n) est un FD-complexe P dans \mathcal{C} tel que

- i. $P_q = 0$ pour $q < n$;
- ii. $H_n(P) = G$, $H_q(P) = 0$ pour $q \neq n$;
- iii. tous les P_q sont projectifs.

Pour tout (G, n) il existe une FD-résolution projective P . Si $f : G \rightarrow G'$ est un homomorphisme et P' une FD-résolution projective de (G', n) , il y a un FD-homomorphisme $F : P \rightarrow P'$, et un seul à une homotopie près, tel que $F_* : H_n(P) \rightarrow H_n(P')$ est égal à f . En particulier, deux FD-résolutions projectives de (G, n) sont toujours homotopiquement équivalentes. Tout ça résulte des propriétés analogues des résolutions ordinaires et de l'équivalence établie au paragraphe 3.

Soit maintenant $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur covariant. Le type d'homotopie de TP , resp. de TF , ne dépend que de (G, n) , resp. de (f, n) (voir paragraphe 2) ; en particulier, $H_*^*(TP)$ et $(TF)_* : H_*^*(TP) \rightarrow H_*^*(TP')$ ne dépendent que de (G, n) et (f, n) . On appelle q-ième foncteur dérivé (à gauche) de T le foncteur $L_q T$ qui est défini par $L_q T(G, n) = H_q(TP)$, $L_q T(f, n) = (TF)_* : H_q(TP) \rightarrow H_q(TP')$.

Si T est additif les foncteurs $G \rightarrow L_{k+t} T(G, t)$, pour $t = 0, 1, \dots$, sont tous équivalents et coïncident avec l'usuel k -ième foncteur dérivé de T . Pour un T arbitraire il y a toujours un homomorphisme naturel $\sigma : L_q T(G, n) \rightarrow L_{q+1} T(G, n+1)$, la suspension (paragraphe 5), mais si T n'est pas additif, σ n'est plus un isomorphisme, en général.

GÉNÉRALISATION. - Soit $G = \sum_{n=0}^{\infty} G_n$ un module gradué, $G_n \in \mathcal{C}$. Si P^n est une FD-résolution projective de (G_n, n) , la somme directe $P = \sum_{n=0}^{\infty} P^n$ est par définition une FD-résolution projective de G , et l'on pose $L_q T(G_0, G_1, \dots) = H_q(TP)$. Définition analogue pour $L_q T(f)$, où $f : G \rightarrow G'$ est un homomorphisme gradué.

EXEMPLES.

1° Soit G un groupe abélien (Z -module), soit TG son anneau de groupe, T^1G l'algèbre symétrique de G (sur Z). Alors $L_q T(G, n)$ et $L_q T^1(G, n)$, $n > 0$, coïncident avec les groupes $H_q(G, n; Z)$ d'Eilenberg-MacLane.

2° Soit $\Gamma \subset S_n$ un sous-groupe du groupe symétrique de degré n . Pour chaque module G (sur un anneau commutatif Λ) soit $TG = G^\Gamma$ le quotient de la n -ième puissance tensorielle $G \otimes G \otimes \dots \otimes G$ par l'opération du groupe Γ . Les dérivés de T donnent l'homologie du Γ -produit X^Γ (analogue à G^Γ) d'un polyèdre X en fonction de $H_*(X)$: on a $H_q(X^\Gamma, \Lambda) = L_q T(H_0(X, \Lambda), H_1(X, \Lambda), \dots)$, au moins si Λ est héréditaire.

5. La suspension.

Comme en géométrie, on peut définir le cône CK et la suspension SK d'un FD-complexe K . Le cône CK est contractile, i.e. homotopiquement équivalent à 0 , et l'on a un isomorphisme naturel du complexe normal NSK sur NK , qui abaisse les degrés d'une unité. En particulier, si P est une FD-résolution projective pour (G, n) , la suspension SP en est une pour $(G, n+1)$. On a aussi une suite exacte $0 \rightarrow K \xrightarrow{i} CK \xrightarrow{p} SK \rightarrow 0$, qui est triviale en tant que suite exacte de modules, i.e. $(CK)_q = K_q + (SK)_q$, $q \geq 0$.

Soit maintenant $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur tel que $T(0) = 0$. Alors $(Tp) \circ (Ti) = T(pi) = 0$, d'où un homomorphisme $(Ti)_* : H_q(TK) \rightarrow H_q$ (noyau de Tp). D'autre part $TSK \cong TCK/\text{noyau}(Tp)$ (Tp est un épimorphisme parce que $(CK)_q = K_q + (SK)_q$), et TCK est homotopiquement équivalent à 0 (paragraphe 2), donc l'homomorphisme-bord $\partial_* : H_{q+1}(TSK) \rightarrow H_q$ (noyau de Tp) est un isomorphisme. La suspension est l'homomorphisme composé

$$\sigma = \partial_*^{-1} \circ (Ti)_* : H_q(TK) \rightarrow H_{q+1}(TSK) ;$$

en particulier, si $K = P$ est une FD-résolution projective de (G, n)

$$\sigma : L_q T(G, n) \rightarrow L_{q+1} T(G, n+1) .$$

On a la proposition ci-après

5.1 Proposition. - $\sigma : L_q T(G, n) \cong L_{q+1} T(G, n+1)$ pour $q < 2n$.

Pour des résultats plus précis on étudie "la déviation de l'additivité" de T (les "cross-effects"); on suppose toujours $T(0) = 0$.

Pour $A, B \in \mathcal{C}$ on a $T(A+B) = TA + TB + T(A|B)$, où $T(A|B)$ est un foncteur de deux variables. En égalant les variables on obtient un foncteur

$$T_{[2]} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}', \quad T_{[2]} A = T(A|A).$$

En appliquant T à "l'addition" $A + A \rightarrow A$ et à "la diagonale" $A \rightarrow A + A$ on construit des homomorphismes naturels

$$\alpha : T_{[2]} A \rightarrow TA \quad \text{et} \quad \beta : TA \rightarrow T_{[2]} A$$

d'où

$$\alpha_* : L_q T_{[2]}(G, n) \rightarrow L_q T(G, n) \quad \text{et} \quad \beta_* : L_q T(G, n) \rightarrow L_q T_{[2]}(G, n).$$

5.2 Proposition.

1° $L_q T_{[2]}(G, n) = 0$ pour $q < 2n$.

2° Dans la suite

$$(5.3) \quad L_q T_{[2]}(G, n) \xrightarrow{\alpha_*} L_q T(G, n) \xrightarrow{\beta_*} L_{q+1} T(G, n+1) \xrightarrow{\alpha_*} L_{q+1} T_{[2]}(G, n+1)$$

le composé de deux homomorphismes consécutifs est 0 ("la suspension tue les éléments décomposables et a comme image des éléments primitifs").

3° La suite 5.3 est exacte pour $q \leq 3n$.

Ces résultats et d'autres découlent d'une espèce de "bar-construction" qu'on peut définir dans ce cadre ([3]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).
- [2] DOLD (Albrecht). - Homology of symmetric products and other functors of complexes, Annals of Math., Series 2, t. 68, 1958, p. 54-80.
- [3] DOLD (A.) and PUPPE (D.). - Non-additive functors, their derived functors and the suspension homomorphism, Proc. nat. Acad. U. S. A. (à paraître).
- [4] EILENBERG (S.) and MAGLANE (S.). - On the group $H(\pi, n)$, I., Annals of Math., t. 58, 1953, p. 55-106; II., Annals of Math., t. 60, 1954, p. 49-139.
- [5] GROTHENDIECK (Alexandre). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku math. J., Series 2, t. 9, 1957, p. 119-221.
- [6] KAN (Daniel M.). - Functors involving c.s.s. complexes, Trans. Amer. math. Soc., t. 87, 1958, p. 330-346.