SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PIERRE CARTIER

Vecteurs analytiques

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. n° 181, p. 181-192

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__181_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1959)

VECTEURS ANALYTIQUES

par Pierre CARTIER

(d'après E. NELSON [7])

1. Historique.

C'est un résultat classique que toute représentation matricielle continue d'un groupe de Lie G est analytique ; ce résultat est un cas particulier d'un résultat général sur les homomorphismes de groupes de Lie. On sait de plus que toute représentation matricielle du groupe G définit une représentation matricielle de même degré de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et que celle-ci caractérise complètement la représentation donnée de G ; réciproquement si G est connexe et simplement connexe, toute représentation matricielle de $\mathfrak{g}$ "s'intègre" en une représentation de G .

Le cas des représentations linéaires de dimension infinie n'a été abordé que plus récemment ; on est conduit pour toute représentation continue de G dans un espace de Banach $\mathcal{H}$ à introduire les vecteurs différentiables ou analytiques de $\mathcal{H}$. Les premiers ont été introduits par GÅRDING [4] qui a montré qu'ils sont partout denses dans $\mathcal{H}$; les seconds l'ont été par HARISH-CHANDRA [5] sous le nom de "vecteurs bien-foutus" et ledit HARISH-CHANDRA a montré qu'ils étaient partout denses pour une représentation irréductible d'un groupe semi-simple ; la démonstration utilise les théorèmes les plus profonds de la théorie des groupes semi-simples et n'est pas facile. Elle a été simplifiée par DIXMIER et moi-même qui avons démontré dans [1] que les vecteurs analytiques sont partout denses pourvu que la représentation de G soit scalaire ou bornée sur un certain sous-groupe discret du centre de G .

Le problème d'intégrer une représentation d'une algèbre de Lie en une représentation du groupe n'a été abordé jusqu'à NELSON que dans des cas assez particuliers. Le cas des groupes semi-simples l'a été par HARISH-CHANDRA [5], celui des groupes nilpotents par DIXMIER [2], et sous le nom de relations de commutation d'Heisenberg, les physiciens ont étudié depuis longtemps le cas d'une algèbre de Lie ayant pour base des éléments P , Q et I avec $[P , Q] = I$ et $[P , I] = [Q , I] = 0$; dans ce dernier cas, le résultat le plus complet est dû à DIXMIER [3] qui a montré qu'on pouvait remonter au groupe pourvu que

I soit scalaire et $P^2 + Q^2$ essentiellement auto-adjoint.

Dans l'article dont nous rendons compte, NELSON a démontré que les vecteurs analytiques étaient partout denses dans le cas le plus général, et que l'on pouvait remonter d'une représentation d'une algèbre de Lie à celle du groupe dans le cas unitaire, moyennant une certaine condition portant sur un opérateur généralisant le Laplacien. Les méthodes de NELSON sont très élémentaires dans le cas unitaire et n'utilise pas les théorèmes de structure des algèbres de Lie. Les méthodes de démonstration sont inspirées de la théorie de la domination des opérateurs différentiels par un opérateur elliptique ; à ce qu'il me semble, NELSON a découvert un procédé d'une grande simplicité et d'une grande efficacité qui doit s'appliquer dans de nombreuses situations d'équations aux dérivées partielles.

Nous ne mentionnerons dans la suite que les résultats relatifs aux représentations de groupes et laisserons de côté les applications aux équations elliptiques. Nous insisterons surtout sur le cas unitaire qui est de beaucoup plus simple.

2. Généralités sur les représentations.

Soit U un ouvert d'un espace euclidien R^n, de coordonnées $x_1, \dots, x_n$, et soit f une fonction définie dans U à valeurs dans un espace de Banach $\mathcal{H}$; la dérivée $\partial_i f$ est définie par la formule

$$\partial_i f(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \to 0} h^{-1} \left\{ f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n) \right\}$$

si elle existe. On dit que f est C^∞ dans U si toutes les dérivées $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f$ existent quels que soient les entiers $i_1, \dots, i_k$ prenant les valeurs 1 à n. On dit que f est analytique si pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans U et tout $h = (h_1, \dots, h_n)$ assez petit on a une identité de la forme

$$f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) = \sum_{r_1 \dots r_n \geqslant 0} a_{r_1, \dots, r_n}(x)\, h_1^{r_1} \dots h_n^{r_n}$$

où les coefficients $a_{r_1, \dots, r_n}(x)$ ne dépendent pas de h.

On dira qu'une fonction f définie dans une variété M de classe C^∞ à valeurs dans $\mathcal{H}$ est de classe C^∞ s'il en est ainsi de son expression dans tout système de coordonnées locales ; définition analogue dans le cas analytique.

Soient maintenant G un groupe de Lie et $\mathcal{H}$ un espace de Banach complexe. Une représentation de G dans $\mathcal{H}$ est une application continue $(s, x) \longrightarrow U_s x$ de $G \times \mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ vérifiant les identités

$$U_s(x + y) = U_s x + U_s y \qquad U_{st} x = U_s(U_t x) \qquad U_e x = x$$

en notant e l'élément neutre de G. On dit qu'un vecteur x dans $\mathcal{H}$ est différentiable si l'application $s \longrightarrow U_s x$ de G dans $\mathcal{H}$ est C^∞ et l'on note $\mathcal{H}^\infty$ l'ensemble des vecteurs différentiables de $\mathcal{H}$; on définit de manière analogue l'ensemble $\mathcal{H}^\omega$ des vecteurs analytiques de $\mathcal{H}$; on a évidemment $\mathcal{H}^\omega \subset \mathcal{H}^\infty$. Si f est une fonction de classe C^∞ à support compact sur G, on peut définir l'intégrale $U_f x = \int_G U_s x . f(s)\, ds$ où ds est une mesure de Haar à gauche sur G ; le sous-espace $\mathcal{D}$ de $\mathcal{H}$ engendré par ces vecteurs $U_f x$ est appelé sous-espace de Gårding : le théorème de Hahn-Banach montre qu'il est dense dans $\mathcal{H}$, et il est immédiat que $\mathcal{H}^\infty$ contient $\mathcal{D}$; a fortiori $\mathcal{H}^\infty$ est dense dans $\mathcal{H}$.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et soit X un élément de $\mathfrak{g}$; si $\exp$ est l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G, on définira l'opérateur U_X par la formule

$$U_X x = \lim_{h \to o} h^{-1} \left\{ U_{\exp hX} . x - x \right\}$$

lorsqu'elle veut bien avoir un sens ; alors U_X est un opérateur linéaire défini dans un sous-espace dense $\mathcal{D}(X)$ de $\mathcal{H}$ et à valeurs dans $\mathcal{H}$. Si $\{X_1, \dots, X_n\}$ est une base de $\mathfrak{g}$, on montre facilement que $\mathcal{H}^\infty$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ formé des vecteurs x tels que $U_{X_{i_1}} \dots U_{X_{i_t}} x$ soit défini quels que soient les entiers $i_1, \dots, i_t$ compris entre 1 et n. De même $\mathcal{H}^\omega$ est le sous-espace de $\mathcal{H}$ formé des x tels que la série $\exp(U_{s_1 X_1 + \dots + s_n X_n}) . x$ converge pour $s_1, \dots, s_n$ assez petits. De ceci, on déduit que les sous-espaces $\mathcal{H}^\infty$ et $\mathcal{H}^\omega$ de $\mathcal{H}$ sont stables par les opérateurs U_X pour X dans $\mathfrak{g}$; de plus, les U_X définissent une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{H}^\infty$, ce qui s'exprime par les identités :

$$U_{X+Y} = U_X + U_Y \qquad U_{\lambda . X} = \lambda . U_X \qquad U_{[X,Y]} = [U_X, U_Y] = U_X U_Y - U_Y U_X$$

Enfin, le sous-espace de Gårding $\mathcal{D}$ est stable par les U_X en vertu de la formule $U_X U_f x = U_{X.f} . x$, où tout élément X de $\mathfrak{g}$ est considéré comme opérateur différentiel d'ordre un, commutant aux translations à droite dans G ; l'espace $\mathfrak{D}$ est aussi stable par le groupe G en vertu de la formule $U_s\, U_f\, x = U_g\, x$ avec $g(t) = f(s^{-1}\, t)$.

3. Représentations unitaires.

On suppose dans ce numéro que $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert complexe et que les U_s sont des opérateurs unitaires.

Rappelons d'abord quelques propriétés des opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert. Soit donc $A : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{H}$ un opérateur linéaire où $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel partout dense de $\mathcal{H}$. S'il existe un opérateur linéaire B de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{H}$ tel que $(Ax\, ,\, y) = (x\, ,\, By)$ pour x , y dans $\mathcal{E}$, l'adhérence dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ du graphe de A est le graphe d'un opérateur linéaire (non partout défini) appelé fermeture de A et noté $\bar{A}$. On dit que A est symétrique si l'on a $(Ax\, ,\, y) = (x\, ,\, Ay)$ pour x , y dans $\mathcal{E}$, qu'il est auto-adjoint si de plus $x \longrightarrow (Ax\, ,\, y)$ n'est une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}$ (pour la topologie induite par celle de $\mathcal{H}$) que pour y dans $\mathcal{E}$, qu'il est essentiellement auto-adjoint s'il est symétrique et si sa fermeture (qui existe alors) est auto-adjointe. Un théorème classique de STONE [10] montre le lien entre les groupes à un paramètre et les opérateurs auto-adjoints : soit d'abord $\{S(h)\}$ pour h réel un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires dans $\mathcal{H}$; si $\mathcal{E}$ est l'ensemble des x dans $\mathcal{H}$ pour lesquels la limite de $ih^{-1}\, \{S(h)x - x\}$ pour h tendant vers 0 existe et si Ax est cette limite, alors l'opérateur A est auto-adjoint ; de plus, tout opérateur auto-adjoint est associé de cette manière à un tel groupe et un seul. Si l'on introduit la décomposition spectrale $A = \int \lambda\, .dE(\lambda)$ de A , les vecteurs analytiques de $\mathcal{H}$ pour le groupe des $S(h)$ sont alors les vecteurs de la forme $\int f(\lambda)\, dE(\lambda).x$ pour $x \in \mathcal{H}$ et f borélienne telle que $|f(\lambda)| \leq e^{-c|\lambda|}$ pour c convenable. De là, on déduit sans difficulté que si A est un opérateur symétrique égal à sa fermeture, il est auto-adjoint si et seulement si l'ensemble des $x \in \mathcal{H}$ pour lesquels la série $e^{h.A}.x$ converge pour h assez petit est partout dense.

Nous allons maintenant démontrer, pour les représentations unitaires, deux résultats de SEGAL [9]. Tout d'abord d'après le théorème de Stone rappelé, l'opérateur iU_X défini dans $\mathfrak{D}(X)$ est auto-adjoint pour X dans $\mathfrak{g}$; mieux, la restriction de iU_X à l'espace de Gårding $\mathfrak{D}$ est essentiellement auto-adjointe. D'après un critère classique, il suffit de montrer que l'on ne peut avoir une identité de la forme $(U_X x\, ,\, a) = i.\lambda.(x\, ,\, a)$ pour tout $x \in \mathfrak{D}$

où $a \neq 0$ et λ non réel ; or si l'on pose $S(h) = U_{\exp h.X}$ pour h réel, l'espace $\mathcal{G}$ est stable par les $S(h)$, et de l'identité précédente avec $x = S(h).y$ pour $y \in \mathcal{G}$, on déduit $\frac{d}{dh}(S(h).y\ ,\ a) = i.\lambda.(S(h).y\ ,\ a)$, d'où comme $\mathcal{G}$ est dense dans $\mathcal{H}$ la formule $S(h).a = e^{-i.\lambda.h}a$ pour tout h réel ; comme a et $S(h).a$ ont même norme, ceci ne peut avoir lieu que si λ est réel ou a nul.

Le deuxième résultat concerne un opérateur analogue au Laplacien. Introduisons une base $\{X_1\ ,\ \dots\ ,\ X_n\}$ de $\mathfrak{g}$ et définissons dans $\mathcal{H}^\infty$ l'opérateur A par la formule $Ax = \sum_i U^2_{X_i}.x$. Il est immédiat que A est symétrique sur $\mathcal{H}^\infty$; de plus, de la formule $U_X U_f\ x = U_{X.f}\ x$, on déduit $A.U_f.x = U_{\Delta.f}.x$ pour $x \in \mathcal{H}$ et f de classe C^∞ à support compact, si Δ est l'opérateur différentiel $\sum_i X_i^2$ sur le groupe G. Nous allons maintenant utiliser le fait que Δ est elliptique pour en déduire que A <u>est essentiellement auto-adjoint</u>. Supposons donc qu'on ait une relation de la forme $(Ay\ ,\ a) = \lambda(y\ ,\ a)$ pour tout $y \in \mathcal{G}$ avec λ non réel et a fixe dans $\mathcal{H}$; nous devons en déduire que a est nul. Or si l'on définit pour $x \in \mathcal{H}$, la fonction φ_x sur G par $\varphi_x(s) = (U_s\ x\ ,\ a) = (x\ ,\ U_{s^{-1}}\ a)$ on a alors :

$$\int \varphi_x(s).(\Delta f - \lambda f)(s)\ ds = (U_{\Delta.f-f}\ x\ ,\ a) = (AU_f\ x\ ,\ a) - \lambda(U_f\ x\ ,a) = 0$$

pour toute fonction f de classe C^∞ à support compact puisque $\mathcal{G}$ contient le vecteur $U_f\ x$. Autrement dit φ_x est solution <u>au sens des distributions</u> de l'équation $\Delta\varphi_x = \lambda\varphi_x$, donc puisque Δ est elliptique, elle est de classe C^∞ et solution usuelle de cette équation ; comme ceci vaut pour tout x dans $\mathcal{H}$, la fonction $s \longrightarrow U_{s^{-1}}\ a$ est faiblement de classe C^∞, donc fortement de classe C^∞ et l'on a $a \in \mathcal{H}^\infty$; finalement de la relation $\Delta\varphi_x = \lambda\varphi_x$ pour tout x dans $\mathcal{H}$, on déduit $Aa = \lambda a$. De cette dernière relation, on déduit $(Aa\ ,\ a) = \lambda(a\ ,\ a)$ et comme A est symétrique $(Aa\ ,\ a)$ est réel et puisque λ n'est pas réel, on a donc $(a\ ,\ a) = 0$ soit $a = 0$. Ceci achève la démonstration.

La démonstration précédente est celle de NELSON et STINESPRING [8] ; elle utilise un théorème profond sur les équations aux dérivées partielles, théorème dont il existe heureusement aujourd'hui des démonstrations compréhensibles, qu'on espère correctes (cf. le livre de JOHN [6]).

4. Construction de représentations unitaires.

Nous allons maintenant montrer comment on peut construire une représentation d'un groupe à l'aide d'une représentation de son algèbre de Lie.

Nous considérons donc une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$, un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$ et un sous-espace partout dense $\mathcal{E}$ de $\mathcal{H}$; de plus, on suppose associé à tout élément X de $\mathfrak{g}$ un opérateur $r(X)$ dans $\mathcal{E}$ de sorte qu'on ait une représentation unitaire r de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{E}$; cette hypothèse s'exprime par les identités suivantes :

$$r(X+Y) = r(X) + r(Y) \qquad r(\lambda X) = \lambda r(X) \qquad r([X , Y]) = r(X)\, r(Y) - r(Y)\, r(X)$$

et par le fait que $i.r(X)$ est symétrique pour tout X dans $\mathfrak{g}$. Nous allons chercher à construire une représentation U du groupe simplement connexe G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de sorte que $\mathcal{E}$ soit contenu dans $\mathcal{H}^{\infty}$ et que $r(X)$ soit la restriction de U_X à $\mathcal{E}$ pour tout X dans $\mathfrak{g}$.

D'après ce qu'on a vu au numéro précédent, on pourrait penser que ceci est possible dès que les opérateurs $i.r(X)$ sont essentiellement auto-adjoints. Il n'en est pas ainsi comme le montre le contre-exemple suivant de NELSON. On considère une variété M de classe C^{∞} obtenue par identification à partir d'une couronne comprise entre deux carrés comme le montre la figure 1 ; les segments portant même nom sont à identifier par une translation convenable ; les sommets a , b , c , d sont à identifier, les sommets a' , b' , c' , d' sont à omettre. La mesure de Lebesgue $dx\,dy$ dans le plan définit une mesure μ sur M ; on pose $\mathcal{H} = L^2(M , \mu)$ et $\mathcal{E}$ est l'espace des fonctions de classe C^{∞} sur M ; enfin $\mathfrak{g}$ se compose des opérateurs $\alpha . \partial/\partial x + \beta . \partial/\partial y$ pour α, β réels. Il est facile de montrer que tous ces opérateurs sont essentiellement auto-adjoints, mais les groupes à un paramètre $U'(\sigma)$ et $U''(\tau)$ associés respectivement à $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial y$ ne commutent pas pour des raisons combinatoires $(U'(1)\, U''(1)$ pousse le carré I en II et $U''(1)\, U'(1)$ pousse I en III).

Le résultat positif de NELSON est que la deuxième condition énoncée au numéro précédent et portant sur A est suffisante. De manière précise, soit $\{X_1 , \dots , X_n\}$ une base de $\mathfrak{g}$ et supposons que $A = \sum_i r(X_i)^2$ soit essentiellement auto-adjoint. On posera $X_i' = r(X_i)$ pour $1 \leq i \leq n$. Par suite, l'opérateur $\bar{A}$ est auto-adjoint et l'on peut introduire sa décomposition spectrale $\bar{A} = \int \lambda . dE(\lambda)$; une première difficulté est que $\mathcal{E}$ n'est pas stable en général par les projecteurs spectraux $E(\lambda)$; on va la tourner de la manière suivante. Soit $\tilde{\mathcal{E}}$ l'ensemble des vecteurs x de $\mathcal{H}$ tels que $\bar{A}^r x$ soit défini pour tout entier $r \geqslant 0$ et soit $\tilde{A}$ la restriction de $\bar{A}$ à $\tilde{\mathcal{E}}$; on munit $\tilde{\mathcal{E}}$ de la topologie $\mathcal{T}$ d'espace vectoriel définie par les semi-normes $\|x\|_r = \|\bar{A}^r x\|$ pour $r \geqslant 0$; utilisant le fait que A est symétrique sur $\mathcal{E}$, on montre facilement que $\mathcal{E}$ est dense dans $\tilde{\mathcal{E}}$ pour la topologie $\mathcal{T}$ et que $\tilde{\mathcal{E}}$ pour cette dernière topologie est complet.

De plus, nous allons montrer que les opérateurs $r(X)$ pour X dans $\mathfrak{g}$ sont continus dans $\mathcal{E}$ pour la topologie induite par $\mathcal{T}$; il suffit pour cela de montrer que la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{E}$ est définie par les semi-normes $\|X'_{i_1} \dots X'_{i_r} x\|$ quels que soient $r \geqslant 0$ et $i_1, \dots, i_r$; autrement dit que les applications $x \to X'_{i_1} \dots X'_{i_r} x$ de $\mathcal{E}$ muni de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{H}$ muni de la topologie de sa norme sont continues.

Ceci est trivial pour $r = 0$; pour $r = 1$, ceci résulte du calcul suivant :

$$\|X'_i x\|^2 \leq \sum_j \|X'_j x\|^2 = -(Ax, x) \leqslant \|Ax\| . \|x\| \leqslant \{\|x\| + \|Ax\|\}^2$$

qui implique que pour tout X dans $\mathfrak{g}$, il existe une constante c avec $\|r(X)x\| \leqslant c . \{\|x\| + \|Ax\|\}$ pour tout $x \in \mathcal{E}$; traitons maintenant le cas $r = 2$; utilisant l'identité

$$S^2 T^2 + T^2 S^2 - (ST)(TS) - (TS)(ST) = 2.[S, T]^2 + [[S, T], T].S + [S, [S, T]]T$$

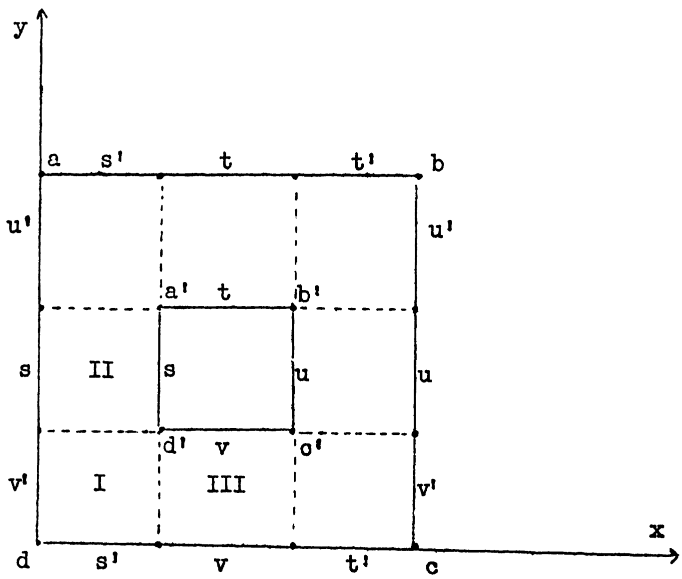

figure 1.

on en déduit :

$$||Ax||^2 = \sum_i ||X_i'^2 x||^2 + \sum_{i<j} (X_i'^2 x , X_j'^2 x) + (X_j'^2 x , X_i'^2 x)$$

$$= \sum_i ||X_i'^2 x||^2 + \sum_{i\neq j} ||X_i' X_j' x||^2 + \sum_\lambda (U_\lambda x , V_\lambda x) \quad (U_\lambda, V_\lambda \in r(\mathfrak{g}))$$

$$\geqslant \sum_i ||X_i'^2 x||^2 + \sum_{i\neq j} ||X_i' X_j' x||^2 - c'^2 . \{||x|| + ||Ax||\}^2$$

puisque $(U_\lambda x , V_\lambda x) \geq - ||U_\lambda x|| . ||V_\lambda x|| \geqslant - c_\lambda^2 . \{||x|| + ||Ax||\}^2$; finalement, on déduit de l'inégalité précédente une inégalité de la forme

$$||X_i'^2 x||^2 \leq c''^2 . \{||x|| + ||Ax||\}^2$$

ce qui montre que les $X_i'^2$ sont continus de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{H}$; comme on peut écrire, $A = (X_i' - X_j')^2/2 + (X_i' + X_j')^2/2 + \sum_{k\neq i,j} X_k'^2$, on voit que $(X_i' \pm X_j')^2$ sont continus de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{H}$, donc aussi leur différence $2.(X_i' X_j' + X_j' X_i')$ et comme $[X_i' , X_j']$ est continu de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{H}$ d'après le cas $r = 1$, on voit qu'il en est de même de $X_i' X_j'$. Passons maintenant au cas général par récurrence sur r ; on a

$$(*) \qquad ||X_{i_1}' X_{i_2}' \dots X_{i_{r+1}}' x|| \leq c'' ||X_{i_3}' \dots X_{i_{r+1}}' x|| + c'' ||AX_{i_3}' \dots X_{i_{r+1}}' x||$$

d'après l'inégalité démontrée dans le cas $r = 2$; mais $AX_{i_3}' \dots X_{i_{r+1}}'$ diffère de $X_{i_3}' \dots X_{i_{r+1}}' A = B$ par des sommes de produits d'au plus r facteurs, donc par un opérateur continu de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{H}$ vu l'hypothèse de récurrence ; comme A est continu de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, on voit par l'hypothèse de récurrence que B est continu de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{H}$, donc aussi $AX_{i_3}' \dots X_{i_{r+1}}'$ et finalement $X_{i_1}' \dots X_{i_{r+1}}'$ d'après l'inégalité $(*)$.

Ceci étant démontré, on peut prolonger par continuité les $r(X)$ en des opérateurs $\tilde{r}(X)$ dans $\tilde{\mathcal{E}}$, et par prolongement par continuité des identités, on voit que $\tilde{r}$ est une représentation unitaire de $\mathfrak{g}$ dans $\tilde{\mathcal{E}}$. Mais il est immédiat par décomposition spectrale que $\tilde{\mathcal{E}}$ contient l'image des projecteurs spectraux $E(\lambda) - E(\mu) = E(\lambda , \mu)$ pour λ , μ réels finis avec $\lambda \geqslant \mu$.

De plus, pour tout x dans l'image d'un projecteur $E(\lambda, \mu)$, la série $e^{hA}.x$ converge absolument pour tout h réel et de tels vecteurs x sont partout denses dans $\mathcal{H}$; autrement dit l'ensemble $\mathcal{H}'$ des vecteurs x de $\tilde{\mathcal{E}}'$ pour lesquels la série $e^{hA}x$ converge absolument pour tout h réel est dense dans $\mathcal{H}$.

Notons $\tilde{X}_i$ l'opérateur $\tilde{r}(X_i)$ dans $\mathcal{E}$; nous allons montrer qu'il existe une constante M telle que la série

$$\varphi(h) = e^{h X_1 + \dots + h X_n} x$$

converge absolument pour $|h_1| < M, \dots, |h_n| < M$ et $x \in \mathcal{H}'$. Pour démontrer cette assertion, on considère l'ensemble $\mathfrak{a}_2$ des opérateurs dans $\tilde{\mathcal{E}}$ qui sont combinaisons linéaires d'opérateurs $\tilde{X}_i \tilde{X}_j$; les calculs faits plus haut dans $\mathcal{E}$ ont leur analogue dans $\tilde{\mathcal{E}}$ et par suite, pour tout T dans $\mathfrak{a}_2$, il existe une constante c telle que $\|Tx\| \leq c.\{\|x\| + \|Ax\|\}$ pour tout x dans $\tilde{\mathcal{E}}$; la plus petite de ces constantes c sera notée $|||T|||$; il est alors immédiat que $\mathfrak{a}_2$ est un espace de Banach de dimension finie pour la norme $|||T|||$. Pour tout X dans $\mathfrak{g}$, l'opérateur $\operatorname{ad} X : T \to [\tilde{r}(X), T]$ dans $\mathfrak{a}_2$ est linéaire, et donc continu puisque l'espace de Banach $\mathfrak{a}_2$ est de dimension finie ; il existe donc une constante M' telle que $|||\operatorname{ad} X_i . T||| \leq M' |||T|||$ pour T dans $\mathfrak{a}_2$ et $1 \leq i \leq n$. Soit alors x dans $\mathcal{H}'$ et définissons la constante $c_{r,s}$ pour r, s entiers ≥ 0 par :

$$c_{r,s} = \sup_{i_1, \dots, i_r} \|X_{i_1} \dots X_{i_r} A^s x\|$$

Si l'on utilise l'identité :

$$AX_{i_1} \dots X_{i_r} = X_{i_1} \dots X_{i_r} A + \sum_{1 \leq k \leq r} \sum_{\sigma} (-1)^k (\operatorname{ad} X_{i_{\sigma.1}} \times \dots \operatorname{ad} X_{i_{\sigma.k}} \times A) X_{i_{\sigma.k+1}} \dots X_{i_{\sigma.r}}$$

(somme étendue aux permutations σ telles que $\sigma.1 < \dots < \sigma.k$ et $\sigma.(k+1) < \dots < \sigma.r$) l'inégalité

$$\|X_{i_0} \dots X_{i_r} x\| \leq \|X_{i_1} \dots X_{i_r} x\| + \|AX_{i_1} \dots X_{i_r} x\|$$

qui résulte de $\|X_i y\| \leq \|y\| + \|Ay\|$ pour $y \in \tilde{\mathcal{E}}$ et l'inégalité démontrée plus haut dans $\mathfrak{a}_2$, on déduit immédiatement l'inégalité récurrente :

$$(**) \qquad c_{r+1,s} \leq d_{r,s} + \sum_{1 \leq k \leq r} \binom{r}{k} M'^k d_{r+1-k,s}$$

avec $d_{r,s} = c_{r,s} + c_{r+1,s+1}$. L'inégalité (**) permet de montrer facilement que la série $\sum_{r,s} c_{r,s}\, h^r k^s/r!$ converge pour h et k assez petit, le rayon de convergence dépendant de M', mais non de x dans $\mathcal{H}'$; on a par suite une majoration $c_{r,o} \leq M''^r . r!$ ce qui démontre que $\varphi(h)$ converge absolument pour $|h_1|, \ldots, |h_n| < M$ avec $M = M''/n$.

Ceci étant, on peut choisir M assez petit pour que l'application $(h_1, \ldots, h_n) \rightarrow \exp h_1 X_1 + \ldots + h_n X_n = e(h)$ soit un homéomorphisme analytique de l'ensemble des $h = (h_1, \ldots, h_n)$ avec $\sup |h_i| < M$ sur un voisinage ouvert Ω de e dans G . Puisque la série $\varphi(h)$ converge dans ces conditions, on peut définir $U_s x$ pour $s \in \Omega$ et $x \in \mathcal{H}'$ par la formule $U_s x = \varphi(h)$ pour $s = e(h)$. Utilisant la formule de Campbell-Hausdorff, on montre facilement qu'on a $(U_s x, U_t y) = (U_{t^{-1}.s}\, x, y)$ pour $s, t, s.t$ dans Ω et x, y dans $\mathcal{H}'$. De là par des raisonnements faciles, on déduit l'existence d'une représentation unitaire U de G dans $\mathcal{H}$ prolongeant ce qu'on vient de construire dans Ω . Il est facile alors de voir que tout vecteur de $\tilde{\mathcal{E}}$ est différentiable et que l'on a $U_X | \tilde{\mathcal{E}} = \tilde{r}(X)$, donc $U_X | \mathcal{E} = r(X)$ pour tout X dans $\mathfrak{g}$.

On a donc montré que si A est essentiellement auto-adjoint, la représentation donnée de $\mathfrak{g}$ s'étend en une représentation de G ; ceci permet de retrouver des résultats de Harish-Chandra dans le cas semi-simple, en s'appuyant sur les propriétés des sous-groupes compacts maximaux. Mais, il y a plus, la démonstration précédente montre que dans toute représentation unitaire d'un groupe de Lie, les vecteurs analytiques sont partout denses ; il suffit en effet de supposer que la représentation r de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{E}$ est d'avance la représentation associée à une représentation de G dans $\mathcal{H}$; en particulier $\mathcal{E} = \mathcal{H}^\infty$, et comme le graphe de $\tilde{r}(X)$ est dense dans celui de $r(X)$, tout vecteur de $\tilde{\mathcal{E}}$ est différentiable, d'où $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}$. Pour tout vecteur x de $\mathcal{H}' \subset \mathcal{E}$, la série $e^{h_1 X_1 + \ldots + h_n X_n} x$ converge pour h_i assez petits donc tout vecteur de $\mathcal{H}'$ est analytique ; et on a vu que $\mathcal{H}'$ est dense dans $\mathcal{H}$.

Nous sommes donc au bout de nos peines dans le cas unitaire. Nous allons nous contenter de brèves indications sur le cas non unitaire.

5. Cas d'une représentation dans un espace de Banach.

On considère une représentation U du groupe de Lie G dans l'espace de Banach $\mathcal{H}$. Supposons d'abord U bornée, c'est-à-dire qu'il y a une constante M telle que $\|U_s\| \leq M$ pour tout s dans G. Alors pour toute fonction f sur G sommable pour la mesure de Haar à gauche ds, on peut définir l'opérateur continu U_f dans $\mathcal{H}$ par $U_f x = \int U_s x f(s) ds$; si la représentation régulière gauche est définie dans $L^p = L^p(G, ds)$ par $L_s g(t) = g(s^{-1} t)$, les vecteurs $U_f x$ sont analytiques dans $\mathcal{H}$ dès que f est un vecteur analytique dans L^1 pour la représentation régulière gauche. Utilisant le théorème de Hahn-Banach, on voit que les vecteurs analytiques sont denses dans $\mathcal{H}$ pourvu qu'ils le soient dans L^1 ; mais la multiplication $(f, f') \rightarrow f.f'$ de $L^2 \times L^2$ dans L^1 étant continue et les vecteurs analytiques étant denses dans L^2 (puisque la représentation régulière dans L^2 est unitaire), les vecteurs analytiques sont denses dans L^1. Ceci règle donc le cas des représentations bornées (le raisonnement précédent se trouve dans [1]).

NELSON traite le cas général par une méthode différente. Tout d'abord en utilisant le théorème de Hille-Yosida dans L^1 ou le théorème de Stone sur les groupes à un paramètre d'opérateurs unitaires dans L^2, puis le théorème du graphe fermé pour montrer que certains opérateurs ont des noyaux de Carleman, on construit une solution $p(s, t)$ de l'équation de la chaleur $\partial_t p = \Delta_s p$ ($t > 0$ réel, s dans G). Pour t fixé la fonction $p_t : s \rightarrow p(s, t)$ sur G est continue, dans $L^1 \cap L^2$, on a $p_t * p_{t'} = p_{t+t'}$ et p_t tend vers la mesure de Dirac à l'origine de G pour t tendant vers 0. En utilisant les propriétés de régularité des équations elliptiques, ou les résultats démontrés sur les vecteurs analytiques dans les représentations unitaires, on montre que p_t est analytique sur G ; puis sans trop de difficulté, on étend p_t en une fonction $\tilde{p}_t$ sur un voisinage de "largeur constante" de G dans une variété complexe $\tilde{G}$ contenant G. Le seul point difficile est alors de montrer que p_t tend assez vite vers 0 à l'infini ; NELSON s'en tire en utilisant des théorèmes profonds sur les processus stochastiques ; il n'est sans doute pas inespéré d'en trouver une démonstration directe. Une fois là, il est facile de montrer que pour toute fonction ρ sur G telle que $\rho(s) \geqslant 0$ et $\rho(st) \leq \rho(s) \rho(t)$, les vecteurs analytiques pour la représentation régulière gauche sont denses dans $L^1(G, \rho.ds)$. Utilisant un raisonnement analogue à celui de l'alinéa précédent, on en conclut alors que les vecteurs analytiques sont denses dans toute représentation.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTIER (P.) et DIXMIER (J.). - Vecteurs analytiques dans les représentations de groupes de Lie, Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 131-145.

[2] DIXMIER (J.). - Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents II, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 325-388.

[3] DIXMIER (J.). - Sur la relation $i(PQ - QP) = 1$, Comp. Math., t. 13, 1958, p. 263-269.

[4] GÅRDING (L.). - Note on continuous representations of Lie groups, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 33, 1947, p. 331-332.

[5] HARISH-CHANDRA. - Representations of a semi-simple Lie group on a Banach space I, Trans. Amer. math. Soc., t. 75, 1953, p. 185-243.

[6] JOHN (F.). - Plane waves and spherical means applied to partial differential equations. - New York, Interscience Publishers, 1958.

[7] NELSON (E.). - Analytic vectors, Ann. of Math., (à paraître).

[8] NELSON (E.).and STINESPRING (W. F.). - Representation of elliptic operators in an envelopping algebra, Amer. J. of Math.,(à paraître).

[9] SEGAL (I. E.). - A class of operator algebras which are determined by groups, Duke math. J., t. 18, 1951, p. 221-265.

[10] STONE (I.). - On one parameter unitary groups in Hilbert space, Ann. of Math., t. 33, 1932, p. 643-648.