BERNARD MALGRANGE

Unicité du problème de Cauchy

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. n° 178, p. 151-161

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__151_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1959)

UNICITÉ DU PROBLÈME DE CAUCHY, D'APRÈS A. P. CALDERÓN

par Bernard MALGRANGE

1. Historique, état actuel de la question.

Voir les indications bibliographiques données à la fin de cet exposé.

2. Intégrales singulières et calcul symbolique.

Soit $\hat{\Sigma}$ l'espace des fonctions de $x \in R^n$, indéfiniment dérivables pour $x \neq 0$, et homogènes de degré zéro (i. e. $f(\lambda x) = f(x)$ pour $\lambda > 0$) ; et soit Σ l'espace des distributions de la forme $C\delta$ + v. p. $f(x)$ (v. p. = valeur principale de Cauchy), où f est indéfiniment dérivable pour $x \neq 0$, homogène de degré $-n$, et a une valeur moyenne nulle sur toute sphère centrée en 0 (de rayon non nul). Il est connu que Σ et $\hat{\Sigma}$ sont transformés de Fourier l'un de l'autre.

Munissons ces espaces de leurs topologies naturelles, et considérons les espaces $\mathcal{B}^2(\Sigma)$ et $\mathcal{B}^2(\hat{\Sigma})$ des fonctions 2 fois continûment dérivables de $x \in R^n$ à valeurs dans Σ ($\hat{\Sigma}$), bornées ainsi que leurs dérivées d'ordre ≤ 2 (en réalité, des conditions de Hölder sur les dérivées premières suffiraient) ; nous noterons encore $f \to \hat{f}$ la transformation de Fourier par rapport à la deuxième variable, qui transforme $\mathcal{B}^2(\Sigma)$ en $\mathcal{B}^2(\hat{\Sigma})$. A $f(x, y) \in \mathcal{B}^2(\Sigma)$, on associe le noyau suivant :

$$F\varphi = \int \hat{f}(x, \xi)\, \hat{\varphi}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi \qquad (\varphi \in \mathcal{D}_x) .$$

On montre que, si l'on écrit $f(x, y)$ sous la forme

$$f_1(x)\,\delta + (\text{v. p.})_y\, f_2(x, y) ,$$

on a aussi :

$$F\varphi = f_1(x)\, \varphi(x) + \text{v. p.} \int f_2(x, x-z)\, \varphi(z)\, dz .$$

Le noyau F est, par définition, appelé un "opérateur intégral singulier" ; $\hat{f}(x, \xi)$ est appelé son "symbole" et noté $\sigma(F)$. Ces opérateurs ont été étudiés par GIRAULT, TRICOMI, MICHLIN, et, plus récemment par CALDERÓN-ZYGMUND [1]. Voici, sans démonstration, les résultats dont nous aurons besoin.

Appelons H^k (k entier $\geqslant 0$) l'dspace des fonctions de $x \in R^n$ qui sont dans L^2 ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq k$ (au sens des distributions) ; notons $<,>_k$ un produit scalaire hilbertien dans H^k, et $\| \ \|_k$ la norme correspondante (choisis tels que H^k soit complet; pour $k = 0$, on prend le produit scalaire habituel) ; alors :

a. Le noyau F se prolonge en un opérateur linéaire continu $H^k \to H^k$ pour $k = 0, 1$; F^* désignant l'adjoint de F prolongé à H^o, on a $F^*(H^1) \subset H^1$ (donc F^* est continu : $H^1 \to H^1$).

b. Désignons par Λ le noyau

$$\varphi \to \Lambda\varphi = \int \hat{\varphi}(\xi)|\xi|\, e^{i\xi x}\, d\xi \qquad (|\xi|^2 = \sum |\xi_j|^2)$$

et par $\bar{F}$ le noyau dont le symbole est $\overline{\sigma(F)}$; les noyaux $[F, \Lambda]$, $\Lambda(F^* - \bar{F})$ et $(F^* - \bar{F})\Lambda$ se prolongent en opérateurs continus $H^o \to H^o$.

c. Désignons par $F_1 \circ F_2$ le noyau dont le symbole est $\sigma(F_1)\ \sigma(F_2)$; les noyaux $\Lambda(F_1 \circ F_2 - F_1 F_2)$ et $(F_1 \circ F_2 - F_1 F_2)\Lambda$ se prolongent en opérateurs continus $H^o \to H^o$.

[CALDERÓN et ZYGMUND démontrent même que ces résultats sont encore vrais quand on remplace L^2 par L^p, $1 < p < +\infty$!].

3. L'inégalité fondamentale.

Pour éclairer la lanterne du lecteur, nous allons commencer par démontrer l'inégalité élémentaire suivante, pour les fonctions d'une variable :

$$(1) \qquad \int e^{kt^2} \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|^2 dt \geqslant k \int e^{kt^2} |\varphi|^2\, dt \qquad (\varphi \in \mathcal{D} ;\ k \text{ réel}).$$

Pour cela, on pose

$$\psi = e^{\frac{k}{2}t^2}\varphi \quad \text{et (1) devient :} \quad \int \left|\frac{d\varphi}{dt} - kt\,\varphi\right|^2 dt \geqslant k \int |\psi|^2\, dt .$$

Or, le premier membre de cette dernière inégalité s'écrit :

$$\int \left|\frac{d\psi}{dt}\right|^2 dt + \int |kt\,\psi|^2 dt - 2\,\mathcal{R}\int \frac{d\psi}{dt}\, kt\,\bar{\psi}\, dt$$

et le résultat suit immédiatement, parce que, par intégration par parties, on a :

(2) $$2\,\mathcal{R}\int \frac{d\psi}{dt}\; t\,\psi\, dt = - \int |\psi|^2\, dt\ .$$

TRÈVES [4], a obtenu des inégalités du type (1) pour tous les opérateurs aux dérivées partielles à coefficients constants (voir paragraphe 5); suivant CALDERÓN, nous allons en donner ici une autre généralisation (en fait CALDERÓN travaille avec $(t + \frac{1}{k})^{-k}$ au lieu de $e^{k(t-\alpha)^2}$; la seule différence est que ses calculs sont un peu plus compliqués).

Supposons donnés deux opérateurs intégraux singuliers $P(t)$ et $Q(t)$, dépendant 1 fois c. d. (c. d. = continûment dérivable) d'un paramètre $t \in [0\,,\,1]$, et de symboles réels.

On suppose en outre que :

a. ou bien $P(t) = 0\quad \forall\ t \in [0\,,\,1]$

b. ou bien le prolongement de P à $H^0 \to H^0$ est inversible pour tout $t \in [0\,,\,1]$.

On a alors :

THÉORÈME 1. - Il existe des constantes > 0 : α, k_0, C telles que, pour tout $\varphi(t)$, 1 fois c. d. en t, à valeurs dans H^1, et à support dans $[0\,,\,\alpha]$, on ait :

$$\int e^{k(t-\alpha)^2} \left\| \frac{d\varphi}{dt} + P\wedge\varphi + i\,Q\wedge\varphi \right\|_0^2 dt \geq C\,k \int e^{k(t-\alpha)^2}\, \|\varphi\|_0^2\, dt$$

pour tout $k > k_0$.

DÉMONSTRATION. - (Dans tous les calculs qui suivant, aux paragraphes 3 et 4, on omettra les indices o dans $\langle\,,\,\rangle_0$ et $\|\ \|_0$). Remarquons qu'il suffit de démontrer le résultat pour des $\varphi(x\,,\,t)$ indéfiniment dérivables à support compact contenu dans $R^n \times [0\,,\,\alpha]$ (cela simplifiera quelques transpositions) ; ceci posé, on écrit encore :

$$\psi = e^{\frac{k}{2}(t-\alpha)^2}\,\varphi$$

et l'inégalité à démontrer devient :

$$\int \| \frac{d\psi}{dt} - k(t-\alpha)\psi + P\wedge\psi + i\,Q\wedge\psi \|^2\,dt \geq C\,k \int \|\psi\|^2\,dt .$$

Pour minorer le premier membre, on y sépare la "partie approximativement hermitienne" et la "partie approximativement antihermitienne" (comme elles "commutent approximativement", cela donnera de bonnes majorations des termes rectangles) ; i.e. on écrit la fonction qui figure au 1er membre sous la forme

$$\left(\frac{d\psi}{dt} + i\,Q\wedge\psi\right) + \left(P\wedge\psi - k(t-\alpha)\psi\right)$$

d'où, compte-tenu de (2) :

$$\int \| \frac{d\psi}{dt} - k(t-\alpha)\psi + P\wedge\psi + i\,Q\wedge\psi \|^2\,dt =$$

(3)

$$= \int \| \frac{d\psi}{dt} + i\,Q\wedge\psi\|^2\,dt + \int \|P\wedge\psi - k(t-\alpha)\psi\|^2\,dt + k\int \|\psi\|^2\,dt + I_1 + I_2$$

avec $I_1 = -2\,\mathcal{R}\int \langle i\,Q\wedge\psi\,,\ k(t-\alpha)\psi\rangle\,dt$

$$I_2 = 2\,\mathcal{R}\int \langle \frac{d\psi}{dt} + i\,Q\wedge\psi\,,\ P\wedge\psi\rangle dt .$$

Majorons I_1 et I_2

a. On a $\overline{Q} = Q$; d'où, en utilisant 2, (a) et (b) :

$$|I_1| \leq C_1\,k \int (\alpha - t)\,\|\psi\|^2\,dt \qquad (C_1 \text{ une constante } > 0)$$

et, par conséquent, si $4\,C_1\,\alpha \leq 1$

(4) $$|I_1| \leq \frac{k}{4} \int \|\psi\|^2\,dt .$$

b. Dans le cas où $P = 0$, on a $I_2 = 0$, et le théorème résulte immédiatement de (3) et (4). Plaçons-nous maintenant dans le cas (b) où P est inversible On a d'abord :

$$2\,\mathcal{R}\int \langle \frac{d\psi}{dt}\,,\ P\wedge\psi\rangle\,dt = \int \left\{ \langle \frac{d\psi}{dt}\,,\ P\wedge\psi\rangle + \langle P\wedge\psi\,,\ \frac{d\psi}{dt}\rangle \right\}\,dt$$

$$= \int \langle \frac{d\psi}{dt}\,,(P\wedge - \wedge P^*)\psi\rangle\,dt - \int \langle \frac{dP}{dt}\wedge\psi,\psi\rangle\,dt$$

(intégration par parties); d'autre part (calcul immédiat) :

$$2\,\mathcal{R}<i\,Q\Lambda\psi,\ P\Lambda\psi> = <i\,Q\Lambda\psi\ ,\ (P\Lambda - \Lambda P^*)\psi> + <i\Lambda\psi\ ,\ (Q\Lambda P^* - P\,Q\Lambda)\psi>$$

d'où

$$I_2 = 2\,\mathcal{R}\int<\frac{d\psi}{dt} + i\,Q\Lambda\psi,\ P\Lambda\psi> dt =$$

$$= \int<\frac{d\psi}{dt} + i\,Q\Lambda\psi,\ (P\Lambda - \Lambda P^*)\psi>dt - \int<\frac{dP}{dt}\Lambda\psi, \psi>dt + \int<i\Lambda\psi,\ (Q\Lambda P^* - PQ\Lambda)\psi>dt$$

de 2 (a), (b) et (c) , résulte facilement :

$$|I_2| \leq C_2\left\{\int\left\|\frac{d\psi}{dt} + i\,Q\Lambda\psi\right\|.\|\psi\|\ dt + \int\|\Lambda\ \psi\|.\|\psi\|\ dt\right\}\ .$$

Comme P est inversible, on a d'autre part :

$$\|\Lambda\psi\| \leq C_3\|P\Lambda\psi\| \leq C_3\left\{\|P\Lambda\psi - k(t-\alpha)\psi\| + k(\alpha - t)\|\psi\|\right\}$$

d'où, en choisissant α assez petit et k_o assez grand :

$$(5)\qquad \begin{aligned} |I_2| \leq & \int\left\|\frac{d\psi}{dt} + i\,Q\Lambda\psi\right\|^2 dt\ + \\ & + \int\|P\Lambda\psi - k(t-\alpha)\psi\|^2\ dt + \frac{k}{2}\int\|\psi\|^2\ dt \qquad (k \geqslant k_o) \end{aligned}$$

Et le théorème résulte immédiatement de (3), (4) et (5).

4. Unicité du problème de Cauchy.

Soit D un opérateur différentiel linéaire homogène d'ordre m , à coefficients indéfiniment dérivables (pour simplifier)

$$Df = \frac{\partial^m f}{\partial t^m} + \sum_{j=1}^{m} P_j(x\ ,\ t\ ,\ D_x)\,\frac{\partial^{m-j} f}{\partial t^{m-j}}$$

avec $P_j(x\ ,\ t\ ,\ D_x) = \sum_{|k|=j} a_{j,k}(x\ ,\ t)\ D_x^k$; $t \in R$, $x \in R^n$, $a_{j,k}$ réels;

on pose $P_j(x\ ,\ t\ ,\xi) = \sum_k a_{j,k}(x\ ,\ t)\xi^k$, et on fait l'hypothèse suivante :

(S) Pour tout ξ réel $\neq 0$, les racines de l'équation

$$\tau^m + \sum P_j(0\ ,\ 0\ ,\xi)\tau^{m-j} = 0$$

sont distinctes; (alors, la même propriété sera évidemment vraie lorsqu'on remplace (o , o) par (x , t) assez voisin de zéro).

<u>Exemples d'opérateurs du type</u> (S).

1° Les parties principales d'opérateurs <u>hyperboliques</u> au sens de Petrovsky (supposer en outre que lesdites racines sont <u>réelles</u>). Dans ce cas, il est connu que le problème de Cauchy est "bien posé" (travaux de PETROWSKY, LERAY, GÅRDING) i.e. on a un théorème d'existence et d'unicité.

2° Les parties principales d'opérateurs elliptiques du second ordre à coefficients réels ; ici, l'unicité du problème de Cauchy (et même un résultat plus fort) a été établi par MÜLLER, HEINZ, HARTMANN-WINTNER dans des cas particuliers, puis ARONSZAJN, CORDES, LANDIS dans le cas général.

3° Beaucoup d'autres opérateurs, pour lesquels le résultat est nouveau (par exemple, la partie principale du produit d'un opérateur du type (1°) et d'un opérateur du type (2°).

Démontrons d'abord le

THÉORÈME 2. - <u>Dans l'hypothèse</u> (S), <u>et si</u> $n \neq 2$, <u>il existe des constantes</u> > 0 : α , k_0 , C , <u>et un voisinage</u> V <u>de zéro dans</u> R^n <u>tels que, pour tout</u> $\varphi \in \mathcal{D}_{x,t}$, <u>à support dans</u> $V \times [0 , \alpha]$, <u>on ait, pour</u> $k > k_0$

$$\iint e^{k(t-\alpha)^2} |D\varphi|^2 \, dx \, dt \geq C k \iint e^{k(t-\alpha)^2} \left\{ \sum_{|j| \leq m-1} |D^j_{x,t} \varphi|^2 \right\} dx \, dt .$$

DÉMONSTRATION. - On va se ramener au théorème 1 par une "diagonalisation approximative". Pour cela, on considère a priori la matrice $m \times m$:

$$h(x , t , \xi) = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & -I \\ p_1 |\xi|^{-1} & \cdots & p_j |\xi|^{-j} & \cdots & p_m |\xi|^{-m} \end{pmatrix}$$

(on pose $p_j = P_j(x , t , \xi)$)

Pour (x , t) voisin de zéro, ses valeurs propres sont distinctes, par hypothèses ; il existe donc alors m fonctions $\lambda_j(x , t , \xi)$ homogènes de degré zéro en ξ, indéfiniment dérivables en x , t , ξ $(\xi \neq 0)$, définies par ces valeurs propres (pour $n > 2$, parce que S est simplement connexe ! pour $n = 1$, c'est trivial, mais pour $n = 2$ on est canulé !). De plus, ou bien λ_j est réelle, ou bien sa partie imaginaire ne s'annule pas (pour $|\xi| \neq 0$).

Il existe alors une $m \times m$ matrice $n(x , t , \xi)$ homogène de degré zéro en ξ, définie pour (x , t) voisin de zéro, et différentiable en x , t , ξ $(\xi \neq 0)$, telle qu'on ait : $nhn^{-1} = \delta$ avec

$$\delta(x , t , \xi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

En remplaçant au besoin D par $D + (1 - \beta)D_0$, $\beta \in \mathcal{D}_{x,t}$ de support assez petit, et égal à 1 au voisinage de zéro, (D_0 désigne l'opérateur obtenu en remplaçant dans D les $a_{j,k}(x , t)$ par $a_{j,k}(0 , 0)$), on peut supposer que les propriétés suivantes sont vraies :

a. Les constructions précédentes peuvent être faites pour tout $(x , t) \in R^{n+1}$

b. h , δ , n définissent des opérateurs intégraux singuliers (matriciels) dépendant différentiablement de t ; nous les désignerons respectivement par $H(t)$, $\Delta(t)$, $N(t)$.

c. Les opérateurs singuliers dont les symboles sont les parties imaginaires des λ_j sont, ou bien nuls, ou bien inversibles (i.e. leurs prolongements à H^0 sont inversibles) et, de même, $N(t)$ est inversible.

[Ce dernier point résulte du fait suivant : les opérateurs obtenus en remplaçant dans leurs symboles (x , t) par $(0 , 0)$ sont visiblement inversibles ; et, en choisissant β convenablement, on montre qu'ils sont aussi voisins qu'on veut des précédents] .

On aura, d'après le paragraphe 2 :

$N(t)\, H(t)\Lambda = \Delta(t)\, \Lambda N(t)$ + (opérateur continu $H^0 \to H^0$, dépendant différentiablement de t).

Soit alors $U = (u_1(t) , \dots , u_n(t))$, $u_j(t)$ différentiables en t à valeurs dans H^1 , à support dans $[0 , \alpha]$, α convenable ; posons $V = N\, U$, et appliquons le théorème 1, en y prenant, comme 1er membre, les composantes de $\frac{dV}{dt} + i\Lambda \wedge V$; après retour à U, on aura, pour α, k'_o, C' convenables

$$\int e^{k(t-\alpha)^2} \|\frac{dU}{dt} + i H \wedge U\|_o^2 \, dt \geqslant C'k \int e^{k(t-\alpha)^2} \|U\|_o^2 \, dt \qquad (k \geqslant k'_o)$$

(on pose $\|U\|_o^2 = \sum \|u_j\|_o^2$, et de même au premier membre).

Appliquons ceci à U défini par

$$u_j(t) = (i\Lambda)^{m-j} \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} \varphi \qquad (1 \leq j \leq m) \quad ;$$

au premier membre, tous les termes sont nuls, sauf le dernier qui vaut $\iint e^{k(t-\alpha)^2} |D\varphi|^2 \, dx \, dt$; donc :

$$\iint e^{k(t-\alpha)^2} |D\varphi|^2 \, dx \, dt \geqslant C'k \int e^{k(t-\alpha)^2} \sum_j \|\Lambda^{m-j} \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} \varphi\|_o^2 \, dt$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_{x,t}$ dont le support est contenu dans $R^n \times [0, \alpha] \cap$ (l'ensemble des points où $\beta = 1$).

Ce résultat, joint à l'inégalité 3 (1), et à l'inégalité élémentaire $\|u\|_p \leqslant C_{K,m} \|\Lambda^p u\|_o$ (u à support dans un compact $K \subset R^n$; $p \leq m-1$), démontre le théorème 2.

Il est maintenant très facile d'obtenir le résultat principal :

THÉORÈME 3. - Soit D un opérateur différentiel homogène d'ordre m vérifiant (S), et soit K une constante > 0 ; soit $u(x, t)$ une fonction suffisamment différentiable, nulle pour $t \leq 0$, et vérifiant, au voisinage de $(x, t) = 0$ l'inégalité

$$|Du|^2 \leq K \sum_{|j| \leqslant m-1} |D^j_{x,t} u|^2$$

Alors, sauf (peut être !) si $n = 2$, $u = 0$ au voisinage de $(x, t) = 0$.

DÉMONSTRATION. - Un changement de variables (qui ne canule rien) nous ramène tout de suite au cas où u est nul en dehors de $t > \sum x_j^2$. Soit alors α la constante du théorème 2 (on la diminue au besoin pour que V contienne l'ensemble $\sum x_j^2 < \alpha$) ; soit $\gamma(t)$ une fonction indéfiniment dérivable de t, égale à 1 pour $t \leq \frac{\alpha}{2}$, et à zéro pour $t \geq \alpha$; d'après (6), on a :

$$\iint e^{k(t-\alpha)^2} |D(\gamma u)|^2 \, dx\, dt \leq K \iint e^{k(t-\alpha)^2} \sum_{|j| \leq m-1} |D^j_{x,t}(\gamma u)|^2 \, dx\, dt +$$

$$+ K' \int_{\alpha/2}^{\alpha} e^{k(t-\alpha)^2} \, dt$$

K' dépendant de u, γ, etc. mais non de k, d'où, en appliquant le théorème 2 :

$$(Ck - K) \iint e^{k(t-\alpha)^2} \sum_{|j| \leq m-1} |D^j_{x,t} u|^2 \, dx\, dt \leq K' \int_{\alpha/2}^{\alpha} e^{k(t-\alpha)^2} \, dt$$

en faisant tendre k vers $+\infty$, on voit immédiatement que les $D^j_{x,t} u$ sont nuls pour $t < \frac{\alpha}{2}$

C. Q. F. D.

Indiquons enfin, sans entrer dans les détails, que CALDERÓN généralise son théorème aux systèmes d'équations (et d'inéquations) ; il donne deux méthodes : la première consiste à opérer directement de la même manière, mais il y a des canulars topologiques pour 3 et 4 dimensions ; la seconde consiste, en considérant le "déterminant" du système, à se ramener à un système d'inégalités

$$|D u_j|^2 \leq K \sum_j \sum_{|k| \leq m-1} |D^k_{x,t} u_j|^2$$

où D vérifie (S) (on vérifie facilement que la même méthode marche); ici, on n'est canulé que pour 3 dimensions (comme dans le cas d'une équation), mais, en revanche, pour s'y ramener, il faut supposer que les u_j sont solutions d'un système d'équations où les coefficients (pas seulement ceux des termes dominants) vérifient des conditions de régularité assez strictes !.

5. Indications sur les travaux de HÖRMANDER et TRÈVES.

Je me contenterai (?) de quelques indications très rapides, sans aucune démonstration (il faudrait un autre exposé entier pour les donner). Le résultat le plus significatif de HÖRMANDER est le suivant :

THÉORÈME 4. - Soit $P(\zeta)$ un polynôme homogène de degré m en $\zeta \in C^n$, irréductible, et soit V l'ensemble des zéros de P dans C^n ; on suppose :

(H) Dans $R^n - \{0\}$, V est sans singularités ; dans $C^n - \{0\}$, V n'a que des singularités d'ordre 1.

Soit alors $P(D)$ l'opérateur différentiel obtenu en remplaçant ξ_j par $\frac{\partial}{\partial x_j}$, et soit f une fonction 2 fois c. d. de $x \in R^n$, réelle, et "uniformément convexe" (i.e. la matrice $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$ est définie positive en tout point x) ; pour tout compact $K \subset R^n$, il existe une constante $C(f, K)$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, à support dans K, on ait :

$$(7) \quad \int e^{kf} |P(D) \varphi|^2 \, dx \geq C(f, K) \int e^{kf} \sum_{|j| \leq m-1} |D^j \varphi|^2 \, dx$$

En raisonnant comme au théorème 3, on trouvera immédiatement à partir de là des résultats sur l'unicité du prolongement à travers des hypersurfaces convexes convenables, pour les solutions d'inégalités différentielles

$$|P(D) u| \leq Cte \sum_{|j| \leq m-1} |D^j u| \quad .$$

Les étapes de la démonstrations sont les suivantes (aucune n'est triviale, et la première est particulièrement originale) :

a. Désignons par $P^{\alpha}(D)$ le polynôme obtenu en appliquant à P le monôme de dérivation D^{α} ; prenons pour f une forme quadratique de x, alors, l'inégalité suivante est vraie (TREVES, [5]) pour tout polynôme différentiel P :

$$(8) \qquad \int e^{kf} |P(D) \varphi|^2 \, dx \geq k^{|\alpha|} C(f, K) \int e^{kf} |P^{\alpha}(D) f|^2 \, dx$$

b. HÖRMANDER, par une partition de l'unité convenable, déduit de (8) la même inégalité, avec f uniformément convexe quelconque ; puis, il passe de là à l'inégalité (7) en utilisant la transformation de Fourier, et une autre partition de l'unité (lorsque P vérifie l'hypothèse (H)).

HÖRMANDER cherche aussi des conditions nécessaires pour avoir (7) ; il trouve ceci : si l'on suppose que f est 2 fois c. d., et que les vecteurs grad f engendrent R^n (f n'est plus nécessairement supposée uniformément convexe), alors l'hypothèse (H) est nécessaire : Ce résultat est évidemment très désagréable puisque tous [1] les résultats obtenus sur l'unicité du problème de Cauchy (sauf pour les équations à coefficients analytiques) s'appuient sur

[1] Cependant, pour certains problèmes, une méthode différente est employée par LANDIS [4].

des inégalités de ce type. Une astucieuse modification de ce procédé, et la découverte d'autres méthodes, sont donc mis au concours ...

BIBLIOGRAPHIE

[1] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (A.). - Singular integral operators and differential equations, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 901-921.

[2] CALDERÓN (A. P.). - Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 16-36.

[3] HÖRMANDER (L.). - On the uniqueness of the Cauchy problem, Math. Scand., t. 6, 1958.

[4] LANDIS (E. M.). - Nekotorye voprosy kačestvennoj teorii èllipticeskikh i paraboliceskikh uravnenij, Uspekhi mat. Nauk, t. 14, 1959, p. 21-85.

[5] TRÈVES (François). - Relations de domination entre opérateurs différentiels, Acta Math., t. 101, 1959, p. 1-139.

Il est impossible de donner ici la bibliographie complète de la question (sans parler des questions connexes). Le lecteur trouvera un historique et une bibliographie (à peu près) complète dans [2] $\cup$ [3] .