ROGER GODEMENT

# Les fonctions ζ des algèbres simples, II

*Séminaire N. Bourbaki*, 1960, exp. nº 176, p. 109-128
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__109_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1959)

# LES FONCTIONS $\zeta$ DES ALGÈBRES SIMPLES, II

par Roger GODEMENT

Soit L une algèbre semi-simple sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels ; il existe au moins deux méthodes pour attacher à L des séries de Dirichlet ; dans la première on part d'un ordre maximal B et on forme

$$\sum N(\alpha)^{-s}$$

la sommation étant étendue à tous les réseaux $\alpha$ de L tels que

$$B\alpha = \alpha \ , \qquad \alpha \subset B \ ;$$

on peut naturellement raffiner ce procédé en introduisant des "caractères" de façon à obtenir, dans le cas des corps de nombres algébriques, les "Zeta funktionen mit Grössencharakteren" de HECKE [5] . La seconde méthode est beaucoup moins connue que la première, parce qu'elle ne conduit à rien d'intéressant dans le cas <u>commutatif</u> ; elle consiste à considérer le groupe $\Gamma$ des unités de B , et à le plonger comme sous-groupe <u>discret</u> dans le groupe <u>de Lie</u> $G_o$ formé des $x \in \mathbb{R} \otimes L$ tels que $|N(x)| = 1$ ; on peut alors définir les "fonctions automorphes" de $\Gamma$, et généraliser la construction des opérateurs $T_n$ donnée par HECKE [6] pour le groupe modulaires (lequel correspond à $L = M_2(\mathbb{Q})$) , ce qui conduit à des séries de Dirichlet

$$\sum T_n/n^s$$

dont HECKE a découvert, dans le cas du groupe modulaire, des propriétés on ne peut plus remarquables. Des séries analogues semblent avoir été étudiées par SELBERG et SHIMURA , pour les algèbres de quaternions (qui conduisent à des sous-groupes discrets à quotient compact du groupe hyperbolique) ; mais le rédacteur manque pour le moment, sur ce sujet, de textes précis.

Le but du présent exposé est de montrer comment une analyse détaillée de l'espace <u>des fonctions de carré sommable sur l'espace des classes d'idèles de</u> L permet de retrouver automatiquement les deux aspects de la théorie qu'on vient d'exposer.

Cependant, le rédacteur n'est en mesure actuellement que de traiter le cas des <u>corps gauches</u>, dans lequel ne se présente pas de "spectre continu" à cause de la compacité de l'espace des classes d'idèles. Ce cas couvre en particulier les corps de quaternions sur $\mathbb{Q}$ . Mais il est maintenant tout à fait certain que les méthodes du présent exposé doivent s'étendre à toutes les algèbres simples sur $\mathbb{Q}$ , moyennant des modifications qui ne sont certainement pas toutes triviales (il est probable qu'on pourrait assez facilement traiter le "spectre discret", qui correspond essentiellement à la théorie classique des "Spitzenformen" ; mais le spectre continu ne saurait s'étudier sans l'aide des "séries d'Eisenstein", qui risquent de réserver de plus sérieuses difficultés ...).

Dans ce qui suit, on se bornera à donner une idée précise de la méthode, en faisant des hypothèses restrictives destinées à éliminer des complications techniques de nature arithmétique (sommes de Gauss, classes d'idéaux, etc.).

Les notations non explicitées ici sont définies dans l'exposé 171.

## 1. La formule sommatoire de Poisson.

Soit $L$ une algèbre semi-simple sur $\mathbb{Q}$ et regardons le groupe additif $\hat{L}$ des adèles de $L$ ; c'est un groupe abélien localement compact, auquel s'appliquent donc les méthodes connues (CARTAN-GODEMENT [1] , pour ne pas citer WEIL ...). La première question est évidemment de déterminer le groupe dual de $\hat{L}$ (groupe des caractères de module 1 de $\hat{L}$) .

THÉORÈME 1. - Il existe un caractère $x \to \tau(x)$ de $\hat{L}$ possédant les propriétés suivantes :

a. On a $\tau(xy) = \tau(yx)$ quels que soient $x , y \in \hat{L}$ ;

b. Pour tout $x \in \hat{L}$ , la fonction

$$\tau^{x}(y) = \tau(xy)$$

est un caractère de $\hat{L}$ , et l'application $x \to \tau^{x}$ est un isomorphisme topologique du groupe $\hat{L}$ sur son dual ;

c. Pour que le caractère $\tau^{x}$ de $\hat{L}$ soit trivial sur le sous-groupe (discret à quotient compact) $L$ de $\hat{L}$ , il faut et il suffit que $x \in L$ .

La démonstration de ce théorème (qu'on trouvera dans TATE) ne présente pas de difficulté sérieuse ; bornons-nous ici à indiquer comment on construit explicitement le caractère $\tau$ .

Plaçons-nous d'abord sur le corps $\hat{\mathbb{Q}}_p$ des nombres p-adiques, p fini. Tout $x \in \hat{\mathbb{Q}}_p$ a un développement (non unique)

$$x = \sum_{n \gg -\infty} r_n p^n , \quad r_n \in \underset{\sim}{Z} ,$$

et il est clair que le nombre rationnel $\sum_{n<0} r_n p^n$ est défini modulo $\underset{\sim}{Z}$ par la donnée de $x$ ; d'où un caractère

$$\tau_p(x) = \exp(2 \pi i \sum_{n<0} r_n p^n)$$

de $\hat{\underset{\sim}{Q}}_p$. Pour $p$ infini, $\hat{\underset{\sim}{Q}}_p = \underset{\sim}{R}$ et on pose

$$\tau_\infty(x) = \exp(- 2 \pi i x) \quad ;$$

reproduisons à ce sujet le commentaire de TATE : "Note the minus sign !" .

Ceci dit, le caractère $\tau$ de $\hat{L}$ est donné par la formule

$$\tau(\underline{x}) = \prod \tau_p(\mathrm{Tr}_{\hat{L}_p/\hat{\underset{\sim}{Q}}_p}(\underline{x}_p)) , \quad \underline{x} \in \hat{L} \quad ;$$

presque tous les facteurs de ce produit sont égaux à 1 (prendre un ordre $B$ de $L$, observer que $\underline{x}_p \in \hat{B}_p$ pour presque tout $p$ - par définition des adèles— donc que pour presque tout $p$ on a $\mathrm{Tr}(\underline{x}_p) \in \hat{\underset{\sim}{Z}}_p$, et remarquer que $\tau_p$ est trivial sur $\hat{\underset{\sim}{Z}}_p$ ).

Soit $dm^+(\underline{x})$ la mesure de Haar de $\hat{L}$, normalisée par la condition

$$m^+(\hat{L}/L) = 1 \quad .$$

On a alors, pour toute fonction $f$ définie et continue sur $\hat{L}$, et décroissant suffisamment vite à l'infini, la <u>formule d'inversion de Fourier</u>.

$$\hat{f}(\underline{x}) = \int_{\hat{L}} f(\underline{y}) \overline{\tau(\underline{xy})} \, dm^+(\underline{y})$$

$$f(\underline{y}) = \int_{\hat{L}} \hat{f}(\underline{x}) \, \tau(\underline{xy}) \, dm^+(\underline{x})$$

Un résultat rigoureusement équivalent au précédent est la <u>formule sommatoire de Poisson</u>

$$\sum_{\xi \in L} f(\xi) = \sum_{\xi \in L} \hat{f}(\xi) \quad .$$

En tenant compte du fait que, si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont des idèles de $L$, on a

$$dm^+(\underline{axb}) = |\underline{ab}|\ dm^+(\underline{x}) ,$$

il vient plus généralement (sic) la relation

$$\sum_{\xi \in L} f(\underline{a}\ \xi\ \underline{b}) = |\underline{ab}|^{-1} \sum_{\xi \in L} \hat{f}(\underline{b}^{-1}\ \xi\ \underline{a}^{-1})$$

qui va entraîner l'équation fonctionnelle des fonctions $\zeta$.

En ce qui concerne la validité des formules précédentes, bornons-nous à indiquer une classe de fonctions qui les vérifient. Soit $\alpha$ un réseau quelconque de $L$ ; pour chaque $p$ fini, désignons par $f_p$ une fonction sur $\hat{L}_p$ vérifiant les conditions suivantes :

i. $f_p$ est nulle en dehors de $\hat{\alpha}_p$ ;

ii. sur $\hat{\alpha}_p$, la fonction $f_p$ se réduit à un caractère du groupe additif $\hat{\alpha}_p$ trivial pour presque tout $p$.

Autrement dit :

$$f_p(\underline{x}_p) = \begin{cases} \tau_p(\mathrm{Tr}(\underline{a}_p\ \underline{x}_p)) & \text{sur } \hat{\alpha}_p \\ 0 \text{ en dehors de } \hat{\alpha}_p \end{cases}$$

où $\underline{a}_p$ est un élément de $\hat{L}_p$ vérifiant $\underline{a}_p \in \hat{\alpha}_p$ pour presque tout $p$. Enfin sur $\hat{L}_\infty$ prenons une fonction continue qui, à l'infini, décroît exponentiellement vers 0 (c'est même beaucoup trop exiger ...) . ALors la fonction

$$f(\underline{x}) = \prod f_p(\underline{x}_p)$$

vérifie les conditions de validité des formules de Fourier et de Poisson. La démonstration (TATE) est tout à fait élémentaire.

La transformée de Fourier de la fonction $f$ se calcule naturellement par multiplication des transformées de Fourier locales (en effet, $f$ est nulle en dehors de

$$\hat{L}_\infty \times \prod_{p \text{ fini}} \hat{\alpha}_p ,$$

sous-groupe de $\hat{L}$ qui est muni de sa topologie produit, de sorte que $dm^+(x)$

induit sur ce sous-groupe, à un facteur près, le produit des mesures de Haar des facteurs). Or

$$\hat{f}_p(\underline{y}_p) = \int_{\hat{\mathfrak{a}}_p} \tau_p(\mathrm{Tr}(\underline{a}_p\, \underline{x}_p))\, \overline{\tau_p(\mathrm{Tr}(\underline{x}_p\, \underline{y}_p))}\, dm_p^+(\underline{x}_p)$$

ce qui, d'après les relations d'orthogonalité des caractères des groupes compacts (relations fort triviales ici, le groupe $\hat{\mathfrak{a}}_p$ étant abélien ...) donne 1 ou 0 suivant que le caractère

$$\underline{x}_p \to \tau_p(\mathrm{Tr}((\underline{a}_p - \underline{y}_p)\underline{x}_p))$$

de $\hat{\mathfrak{a}}_p$ est trivial ou non ; désignant par $\mathfrak{b}$ le réseau de L <u>complémentaire</u> de $\mathfrak{a}$ on a donc

$$\hat{f}_p = \begin{cases} 1 & \text{sur } \underline{a}_p + \hat{\mathfrak{b}}_p \\ 0 & \text{en dehors .} \end{cases}$$

Par exemple si tous les $\underline{a}_p$ sont nuls alors le <u>passage de</u> f <u>à</u> $\hat{f}$ <u>revient à remplacer le réseau</u> $\mathfrak{a}$ <u>par son complémentaire</u> $\tilde{\mathfrak{a}}$ , abstraction faite de ce qui se passe "à l'infini" .

## 2. <u>L'équation fonctionnelle fondamentale</u>.

Considérons maintenant le groupe

$$I^* = I^*(L)$$

des idèles de L et son sous-groupe

$$I_0^* : \underline{x} \in I^* \text{ tels que } |\underline{x}| = 1 \ .$$

On a un isomorphisme <u>canonique</u>

$$I^* = I_0^* \times \underset{\sim}{R}_+^*$$

obtenu en identifiant tout $t \in \underset{\sim}{R}_+^*$ à l'idèle ayant $t.1$ pour composante à l'infini, et 1 pour autres composantes.

Or le groupe $L^*$ des éléments inversibles de L se plonge comme sous-groupe <u>discret</u> de $I_0^*$ , et le quotient $L^*$

$$L^* \backslash I_0^* = (L^* \times \underset{\sim}{R}_+^*) \backslash I^*$$

est <u>compact</u> si $L$ est un corps gauche, ou droit.

Quand on a un groupe localement compact $I^*$ et un sous-groupe fermé $L^* \times \underset{\sim}{R}^*_+$ il est rarement dénué d'intérêt de considérer, d'une part l'<u>espace de Hilbert</u>

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(L^* \times \underset{\sim}{R}^*_+ \backslash I^*) = \mathcal{L}^2(L^* \backslash I^*_0) \quad ,$$

formé des fonctions $\varphi(\underline{x})$ , $\underline{x} \in I^*$ , telles que [1]

$$\varphi(t \xi \underline{x}) = \varphi(\underline{x}) \quad \text{pour} \quad t \in \underset{\sim}{R}^*_+ \ , \ \xi \in L^* \ , \ \underline{x} \in I^*$$

$$\int_{L^* \backslash I^*_0} |\varphi(\underline{x})|^2 \, dm^*_0(\underline{x}) < + \infty \quad ,$$

d'autre part la <u>représentation unitaire</u> $\underline{x} \to Z(\underline{x})$ <u>de</u> $I^*$ <u>dans</u> $\mathcal{H}$ obtenue en définissant

$$Z(\underline{x}) \ : \ \varphi(\underline{y}) \to \varphi(\underline{yx}) \quad .$$

Dans une situation de ce genre le problème qui se pose est de décomposer <u>explicitement</u> la représentation $Z$ en somme directe (discrète ou continue ...) de représentations unitaires <u>irréductibles</u>. Si l'on n'y peut parvenir, il est en tout cas naturel de faire usage des méthodes générales de la théorie des représentations ; or la première de ces méthodes est de passer à l'algèbre de groupe, i.e. d'attacher à toute fonction $f(\underline{x})$ , définie et <u>intégrable</u> sur $I^*$ l'opérateur <u>continu</u>

$$Z(f) = \int_{I^*} Z(\underline{x}) \, f(\underline{x}) \, dm^*(\underline{x}) \quad .$$

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> $f(\underline{x})$ <u>une fonction définie et continue sur</u> $\hat{L}$ , <u>et décroissant suffisamment vite à l'infini ainsi que sa transformée de Fourier additive</u> [2] . <u>Alors</u> :

a. <u>Les intégrales</u>

$$Z(f \, , \, s) = \int_{I^*} Z(\underline{x}) \, f(\underline{x}) \, |\underline{x}|^s \, dm^*(\underline{x}) \ ; \ Z(\hat{f}, \, s) = \int_{I^*} Z(\underline{x}) \, \hat{f}(\underline{x}) \, |\underline{x}|^s \, dm^*(\underline{x})$$

---

[1] Les notations $m^*$ et $m^*_0$ désignent les mesures invariantes à droite de $I^*$ et $I^*_0$ . On ne se préoccupe pas ici de les "normaliser", de sorte que les formules qui suivent sont vraies à des facteurs constants près.

[2] Les fonctions construites à la fin du numéro précédent conviennent.

convergent pour $R(s)$ assez grand ;

b. Soit $E$ l'opérateur de projection orthogonale de $\mathcal{H}$ sur le sous-espace de $\mathcal{H}$ formé des fonctions constantes. Alors les fonctions (3)

$$Z(f\,,\,s) - \left[\frac{f(0)}{ns} + \frac{\hat{f}(0)}{n(1-s)}\right] E \qquad n = [L : \mathbb{Q}]$$

$$Z(\hat{f}\,,\,s) - \left[\frac{\hat{f}(0)}{ns} + \frac{f(0)}{n(1-s)}\right] E$$

se prolongent analytiquement, et sont des fonctions entières de $s$, à valeurs dans l'espace des opérateurs continus de $\mathcal{H}$ ;

c. Soit $J$ l'involution $\varphi(x) \to \overline{\varphi(x)}$ dans $\mathcal{H}$ ; alors l'adjoint de l'opérateur $Z(f\,,\,s)$ est donné par la formule

$$Z(f\,,\,s)^{*} = J.Z(\hat{f}\,,\,1-s).J \quad .$$

La démonstration (TATE-IWASAWA pour le cas commutatif, à la formulation près du théorème) consiste à imiter Riemann.

Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ et calculons le produit scalaire

$$\zeta(f\,;\,\varphi\,,\,\psi\,;\,s) = \langle Z(f\,,\,s)\varphi\,,\,\psi\rangle$$

$$= \int_{L^{*}\backslash I_{0}^{*}} Z(f\,,\,s)\ \varphi(\underline{y}).\,\overline{\psi(\underline{y})}\ dm_{0}^{*}(\underline{y})$$

$$= \iint_{I^{*}\times(L^{*}\backslash I_{0}^{*})} \varphi(\underline{yx})\ f(\underline{x})\ |\underline{x}|^{s}\ \overline{\psi(\underline{y})}\ dm^{*}(\underline{x})\ dm_{0}^{*}(\underline{y}) \quad ;$$

introduisant

$$K_{s}^{f}(\underline{x}\,,\,\underline{y}) = \sum_{\xi\in L^{*}} \int_{0}^{+\infty} f(t\underline{x}^{-1}\xi\,\underline{y})\ t^{ns-1}\ dt$$

un calcul trivial montre que

$$\langle Z(f\,,\,s)\varphi\,,\,\psi\rangle = \iint_{(L^{*}\backslash I_{0}^{*})\times(L^{*}\backslash I_{0}^{*})} K_{s}^{f}(\underline{x}\,,\,\underline{y})\ \varphi(\underline{x})\ \overline{\psi(\underline{y})}\ dm_{0}^{*}(\underline{x})\ dm_{0}^{*}(\underline{y})$$

---

(3) Les résidus indiqués ici supposent $m_{0}^{*}(L^{*}\backslash I_{0}^{*}(L)) = 1$ .

en sorte que $K_s^f$ est un noyau sur l'espace quotient $L^\star \backslash I_o^\star$ qui définit $Z(f\ ,\ s)$ , et qui est fonction continue. Ceci fait, on écrit

$$K_s^f(\underline{x}\ ,\ \underline{y}) = \int_1^{+\infty} \cdots + \int_0^1 \cdots \quad ,$$

on remarque que l'intégrale étendue à l'intervalle $t \geqslant 1$ , étant convergente pour $R(s)$ grand, l'est quel que soit $s$ , on ramène l'intégrale de $0$ à $1$ à une intégrale de $1$ à $+\infty$ , et enfin on modifie cette dernière à l'aide de la formule de Poisson, en remarquant que $L$ , étant un corps, est réunion de $L^\star$ et de $0$ . Ceci donne immédiatement le prolongement analytique, les résidus, et la relation

$$K_s^f(\underline{x}\ ,\ \underline{y}) = K_{1-s}^{\hat{f}}(\underline{y}\ ,\ \underline{x}) \quad ,$$

d'où le théorème.

## 3. Où l'on décompose $\mathcal{H}$ en sous-espaces de dimension finie.

Il résulte du théorème 2 une équation fonctionnelle en $s \to 1 - s$ pour tous les "coefficients" $< Z(f\ ,\ s)\varphi\ ,\psi>$ de l'opérateur $Z(f\ ,\ s)$ ; pour parvenir à des résultats explicites, il faut choisir convenablement $\varphi$ et $\psi$ . Le but de ce numéro (qui est indépendant du précédent) est d'indiquer une méthode pour décomposer $\mathcal{H}$ en sous-espaces de dimension finie ayant une interprétation simple (fonctions automorphes du groupe des unités d'un ordre de $L$).

Introduisons les notations suivantes :

$B$ : ordre (non nécessairement maximal) de $L$

$\hat{B}_p$ : adhérence de $B$ dans $\hat{L}_p$ pour $p$ fini ; c'est un ordre, et un sous-groupe ouvert et compact, de $\hat{L}_p$ ;

$U_p(B)$ : groupe des unités de $\hat{B}_p$ ; c'est un sous-groupe ouvert et compact du groupe multiplicatif de $\hat{L}_p$ ;

$\Gamma$ : groupe des unités de $B$ ;

$G$ : groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\hat{L}$ ; c'est un groupe de Lie réductif (produit d'un semi-simple et d'un abélien) ;

$G_o$ : sous-groupe de $G$ défini par la condition $|N(x)| = 1$ ; on a donc canoniquement $G = G_o \times \mathbb{R}_+^\star$ ;

enfin posons

$$U_f = \prod_{p \text{ fini}} U_p(B) , \quad U = G_o \times U_f .$$

Il est clair que $U_f$ (avec sa topologie produit) est compact, et que $U$ (avec sa topologie produit) est un sous-groupe ouvert de $I_o^*$. Les classes

$$\mathfrak{K} = L^*.\underline{a}.U \quad (\underline{a} \in I_o^*)$$

sont donc ouvertes, en particulier de mesure non nulle, et deux à deux disjointes. Il est par suite raisonnable de définir dans $\mathcal{H}$ des sous-espaces

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{K}} : \varphi \in \mathcal{H} \text{ nulles en dehors de } \mathfrak{K} \times \mathbb{R}_+^* ;$$

ils sont fermés et non nuls ; comme $L^* \backslash I_o^*$ est compact, $I_o^*$ est réunion finie de classes $\mathfrak{K}$, et par suite $\mathcal{H}$ est somme directe hilbertienne des sous-espaces $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}$ en nombre fini. Pour décomposer $\mathcal{H}$ il suffit donc de décomposer chaque $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}$. Nous allons le faire pour la classe unité

$$\mathfrak{K} = L^*U$$

afin d'éviter ici des complications inutiles.

Effectuons d'abord une décomposition relativement au groupe $U_f$.

Il est évident que les $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}$ ne sont pas stables en général par la représentation $Z$ de $I^*$ dans $\mathcal{H}$ ; mais il est aussi évident qu'ils sont stables par la restriction de $Z$ à $U$, donc par la restriction de $Z$ à $U_f$. Or $U_f$ est compact : la représentation $Z$ de $U_f$ dans $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}$ est donc somme directe hilbertienne de représentations unitaires irréductibles, de dimension finie, de $U_f$ (mais chaque représentation peut intervenir une infinité de fois).

Or considérons $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}$ ; c'est l'espace des fonctions de carré sommable sur

$$L^* \backslash L^*U = (L \cap U) \backslash U = \Gamma \backslash U ;$$

d'autre part $U = G_o \times U_f$, et $\Gamma$ s'injecte sur un sous-groupe fermé de $G_o$ (tout en s'injectant péniblement dans $U_f$ - mais cela n'a aucune importance).

On a donc [4]

$$L^{*}\backslash L^{*}U = (\Gamma\backslash G_0) \times U_f \quad .$$

Ecrivant chaque élément de $U$ sous la forme $g.\underline{u}_f (g \in G_0\ ,\ \underline{u}_f \in U_f)$ on est donc amené à considérer $\varphi(g.\underline{u}_f)$ et à effectuer une transformation de Fourier par rapport à $\underline{u}_f$ .

Autrement dit, et faisant usage du théorème de Peter-Weyl : soit $X$ une représentation unitaire irréductible, de dimension finie, de $U_f$ ; associons à $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathfrak{K}}$ la fonction matricielle

$$\Phi_X(g) = \int_{U_f} \varphi(g.\underline{u}_f)\ X(\underline{u}_f)^{-1}\ d\underline{u}_f \quad ;$$

alors, Sp désignant la trace convenablement normalisée, on a un développement

$$\varphi(g.\underline{u}_f) = \sum_X \mathrm{Sp}\,[\Phi_X(g)\ X(\underline{u}_f)] \quad ;$$

et le produit scalaire de $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_{\mathfrak{K}}$ se calcule par

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{L^{*}\backslash L^{*}U} \varphi(\underline{x})\ \overline{\psi(\underline{x})}\ dm_0^{*}(\underline{x}) = \iint_{(\Gamma\backslash G_0)\times U_f} \varphi(g.\underline{u}_f)\ \overline{\psi(g.\underline{u}_f)}\ dg\ d\underline{u}_f$$

$$= \sum_X \int_{\Gamma\backslash G_0} \mathrm{Sp}\,[\Phi_X(g)\ \Psi_X(g)^{*}]\ dg \quad .$$

Naturellement les fonctions $\Phi_X(g)$ ne sont pas quelconques ; comme $\varphi(\xi\ \underline{x}) = \varphi(\underline{x})$ pour $\xi \in L^{*}$, on voit que, si l'on note transitoirement $\gamma_\infty$ et $\gamma_f$ les images de $\gamma$ dans $G_0$ et $U_f$ on doit exprimer que $\varphi(g.\underline{u}_f)$ ne change pas par $g \to \gamma_\infty g\ ,\ \underline{u}_f \to \gamma_f\,\underline{u}_f$ ; d'où immédiatement

$$\Phi_X(\gamma\, g) = \Phi_X(g)\ X(\gamma)^{-1}$$

---

[4] L'isomorphisme $L^{*}\backslash L^{*}U \approx (\Gamma\backslash G_0) \times U_f$ n'a aucun sens au point de vue topologique ni même au point de vue ensembliste. Il signifie simplement que, si l'on a dans $G_0$ un domaine fondamental mesurable $F$ pour $\Gamma$, alors $F \times U_f$ est un domaine fondamental mesurable pour $L^{*}$ opérant sur $L^{*}U$ ; ceci suffit à justifier les calculs qui suivent.

où $\gamma \to X(\gamma)$ est la restriction de $X$ à $\Gamma \subset U_f$.

En définitive : soit $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X)$ l'espace des fonctions matricielles $\phi(g)$, $g \in G_0$, vérifiant

$$\phi(\gamma g) = \phi(g)\, X(\gamma)^{-1}$$
$$\int_{\Gamma\backslash G_0} \mathrm{Sp}\,[\phi(g)\, \phi(g)^*]\, dg < +\infty \quad ;$$

alors $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}$ est somme directe hilbertienne des $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X)$.

Remarque sur $X$ : il est clair que $X$ est triviale sur presque toute composante $U_p(B)$ de $U_f$, et que, $U_p(B)$ ayant beaucoup de sous-groupes ouverts, le noyau de $X$ dans $U_p(B)$, donc aussi dans $U_f$, est d'indice fini. Il en est donc de même de la représentation $X$ restreinte à $\Gamma$. On obtient ainsi les multiplicateurs arithmétiques du groupe discontinu $\Gamma$.

Il est clair que les $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X)$ sont encore de dimension infinie. Mais leur définition même montre qu'on a une représentation unitaire $Z$ de $G_0$ dans $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X)$, par les translations à droite comme toujours.

Or le quotient $\Gamma\backslash G_0$ est compact ; par suite la représentation de $G_0$ dans $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X)$ est somme directe discrète de représentations unitaires irréductibles qui interviennent avec des multiplicités finies ; c'est là une facile généralisation du théorème de Peter-Weyl, reposant sur les propriétés les plus simples des opérateurs complètement continus.

Soit $\mathfrak{F}$ un sous-espace fermé irréductible de $G_0$ et soit

$K$ : sous-groupe compact maximal de $G_0$.

Comme $K$ opère dans $\mathfrak{F}$, voit comme plus haut que $\mathfrak{F}$ est somme directe hilbertienne de sous-espaces $\mathfrak{F}(M)$ correspondant aux diverses classes $M$ de représentations unitaires irréductibles (de dimension finie) de $K$. Mais $G_0$ est réductif ; un résultat de HARISH-CHANDRA ([3] ; voir aussi [2]) montre alors que

$$\dim \mathfrak{F}(M) \leq \dim(M)^2 \quad .$$

Posons d'autre part

$\mathfrak{Z}(G_0)$ : algèbre des opérateurs différentiels sur $G_0$ qui commutent aux translations à droite et à gauche;

cette algèbre est commutative, et engendrée par $r$ éléments algébriquement indépendants ($r$ = rang de $G_0$), résultat d'ailleurs inutile pour ce qui suit ; la théorie de HARISH-CHANDRA montre que pour chaque composante irréductible $\mathfrak{F}$ on peut trouver un homomorphisme

$$\lambda : \mathfrak{Z}(G_0) \to \underset{\sim}{C}$$

tel que les fonctions $\phi \in \mathfrak{F}$ vérifient, en tant que distributions, le système différentiel

$$D(\phi) = \lambda(D).\phi \qquad \text{pour tout } D \in \mathfrak{Z}(G_0) \ ;$$

enfin, le "caractère infinitésimal" $\lambda$ de la représentation irréductible de $G_0$ dans $\mathfrak{F}$, et la donnée d'une classe $M$ telle que $\mathfrak{F}(M)$ ne soit pas nul, déterminent cette représentation à un nombre fini d'ambiguïtés près (HARISH-CHANDRA, [3]).

En combinant ces résultats on voit que, si l'on désigne par

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X\ ,\ M\ ,\ \lambda)$$

l'ensemble des $\phi \in \mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X)$ qui se transforment par $K$ suivant un multiple de $M$, et qui vérifient les équations différentielles $D(\phi) = \lambda(D)\phi$, alors chaque $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X\ ,\ M\ ,\ \lambda)$ est de dimension finie, et $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X)$ est somme hilbertienne des $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X\ ,\ M\ ,\ \lambda)$ non nuls.

Il est du reste immédiat de voir que $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X\ ,\ M\ ,\ \lambda)$ est le sous-espace de $\mathcal{H}$ formé des fonctions $\varphi(\underline{x})$, $\underline{x} \in I^*$, telles que $\varphi = 0$ en dehors de $\mathfrak{K} \times \underset{\sim}{R}_+^*$, et qui sont données sur $\mathfrak{K}$ par

$$\varphi(\xi\ \underline{u}) = \mathrm{Sp}\,[\phi\,(\underline{u}_{\infty}).X(\underline{u}_f)]\ ,$$

où $\phi$ est une fonction sur $G_0$, à valeurs dans l'algèbre des matrices de la représentation $X \otimes M$ de $K \times U_f$, et vérifiant les conditions suivantes :

(I) : $\phi\,(\gamma\, gk) = \phi\,(g).X(\gamma)^{-1} \otimes M(k)$

(II) : $D(\phi) = \lambda(D).\,\phi$ pour tout $D \in \mathfrak{Z}\,(G_0)$.

Ces fonctions sont nécessairement analytiques, car l'opérateur de Casimir de $G_0$, qui appartient à $\mathfrak{Z}(G_0)$, induit sur $G_0/K$ un opérateur elliptique.

Pour des raisons évidentes, on dira que $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X, M, \lambda)$ est l'espace des formes automorphes d'espèces $(X, M, \lambda)$ de $\Gamma$. Il va de soi que cette notion contient celle qu'on rencontre dans la théorie classique des formes automorphes holomorphes ; mais la condition d'holomorphie, dans la mesure où elle a un sens, ne présente pas d'intérêt spécial du point de vue adopté ici.

REMARQUE. - Dans le cas d'une algèbre semi-simple quelconque, le quotient $\Gamma \setminus G_0$ est seulement de volume fini (SIEGEL [8]), et dans la définition (I), (II) des formes automorphes on doit ajouter une condition portant sur leur comportement à l'infini. Les résultats de HARISH-CHANDRA [4] conduisent à imposer la condition

(III) : la fonction $\Phi(g)$ est majorée sur $G_0$ par une puissance de $d(e, g)$,

où $d(g, h)$ est la distance dans $G_0/K$ des images de $g$ et de $h$. Ceci dit, le rédacteur conjecture que $\Gamma$ satisfait aux hypothèses énoncées dans la note de HARISH-CHANDRA (plus exacttement, que la déviation par rapport aux conditions de HARISH-CHANDRA est compensée par des propriétés de compacité partielle, si l'on ose dire, de $\Gamma\setminus G_0$), et que par suite les $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X, M, \lambda)$ doivent être de dimension finie dans tous les cas. Il est clair que, de toute façon, on ne pourra pas se dispenser d'établir ce résultat, ainsi que beaucoup d'autres ...

## 4. Le retour à Hecke.

Ayant décomposé l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ en sous-espaces de dimension finie $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X, M, \lambda)$, nous allons calculer les fonctions

$$\zeta(f ; \varphi, \psi ; s) = \langle Z(f, s) \varphi, \psi \rangle$$

pour $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X, M, \lambda)$ et en prenant $f$ de la forme indiquée à la fin du n° 1. Afin d'éviter des complications techniques (sommes de Gauss non commutatives, entre autres), on supposera

$$\mathfrak{K} = L^* U \quad , \quad X = \text{identité}.$$

Donc $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X, M, \lambda)$ signifie que $\varphi$ est nulle en dehors de $L^* U$, et que

$$\varphi(\xi\, \underline{u}) = \mathrm{Sp}\,[\Phi(\underline{u}_\infty)]$$

avec

$$\phi(\gamma gk) = \phi(g)\,M(k)\ ,\quad D(\phi) = \lambda(D).\phi\quad .$$

Enfin, on prendra un réseau $\mathfrak{a}$ de $L$ tel que

$$B\,\mathfrak{a}\,B = \mathfrak{a}\ ,$$

et on prendra $f = \prod f_p$ avec

$$f_p = 1 \ \text{ sur } \ \hat{\mathfrak{a}}_p\ , \ = 0 \ \text{ ailleurs } \ (p \text{ fini})\ ;$$

le choix de $f_\infty$ importe peu pourvu que l'on impose la condition

$$f_\infty(kxk^{-1}) = f_\infty(x) \quad \text{pour} \quad k \in K\ ,\quad x \in \hat{L}_\infty \quad .$$

Avec ces hypothèses, il est évident a priori que la restriction à la classe $\mathfrak{K}$ de la fonction $Z(f\ ,\ s)\varphi$ appartient encore à $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X\ ,\ M\ ,\ \lambda)$ , de sorte que pour calculer le produit scalaire $\langle Z(f\ ,\ s)\varphi\ ,\ \psi\rangle$ il suffit d'appliquer la formule

$$\langle Z(f\ ,\ s)\varphi\ ,\psi\rangle = \int_{\Gamma\backslash G_0} Z(f\ ,\ s)\ \varphi(g).\ \overline{\psi(g)}\ dg \quad .$$

Toute la question est donc de calculer

$$\begin{aligned} Z(f\ ,\ s)\ \varphi(g) &= \int_{I^*} \varphi(g.\underline{x})\ f(\underline{x})\ |\underline{x}|^s\ dm^*(\underline{x}) \\ &= \int_{L^*\backslash I_0^*} K_s^f(g\ ,\ \underline{x})\ \varphi(\underline{x})\ dm_0^*(\underline{x}) \\ &= \int_{L^*\backslash L^*U} \cdots \\ &= \iint_{(\Gamma\backslash G_0)\times U_f} K_s^f(g\ ,\ h.\underline{u}_f)\ \mathrm{Sp}\,[\phi(h)]\ dh\ d\underline{u}_f \quad . \end{aligned}$$

On doit donc d'abord calculer

$$K_s^f(g\ ,\ h.\underline{u}_f) = \sum_{\xi \in L^*} \int_0^{+\infty} f(tg^{-1}.\xi\ .h\underline{u}_f)\ t^{ns-1}\ dt \qquad ;$$

or

$$f(tg^{-1}.\xi\ .h\underline{u}_f) = f_\infty(tg^{-1}\xi\ h) \prod_{p\ \text{fini}} f_p(\xi_p\ \underline{u}_p)$$

où $\xi_p$ est l'image de $\xi$ par $L \to \hat{L}_p$ ; comme $f_p = 0$ en dehors de $\hat{\alpha}_p$, réseau de $\hat{L}_p$ invariant par multiplication à droite par $\hat{B}_p$, donc aussi par le groupe $U_p(B)$ des unités de $\hat{B}_p$, les seuls termes éventuellement non nuls de la série considérée sont ceux pour lesquels $\xi_p \in \hat{\alpha}_p$ pour tout $p$ fini, i.e. tels que $\xi \in \alpha$ ; et pour un tel terme il reste visiblement la partie à l'infini, d'où

$$Z(f\ ,\ s)\ \varphi(g) = \mathrm{Sp} \int_{\Gamma\backslash G_0} \phi(h)\ dh \sum_{\xi \in \alpha} f_\infty(g^{-1}\xi\ h\ ,\ s)$$

où l'on a posé

$$f_\infty(g\ ,\ s) = \int_0^{+\infty} f_\infty(tg)\ t^{ns-1}\ dt \quad .$$

En tenant compte du fait que

$$f_\infty(tg\ ,\ s) = t^{-s}\ f_\infty(g\ ,\ s) \quad ,$$

le changement de variable

$$h \to |N(\xi)|^{1/n}.\ \xi^{-1}\ h$$

conduit immédiatement à la formule

$$Z(f\ ,\ s)\ \varphi(g) = \mathrm{Sp} \sum_{\alpha^*/\Gamma} |N(\xi)|^{-s} \int_{G_0} \phi(\xi^{-1}\ h)\ f_\infty(g^{-1}\ h\ ,\ s)\ dh \qquad ;$$

ici $\alpha^*$ est formé des $\xi \in \alpha$ non nuls, et la sommation porte sur les classes $\xi\Gamma$.

Or considérons la fonction $\phi(\xi^{-1}\ h)$ pour $\xi$ donné ; elle n'est pas invariante par $\Gamma$ ; mais en posant

$$\Gamma(\xi) = \xi\Gamma\xi^{-1} \cap \Gamma \quad ,$$

on définit un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma$ , et il est clair qu'on a un opérateur

$$T(\xi) : \mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X , M , \lambda) \to \mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X , M , \lambda)$$

par la formule

$$T(\xi) : \phi(h) \to \sum_{\Gamma(\xi)\backslash\Gamma} \phi(\xi^{-1}\gamma h) \quad ;$$

ceci fait un calcul trivial donne

$$Z(f , s)\ \varphi(g) = \mathrm{Sp} \sum_{\Gamma\backslash\mathfrak{a}^*/\Gamma} |N(\xi)|^{-s} \int_{G_0} T(\xi)\ \phi(h).f_\infty(g^{-1}h , s)\, dh \quad .$$

Or comme $f_\infty(kxk^{-1}) = f_\infty(x)$ , on peut définir dans chaque $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X , M , \lambda)$ un opérateur $W(f_\infty , s)$ par

$$W(f_\infty , s) : \phi(g) \to \int_{G_0} \phi(h)\ f_\infty(g^{-1}h , s)\, dh = \int_{G_0} \phi(gh)\ f_\infty(h , s)\, dh$$

si l'on avait introduit la représentation unitaire $g \to W(g)$ de $G_0$ dans l'espace $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X) = \mathcal{L}^2(\Gamma\backslash G_0)$ (translations à droite) , on pourrait définir $W(f_\infty , s)$ par la formule

$$W(f_\infty , s) = \int_{G_0} W(h)\ f_\infty(h , s)\, dh \quad ;$$

par suite $W(f_\infty , s)$ est la restriction au sous-espace $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X , M , \lambda)$ de l'opérateur de composition défini par la fonction $f_\infty(h , s)$ dans la représentation $W$ de $G_0$ dans $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X)$ ; or cette dernière représentation est somme directe discrète de représentations irréductibles, et $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X , M , \lambda)$ s'obtient en "bloquant" les M-composantes de celles de ces représentations irréductibles qui admettent le "caractère infinitésimal" $\lambda$ ; donc l'opérateur $W(f_\infty , s)$ <u>ne dépend que des opérateurs de composition définis par</u> $f_\infty(h , s)$ <u>dans les représentations unitaires irréductibles de</u> $G_0$ <u>contenant</u> $M$ <u>et admettant le caractère infinitésimal</u> $\lambda$ , représentations qui sont en nombre fini. En particulier l'opérateur $W(f_\infty , s)$ <u>ne dépend pas du groupe discontinu</u> $\Gamma$ : il se calcule par des considérations de théorie des groupes de Lie uniquement. C'est donc l'analogue des "facteurs élémentaires" (fonctions gamma, etc.) qui interviennent dans les équations fonctionnelles des fonctions zeta usuelles.

Ceci fait il est clair qu'on a établi la formule

$$Z(f\ ,\ s)\ \varphi(g) = \sum_{\Gamma\backslash\alpha^*/\Gamma} |N(\xi)|^{-s}.\mathrm{Sp}\,[W(f_\infty\ ,\ s)\ T(\xi)\ \phi(g)]\ .$$

Il s'ensuit que pour $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(X\ ,\ M\ ,\ \lambda)$ on a

$$\zeta(f\ ;\ \varphi,\ \psi\ ;\ s) = \langle Z(f\ ,\ s)\ \varphi\ ,\psi\rangle$$

$$= \sum_{\Gamma\backslash\alpha^*/\Gamma} |N(\xi)|^{-s} \int_{\Gamma\backslash G_o} \mathrm{Sp}\,[W(f_\infty\ ,\ s)\ T(\xi)\ \phi(g).\psi(g)^*]\ dg$$

et par suite

$$\zeta(f\ ;\ \varphi,\ \psi\ ;\ s) = \sum_{\Gamma\backslash\alpha^*/\Gamma} \frac{\langle W(f_\infty\ ,s)\ T(\xi)\ \Phi,\ \Psi\rangle}{|N(\xi)|^s}$$

où les produits scalaires sont calculés dans $\mathcal{L}^2(\Gamma\backslash G_o)$ , comme il est de règle en théorie des fonctions automorphes.

Pour effectuer le "retour à Hecke" annoncé dans le titre de ce numéro il suffirait de poser

$$T_n = \sum_{\substack{\Gamma\backslash\alpha^*/\Gamma \\ |N(\xi)|=n}} T(\xi)\qquad ,$$

et on trouverait la série d'opérateurs

$$W(f_\infty\ ,\ s)\ \sum_{n=1}^{n=+\infty} T_n/n^s\qquad ,$$

à condition bien entendu que le réseau $\alpha$ soit <u>entier</u> faute de quoi les $\xi \in \alpha$ n'ont aucune raison de n'avoir que des normes entières.

Un exercice intéressant consisterait à calculer $Tr(T_n)$ en appliquant la "formule des traces" de SELBERG [7] , qui semble avoir traité le cas des <u>algèbres de quaternions</u> sur $\underset{\sim}{Q}$ (on a alors pour $G_o$ le groupe hyperbolique). On peut certainement parvenir à des résultats explicites dans le cas général.

Indiquons enfin, pour la beauté de la chose, comment on calcule le facteur élémentaire $W(f_\infty\ ,\ s)$ lorsque $M$ est de dimension 1 . On écrit

$$G_o = K.T \ , \quad K \cap T = e \ ,$$

où $T$ est un sous-groupe d'Iwasawa de $G_o$. Etant donné un homomorphisme

$$\alpha : T \longrightarrow \underset{\sim}{C}^*$$

on définit sur $G_o$ une fonction $\alpha^M$ par

$$\alpha^M(tk) = \alpha(t)\, M(k) \quad .$$

Alors, l'homomorphisme $\lambda : \mathfrak{Z}(G_o) \to \underset{\sim}{C}$ étant donné, il existe (HARISH-CHANDRA [3] ce résultat est de démonstration difficile) un $\alpha$ tel que

$$D(\alpha^M) = \lambda(D).\,\alpha^M \qquad \text{pour tout} \qquad D \in \mathfrak{Z}(G_o) \quad ;$$

et la <u>fonction sphérique</u>

$$P^M_\lambda(g) = \int_K \alpha^M(kg)\, M(k)^{-1}\, dk$$

ne dépend que de $M$ et $\lambda$ (il y a une ambigüité sur le choix de $\alpha$, due au groupe de Weyl de $G_o/K$). Ceci dit $W(f_\infty , s)$ est un <u>scalaire</u> en vertu du théorème

$$\dim \mathfrak{K}(M) \leq \dim(M)^2$$

lequel montre que $M$ intervient au plus <u>une</u> fois dans les représentations irréductibles de $G_o$ ; et ce scalaire est donné par la formule

$$W(f_\infty , s) = \int_{G_o} P^M_\lambda(g)\, f_\infty(g , s)\, dg \quad .$$

Le calcul explicite de cette intégrale lorsque $\hat{L}_\infty = M_q(\underset{\sim}{R})$ , $M = 1$ , et $f_\infty(x) = \exp(-\pi \mathrm{Tr}({}^t x.x))$ est très facile, et du reste se trouve depuis longtemps dans SIEGEL. Le calcul de $W(f_\infty , s)$ dans le cas le plus général est probablement un peu plus difficile ...

Disons encore pour conclure que les considérations précédentes ne sont qu'une assez grossière approximation ; comme on l'aura remarqué, toutes les formules écrites ici sont littéralement fausses, à cause des facteurs constants qu'on a omis de signaler, et qui proviennent du choix des mesures de Haar. De plus, il va de soi qu'on ne peut obtenir de résultats complets sans examiner toutes les représentations $X$ du groupe compact $U_f$ et toutes les classes $\mathfrak{H}$, ce qui oblige à faire intervenir non seulement $\Gamma$, mais des groupes commensurables à $\Gamma$, et à définir les $T(\xi)$ par des formules plus compliquées, où figurent des multiplicateurs arithmétiques et des sommes de Gauss.

Enfin, il serait utile d'étendre la théorie à toutes les algèbres semi-simples sur $\mathbb{Q}$, puis à toutes les algèbres à involution sur $\mathbb{Q}$, et pour terminer (ou pour commencer ...) à tous les groupes algébriques réductifs définis sur $\mathbb{Q}$, classiques ou non. C'est alors, et alors seulement, qu'on aura compris les relations existant entre l'arithmétique et la théorie des fonctions automorphes. Mais on ne résoudra probablement pas ce dernier problème sans utiliser à fond les instruments les plus puissants dont on dispose actuellement du côté de la théorie "transcendante" des groupes semi-simples, i.e. les résultats de HARISH-CHANDRA. C'est pourquoi nous n'avons pas cherché ici à nous en passer.

Signalons par exemple le problème suivant, qui ne semble pas exagérément trivial : soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels ; appelons ordre de $\mathfrak{g}$ tout réseau $A$ de $\mathfrak{g}$ tel que

$$[A , A] \subset A \quad ;$$

soit $A$ un ordre maximal de $\mathfrak{g}$ (il y en a, car la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est non dégénérée) ; étudier la série de Dirichlet

$$\zeta_{\mathfrak{g}}(s) = \sum_{\substack{[A,\mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a} \subset A}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}$$

où $\mathfrak{a}$ décrit l'ensemble des réseaux de $\mathfrak{g}$ qui sont des idéaux de $A$ regardé comme algèbre de Lie sur $\mathbb{Z}$ et où l'on pose $N(\mathfrak{a})$ = ordre du groupe fini $A/\mathfrak{a}$ .

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (H.) et GODEMENT (R.). - Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 64, 1947, p. 79-99.

[2] GODEMENT (Roger). - A theory of spherical functions, I, Trans. Amer. math. Soc., t. 73, 1952, p. 496-556.

[3] HARISH-CHANDRA. - Representations of semisimple Lie groups, I., Trans. Amer. math. Soc., t. 75, 1953, p. 185-243 ; II., t. 76, p. 26-65 ; III., t. 76, 1954, p. 234-253.

[4] HARISH-CHANDRA. - Automorphic forms on a semi-simple Lie group, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A. (à paraître).

[5] HECKE (Erich). - Eine neue Art von Zerafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen, Math. Z., t. 6, 1920, p. 11-51.

[6] HECKE (Erich). - Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung, I., Math. Annalen, t. 114, 1937, p. 1-28 ; II., t. 114, 1937, p. 316-351.

[7] SELBERG (Atle). - Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian math. Soc., N. S., t. 20, 1956, p. 47-87.

[8] SIEGEL (Carl Ludwig). - Discontinuous groups, Annals of Math., Series 2, t. 44, 1943, p. 674-689.