HENRI CARTAN

Espaces fibrés analytiques

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. nº 137, p. 7-18
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__7_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1956)

ESPACES FIBRÉS ANALYTIQUES, D'APRÈS H. GRAUERT,

par Henri CARTAN.

Il s'agit de résultats récents de Hans GRAUERT [7] ; une partie en a été annoncée aux Comptes-Rendus [6]. Ces résultats concernent essentiellement les espaces fibrés analytiques principaux dont la base est une variété de Stein ; le groupe structural est un groupe de Lie complexe arbitraire (le cas où le groupe structural est abélien, ou, plus généralement, résoluble, était déjà connu par les travaux de SERRE [9] et de FRENKEL [4]).

Il n'est pas question de donner ici des démonstrations. La présentation des résultats (qui complètent sur certains points ceux de GRAUERT) suit les exposés de H. CARTAN au Symposium de Mexico (août 1956 ; l'article qui contient des démonstrations, paraîtra dans les Comptes-Rendus du Symposium) [2].

1. Espaces fibrés E-principaux.

X désigne une variété analytique-complexe, ou, plus généralement, un "espace analytique" (au sens de BEHNKE-STEIN-CARTAN-GRAUERT). Soit E un espace fibré analytique-complexe, de base X, dont les fibres sont des groupes de Lie complexes, tous isomorphes ; cela signifie qu'il existe un recouvrement ouvert (U_i) de X et un groupe de Lie Γ, tels que E puisse être obtenu par la construction suivante : on forme la somme A des espaces analytiques $U_i \times \Gamma$, puis on prend le quotient de A par une relation d'équivalence R du type suivant : si $x \in U_{ij}$ $(= U_i \cap U_j)$, on identifie le point $(x,y) \in U_j \times \Gamma$ au point $(x, f_{ij}(x,y)) \in U_i \times \Gamma$, les f_{ij} étant des applications analytiques données

$$f_{ij} : U_{ij} \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$$

et satisfaisant aux conditions suivantes :

1) $f_{ij}(x, f_{jk}(x,y)) = f_{ik}(x,y)$ pour $x \in U_{ij}$, $y \in \Gamma$;

2) pour chaque $x \in U_{ij}$, l'application $y \to f_{ij}(x,y)$ est un automorphisme du groupe Γ.

E étant donné, on notera $p : E \to X$ la projection du fibré E sur sa base, et $\Gamma_x = p^{-1}(x)$ la fibre au-dessus de $x \in X$; Γ_x a une structure de groupe de Lie (complexe), mais on n'a pas, en général, un isomorphisme canonique de Γ_x sur Γ.

EXEMPLE. - Si E est simplement le produit $X \times \Gamma$, on dira que E est <u>trivial</u>.

E étant donné, on va définir la notion <u>d'espace fibré</u> <u>E-principal</u>. Lorsque E sera trivial, on retrouvera la notion classique d'espace principal de groupe structural Γ . Voici d'abord comment on peut "construire" un fibré E-principal ; donnons-nous un recouvrement ouvert arbitraire de X (qu'on notera encore (U_i)), et, pour chaque couple (i,j), une section holomorphe (resp. continue) $f_{ij} : U_{ij} \to E$, de manière que $f_{ij} f_{jk} = f_{ik}$ dans U_{ijk} , la multiplication étant entendue au sens de la loi de groupe qui existe dans chaque fibre. Autrement dit, (f_{ij}) est un 1-cocycle du recouvrement (U_i), à valeurs dans les sections du faisceau $\mathcal{E}^a$ (resp. du faisceau $\mathcal{E}^c$) des germes de sections holomorphes (resp. continues) du fibré E . Les f_{ij} permettent de construire un espace fibré analytique (resp. topologique) F , comme suit : on prend la somme des $p^{-1}(U_i)$ (sous-espaces ouverts de E), et on en fait le quotient par la relation d'équivalence suivante : si $x \in p^{-1}(U_{ij})$, on identifie le point $x \in p^{-1}(U_j)$ au point $f_{ij}(p(x)).x \in p^{-1}(U_i)$ (le signe . indique la multiplication dans la fibre au-dessus de $p(x)$). Dans le fibré F , les fibres n'ont plus une structure de groupe, mais seulement d'espace homogène par rapport à la fibre correspondante de E ; cette dernière <u>opère à droite</u> dans la fibre de F , d'une manière simplement transitive. D'une manière précise, si on note $F \vee E$ le "produit fibré" de deux espaces fibrés F et E de même base, on a une application analytique (resp. continue) $F \vee E \to F$; on dira que E opère à droite dans F .

Soient F et F' deux fibrés E-principaux topologiques (resp. analytiques) ; <u>un isomorphisme</u> (resp. un isomorphisme analytique) $F \to F'$ est un homéomorphisme (resp. un homéomorphisme analytique) qui induit l'application identique de la base X et est compatible avec les opérations (à droite) de E . Tout fibré E-principal (resp. E-principal analytique) est <u>localement isomorphe</u> à E , l'adverbe "localement" étant entendu au sens de la base X . Réciproquement, tout fibré F de base X dans lequel E opère à droite, et qui est localement isomorphe à E , est un fibré E-principal.

On peut considérer l'ensemble des <u>classes</u> d'espaces fibrés E-principaux ; d'une part les classes de fibrés analytiques E-principaux, l'équivalence étant définie par l'isomorphisme analytique ; d'autre part les classes de fibrés topologiques E-principaux, l'équivalence étant définie par l'isomorphisme topologique.

L'ensemble des classes de fibrés E-principaux analytiques (resp. topologiques) est en correspondance biunivoque, canonique, avec l'ensemble de cohomologie

$H^1(X, \mathcal{E}^a)$, resp. $H^1(X, \mathcal{E}^c)$. Rappelons (voir par exemple [9]) ce que c'est que la cohomologie $H^1(X, \mathcal{E})$ relative à un <u>faisceau de groupes</u> $\mathcal{E}$; pour chaque recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)$ de X , on a la notion de 1-cocycle (f_{ij}) , où $f_{ij} : U_{ij} \to \mathcal{E}$ est une section du faisceau $\mathcal{E}$, avec $f_{ij}f_{jk} = f_{ik}$ dans U_{ijk} . Deux cocycles (f_{ij}) et (g_{ij}) sont <u>homologues</u> s'il existe un système de sections $c_i : U_i \to \mathcal{E}$, tel que :

(1) $$g_{ij} = (c_i)^{-1} f_{ij} c_j \quad \text{dans } U_{ij} .$$

L'ensemble $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ est, par définition, l'ensemble des classes de cocycles homologues. Si $\mathcal{V}$ est un recouvrement plus fin que $\mathcal{U}$, on définit sans ambiguïté une application $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \to H^1(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, et on montre qu'elle est <u>injective</u> ; enfin, $H^1(X, \mathcal{E})$ est défini comme limite inductive des $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{E})$.

La correspondance biunivoque entre les classes de fibrés E-principaux analytiques et les éléments de $H^1(X, \mathcal{E}^a)$ s'explicite comme suit : soit F un fibré analytique E-principal ; choisissons un recouvrement (U_i) tel que F soit isomorphe à E au-dessus de chaque U_i ; soit f_i un isomorphisme de la restriction de E (au-dessus de U_i) sur la restriction de F (au-dessus de U_i) ; si on restreint f_i et f_j à $p^{-1}(U_{ij})$, le composé $(f_i)^{-1} \circ f_j$ est un automorphisme de $p^{-1}(U_{ij})$, donc est défini par la multiplication à gauche par une section f_{ij} du faisceau $\mathcal{E}^a$; (f_{ij}) est un cocycle, donc définit un élément de $H^1(X, \mathcal{E}^a)$; cet élément est indépendant des choix faits : on l'associe canoniquement au fibré F ; deux fibrés analytiquement isomorphes définissent <u>le même</u> élément de $H^1(X, \mathcal{E}^a)$, et on peut montrer que l'on obtient ainsi une bijection de l'ensemble des classes de fibrés analytiques E-principaux, sur l'ensemble $H^1(X, \mathcal{E}^a)$. En fait, la bijection réciproque a déjà été définie quand on a associé à un cocycle (f_{ij}) un fibré E-principal. Résultats analogues pour l'ensemble des classes de fibrés topologiques E-principaux, et l'ensemble $H^1(X, \mathcal{E}^c)$.

2. <u>Les théorèmes (A) et (B) de Grauert.</u>

Puisque $\mathcal{E}^a$ est un sous-faisceau de $\mathcal{E}^c$, on a une application canonique $H^1(X, \mathcal{E}^a) \to H^1(X, \mathcal{E}^c)$. En d'autres termes, chaque classe de fibrés E-principaux analytiques définit une classe de fibrés E-principaux topologiques.

Le résultat fondamental de GRAUERT est le suivant : si X est une <u>variété de Stein</u>, ou plus généralement un espace analytique <u>holomorphiquement complet</u>, alors l'application $H^1(X, \mathcal{E}^a) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{E}^c)$ est une bijection. On exprime cela en disant que, sous les hypothèses faites sur X, la classification analytique et la classification topologique des fibrés E-principaux coïncident.

Rappelons qu'un espace analytique X est holomorphiquement complet s'il satisfait aux conditions suivantes (cf. GRAUERT [5] ; il en a été rendu compte au Séminaire BOURBAKI de mai 1955) :

(i) X est réunion dénombrable de compacts ;

(ii) pour chaque point $x \in X$, il existe une application analytique $f : X \longrightarrow C^k$ (C^k désignant l'espace numérique complexe de dimension k ; k peut dépendre du point x) qui soit non dégénérée au point x (i.e. telle que x soit point isolé de l'ensemble $f^{-1}(f(x))$).

(iii) pour tout compact $K \subset X$, l'ensemble $\tilde{K}$ des $x \in X$ tels que $|f(x)| \leqslant \sup_{y \in K} |f(y)|$ pour toute f holomorphe dans X, est compact.

Rappelons aussi qu'une variété de Stein est un espace holomorphiquement complet qui, en outre, est une vraie variété analytique-complexe.

Le résultat fondamental de GRAUERT se décompose en deux ; si on exprime que $H^1(X, \mathcal{E}^a) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{E}^c)$ est une application injective (resp. surjective), on trouve les deux énoncés suivants :

THÉORÈME (A). - Soit (U_i) un recouvrement ouvert de X holomorphiquement complet. Soient deux cocycles holomorphes

$$f_{ij} : U_{ij} \longrightarrow E \quad , \quad g_{ij} : U_{ij} \longrightarrow E \ .$$

S'il existe des sections continues $c_i : U_i \longrightarrow E$ satisfaisant à (1), il existe aussi des sections holomorphes satisfaisant aux mêmes relations.

THÉORÈME (B). - Soit (U_i) un recouvrement ouvert de X holomorphiquement complet (les U_i étant holomorphiquement complets). Soit un cocycle continu $f_{ij} : U_{ij} \rightarrow E$. Alors il existe des sections continues $c_i : U_i \longrightarrow E$ telles que le cocyle

$$g_{ij} = (c_i)^{-1} f_{ij} c_j$$

soit holomorphe.

On va voir que le théorème (A) résulte facilement du :

THÉORÈME 1. - Soit F un fibré E-principal analytique, dont la base X est holomorphiquement complète. Alors toute section continue de F est homotope à une section holomorphe de F. (Remarque : l'ensemble des sections continues de F est muni de la topologie de la convergence compacte : "compact-open topology" ; une homotopie entre sections n'est pas autre chose qu'un chemin dans l'espace topologique des sections.).

Voici pourquoi le théorème 1 entraîne le théorème (A). D'une manière générale (sans supposer nécessairement que X soit holomorphiquement complet), soit à comparer deux fibrés analytiques E-principaux F et G, définis par des cocycles (f_{ij}) et (g_{ij}) du même recouvrement ouvert (U_i) de X. Considérons le fibré $F \vee_E G$, quotient du produit fibré $F \vee G$ par la relation d'équivalence suivante : le point (f,g) (où $f \in F$ et $g \in G$ sont au-dessus d'un même point x de la base X) est équivalent au point (fe,ge), e désignant un point quelconque de E au-dessus de x. Le fibré $F \vee_E G$ peut se construire par recollement, comme suit : soit θ_{ij} l'automorphisme de l'espace des sections holomorphes $U_{ij} \to E$ qui associe à chaque section c la section $f_{ij} c g_{ji}$; on a bien $\theta_{ij} \circ \theta_{jk} = \theta_{ik}$ dans l'espace des sections $U_{ijk} \to E$; alors, on recolle les $p^{-1}(U_i)$ au moyen des θ_{ij}, et on obtient ainsi le fibré $F \vee_E G$. Dire qu'il existe des $c_i : U_i \to E$ continues (resp. holomorphes) satisfaisant à (1), c'est dire qu'il existe une section continue (resp. holomorphe) du fibré $F \vee_E G$. Par ailleurs, le fibré $G \vee_E G$ s'obtient en recollant les $p^{-1}(U_i)$ au moyen des automorphismes $c \to g_{ij} c g_{ji}$, qui sont des automorphismes intérieurs ; donc $G \vee_E G$ est un fibré (aussi noté E_g) dont les fibres sont des groupes de Lie. En outre, E_g opère à droite dans $F \vee_E G$ (il suffit, dans une carte locale sur $p^{-1}(U_i)$, de prendre la multiplication dans les fibres de E), et on vérifie que $F \vee_E G$ est un fibré analytique E_g-principal.

En résumé : pour que F et G soient isomorphes (topologiquement, resp. analytiquement), il faut et il suffit que le fibré E_g-principal $F \vee_E G$ ait une section (continue, resp. holomorphe).

Cela dit, revenons au théorème 1. Il implique ceci : si un fibré E-principal analytique possède une section continue, il possède une section holomorphe. Appliquant ce résultat au fibré E_g-principal $F \vee_E G$, on obtient le théorème (A).

Le théorème (B) peut aussi se déduire du théorème 1, mais par des raisonnements plus compliqués, qui font intervenir la structure des espaces analytiques holomorphiquement complets.

REMARQUE. - Même lorsque le fibré E est trivial et que $F = E$, le théorème 1 n'est nullement évident ; il dit que si X est holomorphiquement complet et si Γ est un groupe de Lie complexe, toute application continue $X \to \Gamma$ est homotope à une application holomorphe $X \to \Gamma$.

3. Quelques applications des théorèmes (A) et (B).

Soit E' un sous-espace fibré analytique de E, ayant même base X (holomorphiquement complète), et dont les fibres sont des sous-groupes de Lie (complexes) des fibres de E. Tout fibré E'-principal F' définit un fibré E-principal $F = F' \vee_{E'} E$ (obtenu par agrandissement du fibré structural de E' à E ; on fait opérer E' dans E par multiplication à gauche). Si F' est défini par un cocycle à valeurs dans les sections de E', F est défini par le même cocycle, considéré comme prenant ses valeurs dans les sections de E.

Si un fibré E-principal F est isomorphe à un espace de la forme $F' \vee_{E'} E$, on dit qu'on peut, pour F, restreindre le fibré structural de E à E'. Il faut, bien entendu, distinguer les deux opérations de restriction du fibré structural : au sens analytique, et au sens topologique. Mais si la base X est holomorphiquement complète, et si F est analytique, la possibilité de restreindre le fibré structural au sens topologique, entraîne la possibilité de le restreindre au sens analytique : en effet, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathcal{E}'^a) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{E}^a) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(X, \mathcal{E}'^c) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{E}^c) \end{array}$$

et les flèches verticales sont des bijections (en vertu des théorèmes (A) et (B)).

Il est classique que la possibilité, pour F, de restreindre le fibré structural E au sous-fibré E', équivaut à l'existence d'une section $s : X \to F/E'$ de l'espace F/E' (quotient de F par la relation d'équivalence qu'y définissent les opérations de E' à droite), espace qu'on considère comme fibré de base X. Donc, si le fibré F/E' de base X (holomorphiquement complète) possède une section continue, il possède aussi une section holomorphe.

Voici d'autres conséquences des théorèmes (A) et (B) ; si une variété de Stein est parallélisable (au sens topologique), elle est parallélisable au sens analytique. On a un résultat analogue pour les champs de r vecteurs tangents linéairement indépendants (sur le corps C).

A ce sujet, signalons qu'on sait peu de choses sur les classes caractéristiques d'une variété de Stein (Classes de Chern, de Pontrjagin, de Stiefel-Whitney) ; leur étude mériterait d'être entreprise.

D'autre part, il serait intéressant d'obtenir des résultats sur la classification des espaces fibrés analytiques réels ; dans quelle mesure les résultats précédents (et ceux qui vont suivre), valables dans le cas analytique-complexe, peuvent-ils fournir des renseignements sur ce qui se passe dans le réel ?

4. Homotopie et approximation de sections.

THÉORÈME 2. - Soit F un espace E-principal analytique, dont la base X est holomorphiquement complète. Si deux sections holomorphes de F sont homotopes dans l'espace des sections continues de F, elles sont aussi homotopes dans l'espace des sections holomorphes de F.

THÉORÈME 3. - Soit F un espace E-principal analytique, dont la base X est holomorphiquement complète ; soit U un ouvert de X, et supposons que U soit X-convexe (ceci signifie que, pour tout compact $K \subset U$, l'ensemble $\bar{K}_X$ des $x \in U$ tels que $|f(x)| \leq \sup_{j \in K} |f(y)|$ pour toute f holomorphe dans X, est compact. Il est classique que si U est X-convexe, toute fonction holomorphe dans U est limite, uniformément sur tout compact de U, de fonctions holomorphes dans X). Si une section holomorphe $s : U \to F$ peut être arbitrairement approchée (dans l'espace topologique des sections continues $U \to F$) par la restriction à U de sections continues $X \to F$, alors s peut être arbitrairement approchée par la restriction à U de sections holomorphes $X \to F$.

Les théorèmes 2 et 3 ont un intérêt même lorsque $F = E$ et que E est un produit $X \times \Gamma$. Par exemple, le théorème 3 exprime que l'obstruction à l'approximation d'une application holomorphe $U \to \Gamma$ par des applications holomorphes $X \to \Gamma$ est de nature purement topologique.

Les théorèmes 1, 2 et 3 se démontrent tous ensemble. On peut leur apporter un renforcement substantiel ; introduisons un sous-espace analytique Y de l'espace X (X étant toujours supposé holomorphiquement complet) ; alors, E et F ayant la même signification que ci-dessus, on a :

THÉORÈME 1 bis. - Soit $f : X \to F$ une section continue du fibré F, telle que la restriction $g : Y \to F$ soit holomorphe. Alors, dans l'espace de toutes les sections continues $X \to F$ qui prolongent g, f est homotope à une section holomorphe $X \to F$.

(COROLLAIRE. - Si une section holomorphe $g : Y \to F$ peut être prolongée en une section continue $X \to F$, elle peut aussi être prolongée en une section holomorphe $X \to F$. Ceci généralise un résultat connu dans le cas où il s'agit de fonctions holomorphes à valeurs scalaires).

THÉORÈME 2 bis. - Soient $f, f' : X \to F$ deux sections holomorphes qui sont égales sur Y ; soit g leur restriction commune à Y. Supposons que f et f' soient homotopes dans l'espace de toutes les sections continues $X \to F$ qui prolongent g : alors f et f' sont homotopes dans l'espace de toutes les sections holomorphes $X \to F$ qui prolongent g.

THÉORÈME 3 bis. - Soit U un ouvert X-convexe de X ; soit $f : U \to F$ une section holomorphe, et soit $g : Y \to F$ une section holomorphe telle que f et g coïncident sur $Y \cap U$. Si f peut être arbitrairement approchée par des sections continues $X \to F$ qui prolongent g, alors f peut être arbitrairement approchée par des sections holomorphes $X \to F$ qui prolongent g.

Du corollaire au théorème 1 bis, on déduit :

THÉORÈME 4. - Soit F un fibré analytique principal dont la base X est holomorphiquement complète, et soient $f, f' : X \to F$ deux sections holomorphes ; si f et f' sont homotopes dans l'espace des sections continues $X \to F$, il existe une application holomorphe $s : X \times I \to F$ telle que :

$$s(x,0) = f(x), \quad s(x,1) = f'(x), \quad p(s(x,t)) = x$$

(p désignant la projection $F \to X$). Autrement dit, on obtient une homotopie entre f et f' qui dépend analytiquement du paramètre $t \in I$.

5. Indications sur les démonstrations.

Ce ne sont que des indications très succintes, qui ne permettent pas de se faire une idée véritable des difficultés techniques à surmonter ; elles sont considérables.

Tout d'abord, les théorèmes 1 bis, 2 bis et 3 bis résultent assez facilement d'un théorème technique ("théorème principal" ci-dessous) ; avant de l'énoncer, quelques explications sont utiles. Le fibré analytique E (dont les fibres sont des groupes de Lie), de base X, est donné une fois pour toutes, ainsi que le sous-espace analytique $Y \subset X$. Pour chaque ouvert $U \subset X$, notons $\mathcal{G}^c(U)$ le groupe de toutes les sections continues $U \to E$ qui sont neutres en tout point de $Y \cap U$ (c'est-à-dire dont la valeur est l'élément neutre de la fibre située au-dessus du point considéré de $Y \cap U$) ; $\mathcal{G}^c(U)$ est un groupe topologique, pour la topologie de la convergence compacte. Notons $\mathcal{G}^a(U)$ le sous-groupe de $\mathcal{G}^c(U)$, formé des sections holomorphes $U \to E$ qui sont neutres sur $Y \cap U$; $\mathcal{G}^a(U)$ est un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}^c(U)$.

Soit maintenant K un espace compact auxiliaire (espace d'un paramètre $t \in K$). Une application continue $\varphi : K \to \mathcal{G}^c(U)$ n'est pas autre chose qu'une application continue $(x,t) \longrightarrow s(x,t)$ de $U \times K$ dans E telle que

$$p(s(x,t)) = x \qquad\qquad s(x,t) \text{ neutre pour } x \in Y \cap U .$$

Soient de plus donnés deux sous-espaces fermés $N \subset H$ de K ; on appellera (N,H,K)-application dans $\mathcal{G}^c(U)$ une application continue $\varphi : K \to \mathcal{G}^c(U)$ telle que

1) pour chaque $t \in N$, $\varphi(t)$ est la section neutre ;
2) pour chaque $t \in H$, $\varphi(t) \in \mathcal{G}^a(U)$, c'est-à-dire est une section holomorphe.

Les (N,H,K)-applications dans $\mathcal{G}^c(U)$ forment un groupe topologique $\mathcal{F}(U)$. Lorsque U parcourt l'ensemble des ouverts de X, les groupes $\mathcal{F}(U)$ forment un préfaisceau sur X : on notera $\mathcal{F}$ le faisceau de groupes associé. Il est clair que le groupe des sections $H^0(U,\mathcal{F})$ s'identifie naturellement à $\mathcal{F}(U)$, donc a une structure de groupe topologique.

THÉORÈME PRINCIPAL. - Supposons que X soit holomorphiquement complet, et que N soit retracte de déformation de K. Alors :

(i) le groupe topologique $H^0(X,\mathcal{F})$ est connexe par arcs.
(ii) si U est un ouvert X-convexe de X, l'image de l'application $H^0(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(U,\mathcal{F})$ est dense dans $H^0(U,\mathcal{F})$;
(iii) $H^1(X,\mathcal{F}) = 0$.

Considérons le cas où K est le segment $[0,1]$, $H = \{0,1\}$, $N = \{0\}$. Dans ce cas, le théorème principal entraîne les théorèmes 1 bis, 2 bis et 3 bis ; d'une façon précise, l'assertion (i) entraîne le théorème 2 bis, l'assertion (iii) entraîne le théorème 1 bis ; enfin, le théorème 1 bis et l'assertion (ii) entraînent le théorème 3 bis.

Quant au théorème principal, il se démontre par une triple récurrence qu'il est impossible d'expliquer ici sans entrer dans des détails trop techniques. L'un des pas de la récurrence exige que le pas précédent soit valable non point pour les compacts $N \subset H \subset K$ considérés, mais pour d'autres ; ceci explique pourquoi il serait impossible de démontrer le théorème principal si on ne voulait considérer, par exemple, que le cas où $K = [0,1]$, $H = \{0,1\}$, $N = \{0\}$.

Mais, pour pouvoir faire la récurrence en question, on a besoin d'avoir préalablement prouvé deux propositions auxiliaires ; avant de les énoncer, précisons un point de terminologie. Un compact $A \in X$ sera dit <u>spécial</u> s'il existe un nombre fini de fonctions f_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ holomorphes dans X, telles que l'application $f : X \to C^k$ définie par les f_j induise un <u>isomorphisme</u> d'un voisinage de A (voisinage considéré comme espace analytique) sur un sous-espace analytique W d'un voisinage d'un <u>cube</u> B de C^k défini par des inégalités $a_j \leqslant \mathrm{Re}(z_j) \leqslant b_j$, $a'_j \leqslant \mathrm{Im}(z_j) \leqslant b'_j$ (z_j étant la j-ième coordonnée dans C^k), f appliquant A sur l'intersection $W \cap B$. D'autre part, dans cette situation, soit c un nombre réel tel que $a_1 \leqslant c \leqslant b_1$; soit B' l'ensemble des points du cube B tels que $x_1 \leqslant c$, B'' l'ensemble des points de B tels que $x_1 \geqslant c$; alors B', B'' et $B' \cap B''$ sont des cubes, et $B = B' \cup B''$. Posons $A' = A \cap B'$, $A'' = A \cap B''$; les compacts A', A'' et $A' \cap A''$ sont <u>spéciaux</u>, et $A = A' \cup A''$; un tel système (A, A', A'') s'appellera une <u>configuration spéciale</u>.

PROPOSITION 1. - <u>Soit</u> X <u>un espace holomorphiquement complet, et soit</u> $A \subset X$ <u>un compact spécial. Définissons le groupe topologique</u> $H^0(A, \mathfrak{F})$ <u>comme la limite inductive des groupes topologiques</u> $H^0(U, \mathfrak{F})$ <u>relatifs aux ouverts de</u> U <u>contenant</u> A. <u>Alors l'image de l'application</u> $H^0(X, \mathfrak{F}) \to H^0(A, \mathfrak{F})$ <u>est dense dans tout un voisinage de l'élément neutre de</u> $H^0(A, \mathfrak{F})$.

L'idée qui préside à la démonstration de la proposition 1 est la suivante : au fibré E dont les fibres sont des <u>groupes de Lie</u> on associe un fibré $A(E)$ dont les fibres sont les <u>algèbres de Lie</u> des fibres de E ; c'est un fibré analytique à fibres vectorielles. De plus l'application exponentielle (qui, pour tout groupe de Lie Γ, est une application de l'algèbre de Lie $A(\Gamma)$ dans Γ) définit une application

$$\exp : A(E) \to E ,$$

qui est un <u>isomorphisme</u> d'un voisinage de la section nulle de $A(E)$ sur un voisinage de la section neutre de E (isomorphisme au sens des fibrés analytiques).

On peut donc, pour étudier les sections de E assez voisines de la section neutre, étudier les sections de $A(E)$ assez voisines de la section nulle. Ceci permet d'utiliser la théorie des faisceaux analytiques cohérents : en effet, le faisceau des germes de sections holomorphes d'un fibré analytique à fibres vectorielles est cohérent.

PROPOSITION 2. - Soit (A,A',A'') une configuration spéciale. Alors tout élément $f \in H^0(A' \cap A'', \mathfrak{F})$ suffisamment voisin de l'élément neutre, peut se mettre sous la forme $f = f'.f''^{-1}$, où $f' \in H^0(A', \mathfrak{F})$, $f'' \in H^0(A'', \mathfrak{F})$.

Cette proposition généralise le lemme connu sur les matrices holomorphes inversibles ([1] et [3]). Pour la démontrer, on a d'abord besoin du lemme sur les matrices, et ensuite d'une astuce de GRAUERT qu'on va expliquer maintenant. Il s'agit, $f(x,t)$ étant donnée, de trouver $f'(x,t)$ et $f''(x,t)$ satisfaisant à $f(x,t) = f'(x,t)(f''(x,t))^{-1}$ pour x voisin de $A' \cap A''$, $t \in K$. On va chercher d'abord $f'(x,t)$ et $f''(x,t)$ pour $t \in H$; alors f' doit être une application continue de H dans l'espace des sections holomorphes du fibré E au-dessus d'un voisinage de A', neutres sur Y, et cette application f' doit être neutre pour $t \in N$; de même pour f''. La recherche de deux telles applications f et f' telles que $f = f'.f''^{-1}$ s'appellera désormais le "problème fondamental" ; une fois qu'il sera résolu, il sera facile de prolonger f' et f'' pour les valeurs de $t \in K$. N'oublions pas que f est supposée assez voisine de la section neutre de E ; il existe donc une section $a(x,t)$ di fibré vectoriel $A(E)$, telle que $\exp a(x,t) = f(x,t)$; $a(x,t)$ est holomorphe en x au voisinage de $A' \cap A''$, et est nulle pour $t \in N$ et pour $x \in Y$. Soit u un paramètre réel $(0 \leq u \leq 1)$, et considérons la section $u.a(x,t)$ (produit de $a(x,t)$ par le scalaire u, pour la structure vectorielle de $A(E)$). Soit

$$f(x,t,u) = \exp\,(u.a(x,t)) \;;$$

on a $\frac{\partial f}{\partial u} = a(x,t).f(x,t,u)$, et $f(x,t,0)$ est neutre ; notons $\lambda(x,t,u)$ la transformation linéaire de l'algèbre de Lie (fibre de $A(E)$ située au-dessus de x) définie par l'automorphisme intérieur de la fibre de E que définit l'élément $f(x,t,u)$ de cette fibre. Supposons qu'on ait trouvé des sections $a'(x,t,u)$ (resp. $a''(x,t,u)$) de $A(E)$, holomorphes en x au voisinage de A' (resp. de A''), nulles pour $t \in N$ et pour $x \in Y$, et telles que l'on ait

(2) $\qquad a'(x,t,u) = a(x,t) + \lambda(x,t,u).a''(x,t,u)$ pour x voisin de $A' \cap A''$.

Alors, par intégration des équations

$$\frac{\partial f'}{\partial u} = a'(x,t,u).f'(x,tu), \quad \frac{\partial f''}{\partial u} = a''(x,t,u).f''(x,t,u),$$

avec les conditions initiales

$$f'(x,t,0) = \text{section neutre}, \quad f''(x,t,0) = \text{section neutre},$$

on trouve des sections $f'(x,t,u)$ et $f''(x,t,u)$ du fibré E , holomorphes en x au voisinage de A' (resp. de A''), neutres pour $t \in N$ et pour $x \in Y$, et qui satisfont à

$$f'(x,t,u) = f(x,t,u).f''(x,t,u) \quad \text{pour } x \text{ voisin de } A' \cap A'' .$$

Il suffit alors de faire $u = 1$ pour obtenir les sections cherchées $f'(x,t)$ et $f''(x,t)$, ce qui résout le "problème fondamental".

On voit qu'on est ramené à un problème concernant le fibré vectoriel $A(E)$: trouver $a'(x,t,u)$ et $a''(x,t,u)$ satisfaisant à (2). Ce problème se résout grâce à la théorie des faisceaux cohérents d'une part, et au lemme sur les matrices holomorphes inversibles d'autre part.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri). - Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 19, 1940, p. 1-26.

[2] CARTAN (Henri). - Article à paraître dans les Comptes-rendus du Symposium de Mexico d'août 1956.

[3] FRENKEL (Jean). - Un théorème sur les matrices holomorphes inversibles. - Séminaire Cartan, t. 4, 1951/52 (Exposé n° 17).

[4] FRENKEL (Jean). - Sur une classe d'espaces fibrés analytiques, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 236, 1953, p. 40-41 ; Sur les espaces fibrés analytiques complexes de fibre résoluble, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 241, 1955, p. 16-19 ; voir aussi : Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, Bull. Soc. math. France, t. 8, 1957, p. 135 - 220 ,(Thèse Sc. math. Paris. 1957).

[5] GRAUERT (Hans). - Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume, Math. Annalen, t. 129, 1955, p. 233-259.

[6] GRAUERT (Hans). - Généralisation d'un théorème de Runge et application à la théorie des espaces fibrés analytiques, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 242, 1956, p. 603-605.

[7] GRAUERT (Hans). - Approximationssätze und analytische Faserräume, Math. Annalen (à paraître).

[8] HIRZEBRUCH (Friedrich). - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. - Berlin, Springer, 1956 (Ergebnisse der Math., neue Folge, Heft 9).

[9] SERRE (Jean-Pierre). - Applications de la théorie générale à divers problèmes globaux. - Séminaire Cartan, t. 4, 1951/52 (Exposé n° 20).

[Mis à jour en juin 1957]