Armand Borel

Travaux de Mostow sur les espaces homogènes

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. nº 142, p. 73-84
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__73_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1957)

TRAVAUX DE MOSTOW SUR LES ESPACES HOMOGÈNES

par Armand BOREL

Les travaux discutés ci-dessous concernent principalement la topologie des espaces homogènes de groupes de Lie non compacts, et apportent aussi quelques résultats sur les groupes.

$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, etc., désigne l'algèbre de Lie du groupe de Lie G, U, K, L, etc.

G sera toujours un groupe de Lie connexe, U un sous-groupe fermé de G. $\mathrm{Ad}\, g$ $(g \in G)$ désigne l'automorphisme intérieur $x \to gxg^{-1}$ ou l'automorphisme correspondant de $\mathfrak{g}$, et $\mathrm{Ad}\, \mathfrak{g}$ est le groupe engendré par les $\mathrm{Ad}\, g$.

$G = A_1 \dots A_k$ signifie que les A_i sont des sous-espaces de G contenant e et que $(a_1, \dots, a_k) \to a_1 \times \dots \times a_k$ est un homéomorphisme ; $\sim$ signifie homéomorphe.

1. Gnoupe d'isotropie connexe.

Rappelons le théorème de E. Cartan-Iwasawa-Malčev ; G possède des sous-groupes compacts maximaux ; ils sont conjugués par automorphismes intérieurs. Si K est l'un d'eux, $G \sim K \times R^s$; enfin, tout sous-groupe compact est contenu dans un sous-groupe compact maximal. Supposons U connexe, donc $U \sim L \times R^t$ où L est compact maximal dans U et soit K un sous-groupe compact maximal de G contenant L. A l'aide des fibrations $(G/L , G/U , U/L)$ et $(G/L , G/K , K/L)$ on voit tout de suite que $s \geqslant t$ et que G/U a même homotopie que $K/L \times R^{s-t}$, et on montre aussi [5] que G/U admet une rétraction de déformation sur K/L. Cependant G/U n'est pas toujours homéomorphe au produit $K/L \times R^{s-t}$.

EXEMPLE. - G (resp. U) est le sous-groupe de $PL(n+1 , C)$ laissant fixe un point A (resp. 2 points A, B) de l'espace projectif complexe $P(n , C)$. Alors G est transitif sur $P(n , C) - A$, qui s'identifie à G/U. Ce dernier possède une classe d'homologie dont la self-intersection est non nulle (celle d'un hyperplan) et ne peut par suite être produit d'un R^n par un compact. Le "Mémoire" [5] a pour principal but de montrer que, sous certaines hypothèses concernant U, G/U est fibré de fibre R^{s-t}, base K/L.

On dira qu'un sous-ensemble S de G est exponentiel s'il existe des sous-espaces

$\mathfrak{v}_i$ $(1 \leq i \leq k)$ linéairement indépendants de $\mathfrak{g}$ tels que l'application continue φ : $(v_1, \ldots, v_k) \to \exp v_1 \times \ldots \times \exp v_k$, $(v_i \in \mathfrak{v}_i)$ soit une bijection de $\mathfrak{v}_1 + \ldots + \mathfrak{v}_k$ sur S. Si $\mathrm{Ad}\, g$ laisse les $\mathfrak{v}_i$ invariants, alors il invarie aussi S vu la relation $\exp \mathrm{Ad}\, g(x) = \mathrm{Ad}\, g(\exp x)$. On dira que S est invariant par g.

Soient $\mathfrak{g}$ semi-simple non compacte, $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre compacte maximale (i.e. engendrant un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{Ad}\, \mathfrak{g}$). On sait que la restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{k}$, (resp. à son complément orthogonal $\mathfrak{e}$) est négative (resp. positive) non dégénérée, que dans une base convenable $\exp \mathfrak{e}$ est l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathrm{Ad}\, \mathfrak{g}$, et que $\theta : k + e \to k - e$ est un automorphisme de $\mathfrak{g}$. On dira qu'une sous-algèbre $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ est self-adjointe si elle est invariante par une involution conjuguée à θ dans $\mathrm{Ad}\, \mathfrak{g}$. MOSTOW montre [4] qu'une sous-algèbre semi-simple est toujours self-adjointe ; il s'ensuit que $\mathfrak{s}$ est self-adjointe si et seulement si elle est réductive dans $\mathfrak{g}$. Une sous-algèbre $\mathfrak{s}$ d'une algèbre non nécessairement semi-simple $\mathfrak{g}$, de radical $\mathfrak{r}$ est dite <u>self-adjointe modulo le radical</u> si $\mathfrak{s} + \mathfrak{r}/\mathfrak{r}$ est self-adjointe dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$.

THÉORÈME 1. - <u>Soient</u> U <u>connexe,</u> $K \supset L$ <u>des sous-groupes compacts maximaux de</u> G <u>et</u> U <u>et supposons</u> $\mathfrak{u}$ <u>self-adjointe modulo le radical de</u> $\mathfrak{g}$. <u>Alors</u> G <u>possède des ensembles exponentiels</u> F, E <u>invariants par</u> L, <u>tels que</u> $G = K.F.E$, $U = L.E$.

(Voir paragraphe n° 3). Il est immédiat que l'application $\psi : (k, f) \to k.f.U$ induit un homéomorphisme du quotient $K \times_L F$ de $K \times F$ par la relation d'équivalence $(k, f) \approx (k, x, x^{-1}fx)$ sur G/U et que ψ commute aux translations à gauche de K ; comme $K \times_L F$ est fibré de fibre F, base K/L, de groupe structural L opérant sur F par la représentation adjointe, il en résulte le

COROLLAIRE 1. - G/U <u>est fibré de fibre</u> F, <u>base</u> K/L. <u>Les translations à gauche de</u> K <u>respectent cette fibration et en permutent transitivement les fibres.</u>

Le théorème 1, appliqué au cas $U = (e)$ montre que la fibration de G par K admet une section qui est un ensemble exponentiel invariant par K. On en tire facilement que si K, K' sont des sous-groupes compacts maximaux de G et M, M' des sous-ensembles de K et K' appliqués l'un sur l'autre par un automorphisme (resp. intérieur) α de G, alors il existe un automorphisme (resp. intérieur) β tel que $\beta(K) = K'$ et $\beta(m) = \alpha(m)$ pour $m \in M$.

THÉORÈME 2. - Soient $G = K'.F'.E'$, $U = L'.E'$ une deuxième décomposition analogue à celle du théorème 1 . Alors il existe un isomorphisme de la fibration $(G/U , K/L , F)$ sur la fibration $(G/U , K'/L' , F')$.

Le résultat énoncé avant le théorème 2 permet de se ramener au cas où $K = K'$, $L = L'$. On remarque ensuite que les bijections des sous-espaces $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ de $\mathfrak{g}$ qui engendrent F , F' sur le quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{k} + \mathfrak{e}$ (où $\mathfrak{e}$ est le sous-espace engendrant E) commutent à $\mathrm{Ad}\, L$, d'où un homéomorphisme de F sur F' commutant avec $\mathrm{Ad}\, x$, $(x \in L)$ et un isomorphisme de $K \times_L F$ sur $K \times_L F'$. (En fait, [5] établit un théorème d'unicité un peu plus fort).

2. Espaces homogènes acycliques.

THÉORÈME 3. - Tout espace homogène acyclique (i.e. dont tous les groupes d'homotopie sont nuls) d'un groupe de Lie est homéomorphe à un espace euclidien.

Vu ce qui a été dit au début du paragraphe 1, G/U est acyclique si et seulement si U est connexe et contient un sous-groupe compact maximal de G . Comme on peut sans restreindre la généralité supposer G simplement connexe, on a à montrer que si G est simplement connexe, U connexe, et si U contient un sous-groupe compact maximal K de G , alors G/U est homéomorphe à R^n .

(a). G simple. Le théorème se vérifie directement lorsque G est le revêtement universel de $SL(2 , R)$. Supposons $\dim G \neq 3$. Alors K est semi-simple et $\neq (e)$ Soit $\mathfrak{k}^*$ une sous-algèbre compacte maximale de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{k}$. Il est connu que l'on a alors $\mathfrak{k}^* = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$., $[\mathfrak{k} , \mathfrak{p}] = 0$, $\dim \mathfrak{p} = 0 , 1$ et que $\mathfrak{k}^*$ engendre dans G un sous-groupe analytique maximal K^* , égal à son normalisateur ; donc si $U \supset K^*$, alors $U = K^*$ et G/U s'identifie au quotient de $\mathrm{Ad}\, \mathfrak{g}$ par un sous-groupe compact maximal, donc à un espace euclidien. Si $\mathfrak{p} \neq 0$, il peut se produire que $\mathfrak{u} \neq \mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}^*$, mais dans ce cas on montre que $\mathfrak{u}$ est self-adjointe, donc que, dans les notations du théorème 1 , G/U s'identifie à F .

(b). Dans le cas général, on procède par récurrence sur la paire $(\dim G , \dim G/U)$ Soit V un sous-groupe analytique maximal propre de G contenant U ; il est fermé car sinon il serait dense dans G , donc invariant et l'on sait qu'un sous-groupe analytique invariant d'un groupe simplement connexe est fermé. Si $V \neq U$, on applique l'hypothèse d'induction à G/V et V/U et le théorème de Feldbau à la fibration $(G/U , G/V , V/U)$; sinon soit N un sous-groupe analytique invariant propre maximal de G : vu (a) on peut le supposer $\neq (e)$. On a soit $G = NU$, soit $N \subset U$, donc soit $G/U \sim N/N \cap U$ soit $G/U \sim (G/N)/(U/N)$ et l'on peut appliquer l'hypothèse d'induction.

3. Indications sur le théorème 1 .

$\mathfrak{p}$ (resp. P) est l'espace des matrices symétriques réelles (resp. et positives non dégénérées) d'ordre n fixé. C'est l'espace homogène symétrique de $SL(n , R)$ qui y opère par U_x : $p \to {}^t x.p.x$, $(x \in SL(n , R)$, $p \in P)$, en respectant la métrique riemannienne définie par $g(X_p , X_p) = Tr(p^{-1}.X_p)^2$, $(p \in P$, X_p vecteur tangent en p). On démontre, soit par la théorie générale des espaces symétriques soit par des calculs élémentaires directs [4], que cette métrique a les propriétés suivantes : deux points A , B sont reliés par une unique géodésique, égale à $\exp(t \log A)$ si $B = Id$: la différentielle en 0 de l'application exponentielle fait correspondre la métrique, définie sur $\mathfrak{f}$ par la trace, à g ; étant donné un triangle géodésique de sommets A , B , C , on a

$$(3.1)\quad d(B , C)^2 \geqslant d(A , C)^2 + d(A , B)^2 - 2d(A , B).d(A , C) \cos \Delta(\overline{AB} , \overline{AC})$$

($d(X , Y)$ désignant la longueur de la géodésique $\overline{XY}$ joignant X à Y) .

PROPOSITION 1. - Soit $E = \exp \mathfrak{e}$ $(\mathfrak{e} \subset \mathfrak{p})$, un sous-espace de P tel que u , $v \in E$ entraîne $uvu \in E$ et soit $\mathfrak{f}$ le complément orthogonal de $\mathfrak{e}$ relativement à la trace. Alors

$$\varphi : \quad (x , y) \to \exp x.\exp y.\exp x$$

est un homéomorphisme de $\mathfrak{e} \times \mathfrak{f}$ sur P .

Si $efe = e'f'e'$, on tire de ce qui précède que le triangle géodésique (efe , e^2 , e'^2) a en e^2 et e'^2 deux angles droits, d'où, vu (3.1) , $e^2 = e'^2$ et $e = e'$, $f = f'$; ainsi φ est injective, donc ouverte puisque $\mathfrak{e} \times \mathfrak{f}$ et P sont des variétés de même dimension. En considérant le triangle géodésique (efe , e^2 , Id) on voit aussi que $d(efe , Id) \geqslant d(e^2 , Id)$, $d(f , Id)$ ce qui entraîne que φ est fermée, d'où la proposition.

En utilisant les résultats rappelés dans l'alinéa qui précède l'énoncé du théorème 1 , on démontre alors sans peine le théorème 1 , lorsque G est semi-simple. Dans le cas général on procède par récurrence sur la dimension du radical de G ; cela va tout seul si ce dernier contient un tore invariant, mais sinon une nouvelle difficulté se présente du fait que étant donné un sous-groupe invariant vectoriel V de G , il n'est pas sûr que U.V soit fermé ou bien self-adjoint modulo le radical. On ne cherchera pas à reproduire ici la démonstration très technique et on se bornera à signaler qu'elle s'appuie notamment sur le lemme suivant : Soient G non semi-simple, U fermé connexe tel que G soit égal à l'adhérence de UV pour tout sous-groupe analytique normal commutatif. Alors il existe un tel sous-groupe, soit W, tel que $G = UW$.

REMARQUES. - 1) la condition imposée à E dans la proposition 1 équivaut à chacune des suivantes : 1° E est totalement géodésique, 2° $x , y \in \mathcal{E}$ entraîne $[x,[x, y]] \in \mathcal{E}$; 3° $x , y , z \in \mathcal{E}$ entraîne $[x,[y, z]] \in \mathcal{E}$ (i.e. $\mathcal{E}$ est un système de Lie triple), (voir [4], théorème 2).

2. (3.1) est le point crucial dans la démonstration de la conjugaison des sous-groupes compacts maximaux d'un groupe semi-simple. Les calculs de [4] permettent ainsi d'en donner une démonstration indépendante de la théorie des espaces symétriques.

4. G résoluble. G/U compact.

NOTATIONS. - G est dorénavant résoluble. N où N_G désigne le sous-groupe analytique engendré par le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. H' est le groupe des commutateurs, et H^* l'intersection des termes $C^i H$ de la série centrale descendante (i.e. $C^i H = [H , C^{i-1} H]$, $C^0 H = H$), du groupe de Lie H. Un sous-groupe S de G est uniforme si $G/\bar{S}$ est compact. U_o est la composante connexe de e de U.

Un espace homogène d'un groupe résoluble connexe peut toujours se représenter comme un quotient G/U où G est simplement connexe, U sans sous-groupe $\neq (e)$ analytique invariant dans G, et $U_o \subset G'$, comme on le voit aisément. Sauf mention expresse du contraire, on supposera ces conditions remplies. Lorsque G est nilpotent et U uniforme MALČEV [1] a montré que $\pi_1(G/U)$ détermine complètement G/U et aussi G. Comme le groupe des déplacements de plan opère transitivement sur le tore à 3 dimensions, la deuxième partie de ce résultat n'est pas vraie pour G résoluble, mais un des principaux objectifs de [3] est de montrer le

THÉORÈME 4. - Soient G_1, G_2 résolubles simplement connexes, U_1, U_2 des sous-groupes fermés uniformes tels que $\pi_1(G_1/U_1) = \pi_1(G_2/U_2)$. Alors G_1/U_1 et G_2/U_2 sont homéomorphes. Si $\pi_1(G_1/U_1)$ est commutatif, G_1/U_1 est un tore.

D'après le paragraphe 1, G_i/U_{io} est homéomorphe à un espace euclidien, donc est un espace universel pour $U_i/U_{io} = \pi_1(G_i/U_i)$, et il résulte de théorèmes standard de la théorie des espaces fibrés que G_1/U_1 et G_2/U_2 ont même type d'homotopie. Cela vaut évidemment que U_1 et U_2 soient uniformes ou non et le théorème 4 affirme donc que ces deux espaces classifiants pour U_1/U_{1o} sont homéomorphes lorsqu'ils sont compacts. La démonstration s'appuie surtout sur les deux lemmes suivants :

LEMME 1. - Soient D_1, D_2 deux groupes de Lie, $\alpha : D_1 \to D_2$ un isomorphisme, E_i un espace universel pour D_i tel que E_i/D_i soit homéomorphe à un tore. Alors il existe un homéomorphisme f de E_1 sur E_2 "équivariant", c'est-à-dire vérifiant $f(x.d) = f(x)\,\alpha(d)$, $(x \in E_1\,,\ d \in D_1)$

En effet, E_1/D_1 et E_2/D_2 sont des tores de même dimension, car cette dernière est déterminée par la cohomologie de D_1 (au sens de HOPF) ; il existe une application équivariante f' qui induise une équivalence d'homotopie $f'_o : E_1/D_1 \to E_2/D_2$ et f'_o est homotope à un homéomorphisme, comme on le voit tout de suite.

LEMME 2. - Soit S un sous-groupe uniforme fermé de G, sans sous-groupe analytique $\neq (e)$ invariant dans G. Alors SN est fermé, et $S_o \subset N$; le groupe $S \cap N$ est uniforme dans N, et S_o est invariant.

On ne donnera qu'une idée de la démonstration, qui est assez longue. On supposera G simplement connexe, car on se ramène immédiatement à ce cas. Il faut montrer que $H = (\overline{SN})_o$ est égal à N. Admettons que $H \neq N$; ainsi, H est invariant, non nilpotent, et H^* est $\neq (e)$ et invariant dans G. Posons $S_H = H \cap S$, $S_{H^*} = H^* \cap S$; ce sont des sous-groupes invariants de S. Du fait que SH/S est compact, on tire que S_H est uniforme dans H. Par ailleurs, on montre que $\mathrm{Ad}\, xn$ et $\mathrm{Ad}\, x$ $(x \in H\,,\ n \in N)$ ont la valeur propre 1 avec la même multiplicité, par conséquent :

(4.1) S_H contient des éléments réguliers de H tels que $\mathrm{Ad}\, s$ ait des valeurs propres arbitrairement voisines de 1.

De l'existence d'un élément régulier dans S_H, MOSTOW déduit que S_{H^*} est uniforme dans H^* ; d'après MALČEV [1], $S_{H^*} \cap H^{*'}$ est alors uniforme dans $H^{*'}$; par suite, $S_{H^*}.H^{*'}$ est fermé dans H^* et son quotient par sa composante neutre $(S_{H^*})_o\, H^* = M$ est un sous-groupe discret uniforme du groupe vectoriel H^*/M. Ce dernier est $\neq (e)$ car sinon on aurait $H^* = H^{*'}.S_{H^*}$ donc, puisque H^* est nilpotent, $S_{H^*} = H^*$, et S contiendrait un sous-groupe connexe invariant dans

G et non trivial. $S_{H^*}H^{*'}$ et H^*/M sont invariants par S ; par suite si Ad s a ses valeurs propres dans un voisinage convenable de 1 , celles qui correspondent à sa restriction à H^*/M sont égales à 1 . Mais si $\mathfrak{c}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}$, on a toujours $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{h}^* \subset \mathfrak{h}^{*'}$, donc pour s régulier, Ad s ne peut avoir de valeur propre 1 sur $\mathfrak{h}^* / \mathfrak{h}^{*'}$, d'où une contradiction avec (4.1) ; et la première assertion du lemme 2 ; la deuxième assertion résulte des faits suivants : $SN/S = N/S \cap N$ est compact ; dans un groupe nilpotent simplement connexe N , le plus petit sous-groupe analytique contenant un sous-groupe uniforme est N , et le normalisateur d'un sous-groupe analytique est connexe.

DÉMONSTRATION du théorème 4. - U_i/U_{i_o} est de type fini, et sans élément d'ordre fini car un homéomorphisme périodique de l'espace euclidien G_i/U_{i_o} a un point fixe (SMITH).

(a) U_i/U_{i_o} <u>est commutatif.</u> On écrira G , U pour G_1 , U_1 . En appliquant le lemme 2 et en utilisant les faits rappelés à fa fin de sa démonstration, on voit que NU/U_o est commutatif et que $NU/U_o = NU/N \times N/N_o$ avec NU/N discret. On considère alors un groupe vectoriel E de même dimension que G/U_o , et un isomorphisme α de NU/U_o sur un sous-groupe fermé de E ; le lemme 1 , applicable car G/NU est évidemment un tore, donne un homéomorphisme équivariant de G/U_o sur E , d'où un homéomorphisme de G/U sur $E/\alpha(U)$, qui, étant compact doit être un tore.

(b) <u>Cas général.</u> On utilisera les résultats suivants [1] :

(4.2) Soient M_1 , M_2 des groupes nilpotents de Lie simplement connexes, S_1 S_2 des sous-groupes fermés, P_1 (resp. P_2) , l'intersection des sous-groupes analytiques de M_1 (resp. M_2) , contenant S_1 (resp. S_2) . Alors P_1 et P_2 sont analytiques, S_1 et S_2 y sont uniformes et tout isomorphisme de S_1 sur S_2 se prolonge de façon unique en un isomorphisme de P_1 sur P_2 .

Soient N_1 , N_2 les sous-groupes invariants nilpotents maximaux de G_1 et G_2 et soit θ un isomorphisme de $\Delta_1 = U_1/U_{1_o}$ sur $\Delta_2 = U_2/U_{2_o}$. D'après le lemme 2 , U_iN_i est fermé dans G , et U_{i_o} invariant dans $U_i N_i$, donc G/U_{i_o} est fibré principal pour $U_i N_i/U_{i_o}$. Evidemment Δ_i normalise N_i/U_{i_o} .

Soient :

$$T_1 = \Delta_1 \cap N_1/N_{1_o} \cap \theta^{-1} (\Delta_2 \cap N_2/U_{2_o}) , \quad T_2 = \quad (T_1) .$$

T_i est invariant dans Δ_i . Soit Γ_{i_o} le sous-groupe analytique minimum de N_i/U_{i_o} contenant T_i , et soit θ^* l'unique isomorphisme de Γ_{1_o} sur Γ_{2_o} qui prolonge θ (cf. 4.2) ; comme Δ_i invarie T_i et N_i/U_{i_o} , il invarie aussi Γ_{i_o} et $\Gamma_i = \Delta_i$.

Γ_{i_o} est un groupe ; en utilisant la compacité de Γ_{i_o}/T_i on voit tout de suite qu'il est fermé et a Γ_{i_o} comme composante connexe de e . Montrons qu'en posant $\alpha(x , y) = \theta(x) . \theta^*(y)$ $(x \in \Delta_1 , y \in \Gamma_{1_o})$ on définit un isomorphisme de Γ_1 sur Γ_2 . Compte tenu de l'unicité dans (4.2), il suffit pour cela d'établir :

(4.3) $\quad \theta(\Delta_1 \cap \Gamma_{1_o}) = \Delta_2 \theta \Gamma_{2_o}$;

θ et θ^* coïncident sur $\Delta_1 \cap \Gamma_{1_o}$, et T_1 est invariant dans $\Delta_1 \cap \Gamma_{1_o}$, donc Γ_{1_o}/T_1 est un revêtement galoisien de $\Gamma_{1_o}/\Delta_1 \cap \Gamma_{1_o}$, de groupe $\Delta_1 \cap \Gamma_{1_o}/T_1$ qui doit ainsi être d'ordre fini. Si $\theta(\Delta_1 \cap \Gamma_{1_o})$ n'était pas contenu dans Γ_{2_o} on en déduirait l'existence d'un homéomorphisme périodique de l'espace euclidien, $(\bar{G}_2/U_{2_o})/\Gamma_{2_o}$ ce qui est absurde. Ainsi $\theta(\Delta_1 \cap \Gamma_{1_o}) \subset \Delta_2 \cap \Gamma_{2_o}$ et en raisonnant de même sur θ^{-1} , on obtient la première égalité de (4.3) . Vu (4.2), la restriction de θ à $\Delta_1 \cap \Gamma_{1_o}$ admet alors une extension qui applique Γ_{1_o} sur Γ_{2_o} , et qui doit coïncider avec θ^* puisque θ et θ^* sont égales sur le sous-groupe uniforme T_1 , d'où la deuxième partie de (4.3) .

On a $\Delta'_1 \subset \Delta_i \cap N_i/U_{i_o}$ et $\theta(\Delta'_1) = \Delta'_2$, donc $\Delta'_i \subset T_i$; comme Γ_{i_o} est invariant dans Γ_i , le groupe dérivé Γ'_i est contenu dans $\Delta'_i . \Gamma_{i_o}$ donc finalement dans $T_i . \Gamma_{i_o} = \Gamma_{i_o}$ et Γ_i/Γ_{i_o} est commutatif. Le quotient de G_i/U_{i_o} par Γ_{i_o} a Γ_i/Γ_{i_o} comme groupe fondamental, est compadt, et peut aussi se considérer comme le quotient de G_i par un sous-groupe fermé. C'est donc un tore d'après (a). D'après le lemme 1 , il existe un homéomorphisme équivariant (relativement à α) β de G_1/U_{1_o} sur G_2/U_{2_o} d'où un homéomorphisme de $(G_1/U_{1_o})/\Delta_1 = G_1/U_1$ sur $(G_2/U_{2_o})/\Delta_2 = G_2/U_2$ ce qui démontre le théorème.

5. G <u>résoluble</u>.

On dira qu'un sous-groupe fermé S de G est AC ("algebraically connectable" dans [3]) dans G s'il possède un sous-groupe R tel que $S = RS_0$ et que pour tout $x \in R$, Ad x soit dans la composante neutre de son enveloppe algébrique. Les propriétés suivantes de cette notion sont immédiates :

(5.1) S est AC dans G, si et seulement si son image réciproque dans le revêtement universel de G y est AC ;

(5.2) Si S est AC dans G, il l'est aussi dans tout sous-groupe analytique de G qui le contient.

L'exemple de la bouteille de Klein, qui est quotient d'un groupe résoluble d'après MOSTOW [2], montre que G/U n'est pas toujours produit d'un espace euclidien par un espace homogène compact. Toutefois, on a le

THÉORÈME 5. - *Soient* G *résoluble connexe,* U *un sous-groupe fermé de* G. *Alors* U *possède un sous-groupe* $\ddot{U}$ *d'indice fini, ayant même groupe des commutateurs que* U, *tel que* $G/\ddot{U}$ *soit produit d'un espace euclidien par un espace homogène compact d'un groupe résoluble. Si* U *est AC dans* G *(en particulier s'il est connexe) on peut prendre* $U = \ddot{U}$. *Si* U *est connexe, le facteur compact est un tore.*

La dernière assertion résulte de la 2e et du théorème 4, car si U est connexe, $\pi_1(G/U)$ est un quotient de $\pi_1(G)$, donc est commutatif. Supposons dorénavant G simplement connexe et soit F un sous-groupe analytique minimal contenant U ; le quotient G/F est un espace euclidien, donc (FELDBAU) $G/U \sim G/F \times F/U$ ainsi si U est uniforme dans F le théorème est démontré avec $U = \ddot{U}$; cela a lieu lorsque G ou F est nilpotent (4.2), mais n'est pas vrai en général, et pour parvenir au théorème 5, MOSTOW utilise une construction dont la discussion est fort longue, que l'on ne décrira ici que très superficiellement.

On dira qu'un sous-groupe S de G est gras (MOSTOW dit full) s'il n'est contenu dans aucun sous-groupe analytique propre de G. On montre sans difficulté ([3], p. 14) le :

LEMME 3. - *Si* S *est gras dans* G *et si* $S \cap G^*$ *est uniforme dans* G^* *alors* S *est uniforme dans* G.

La démonstration du théorème 5 repose sur le

LEMME 4. - *Soient* S *un sous-groupe fermé gras du groupe résoluble simplement connexe* F, *et* M *le sous-groupe analytique minimal de* F^* *contenant* $S \cap F^*$. *Alors on peut trouver un groupe résoluble simplement connexe* $\overline{G}$, *un sous-groupe* fermé $\bar{S}$ de $\bar{G}$, un sous-groupe analytique minimal $\bar{F}$ contenant $\bar{S}$ tels que :

(a) il existe un isomorphisme θ de $\bar{S}$ sur un sous-groupe d'indice fini de S ayant même groupe dérivé que S.

(b) $F/\theta(\bar{S}) \sim \bar{G}/\bar{S}$.

(c) $\mathfrak{f}^*$ s'identifie à une sous-algèbre de $\mathfrak{f}^{*'} + \mathfrak{m}$.

(d) Si S est AC dans F, on peut faire en sorte que $\theta(\bar{S}) = S$ et que S soit AC dans $\bar{G}$.

DÉMONSTRATION du théorème 5. - Soit F analytique minimal contenant U. On construit une suite G_i, F_i, U_i de groupes et d'homomorphismes $\theta_i : U_i \to U_{i-1}$ où $G_0 = G$, $F_0 = F$, $U_0 = U$, et où G_i, F_i, U_i est obtenu à partir de F_{i-1}, U_{i-1} par le lemme 4, en s'arrêtant au premier indice n tel que $\mathfrak{f}_n^* = \mathfrak{m}_n + \mathfrak{f}_n^{*'}$ ou que $\mathfrak{f}_n^* = 0$. Soit $\bar{U} = \theta_1.\theta_2 \dots \theta_n(U_n)$. Alors par récurrence on voit tout de suite que $G/\bar{U}$ est homéomorphe au produit des espaces euclidiens G_i/F_i $(0 \leq i \leq n)$ par F_n/U_n. Si $\mathfrak{f}_n^* = e$, alors F_n est nilpotent et Γ_n/U_n est compact par 4.2. Sinon, du fait que F_n^* est nilpotent et de l'égalité ci-dessus on déduit que $F_n^* = M_n$ donc que $U_n \cap F_n^*$ est uniforme dans F_n^*, donc (lemme 3) que U_n est uniforme dans F_n et ainsi le dernier facteur est compact. Si U est AC dans G on utilise à chaque pas le lemme 4 (d) d'où la deuxième assertion.

INDICATIONS sur le lemme 4. - Soit J la composante connexe de e du normalisateur de $MF^{*'}$. On montre : $J \supset F'$, SJ est fermé uniforme dans F, $J \supset S_p$ et $S \cap N_F \subset J$.

JS/J est donc discret uniforme dans le groupe vectoriel F/J. Soient s_i, $(1 \leq i \leq d)$, tels que les classes $s_i\, JS/J$ forment une base de F/J et soit p_i le plus petit entier > 0 tel que $\mathrm{Ad}\, s_i^{p_i} = \exp D_i$ avec D_i dans l'algèbre de Lie de l'enveloppe algébrique de $\mathrm{Ad}\, s_i^{p_i}$, (ce qui existe visiblement). Identifions $\mathfrak{f}$ à une algèbre de Lie linéaire et soit $\mathfrak{f}_u$ son enveloppe algébrique. Alors on peut trouver $X_i \in \mathfrak{f}_u$ tel que $\mathrm{ad}\, X_i = D_i$. On définit une algèbre $\mathfrak{g}_1$ somme directe de $\mathfrak{j}$ et d'un sous-espace de base X_i^* $(1 \leq i \leq d)$ telle que l'application θ qui prolonge l'identité sur $\mathfrak{j}$ et applique X_i^* sur X_i soit un homomorphisme (cela est possible car $\mathfrak{f}_u' = \mathfrak{p}$ donc $\mathfrak{j} \supset \mathfrak{f}_u'$). Soient G_1 le groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$ et S_1 le sous-groupe engendré par $S \cap J$ et les $x_i^* = \exp X_i^*$. On montre ensuite que :

$$\varphi : x_1^{*n_1}, \dots, x_d^{*n_d} \times y \to x_1^{n_1} \times \dots \times x_d^{n_d} \times y \quad (y \in J)$$

est un homomorphisme de $S_1 J$ dans $S J$, injectif sur S_1 et envoyant ce dernier sur un sous-groupe d'indice fini de S, que $S_1 J$ et $S J$ sont fermés uniformes dans G_1 et F, que $G_1/S_1 J$ et $F/\varphi(S_1 J)$ sont des tores isomorphes, donc (lemme 1) que $G_1/S_1 \sim F/\varphi(S_1)$, et enfin que $\varphi(S_1 \cap N_{G_1}) \supset S \cap N$, ce qui entraîne $\varphi(S_1') = S'$. Si S est AC dans F, on peut choisir les s_i de manière à ce que $p_i = 1$ et alors $\varphi(S_1) = S$, et on montre aussi que S_1 est AC dans G_1. Ainsi toutes les conditions du lemme 4 sont vérifiées, excepté (c) ce qui oblige MOSTOW à refaire une construction analogue à partir du $J_1 = (\overline{S_1 N_1})_0$ Il parvient alors à des groupes $\overline{G}$, $\overline{S}$ vérifiant encore (a), (b), (d) mais où de plus $\overline{S}$ contient un élément régulier de $\overline{G}$. De là, il déduit l'existence d'un sous-groupe de Cartan C tel que $\overline{S} \subset C.M.F^{*'}$; comme C est nilpotente, il s'ensuit que si $\mathcal{F}$ est un sous-groupe analytique minimum de CMF^* contenant $\overline{S}$, alors $\mathcal{F}^*$ vérifie (c).

6. Errata et remarques.

Additif à la référence [3]. - Aux errata publiés dans mon analyse du Zentralblatt für Mathematik (1955), ajouter :

p. 15, lignes 8-14 du bas, remplacer θ par φ ;

p. 17, remplacer J par $\tilde{J}$ dans le (b) du théorème et à la 1re ligne de la démonstration ; dans le (d) remplacer S par $\tilde{S}$ et le dernier F^{∞} par $\tilde{F}^{\infty}$.

p. 13, il me semblerait plus correct de dire, au lieu de la ligne 8 : "Hence the image of P' in F/E is also the continuous image of the compact space $P'/E \cap P'$ and is therefore compact ; hence its inverse image EP' in P is closed". On peut raisonner de manière analogue à plusieurs endroits où MOSTOW utilise les théorèmes d'isomorphisme de E. NOETHER topologiquement ;

p. 22, proposition 2, insérer "solvable" après "connected".

Additif à la référence [4]. - Le théorème de la p. 51, qui est le point essentiel pour démontrer qu'une sous-algèbre semi-simple d'une algèbre semi-simple est self-adjointe, peut aussi se déduire du

LEMME. - Soit M un groupe compact d'automorphismes d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ laissant invariante une sous-algèbre compacte $\mathfrak{S}$. Alors M laisse invariante une sous-algèbre compacte maximale contenant $\mathfrak{S}$.

DÉMONSTRATION. - Soient $G = \mathrm{Ad}\, G$, K un sous-groupe compact maximal de G. Comme K est égal à son normalisateur tout $m \in M$ induit une permutation de G/K (dont on identifie chaque point à son groupe d'isotropie) et on voit tout de suite que m induit une isométrie de G/K relativement à la métrique définie par la forme de Killing. L'ensemble F des points fixes de S dans G/K est une sous-variété totalement géodésique, invariante par M, et ses points correspondent aux sous-groupes compacts maximaux de G contenant S. Muni de la métrique induite, F est une variété riemannienne simplement connexe, à courbure négative et M y admet un point fixe d'après l'astuce classique de Elie CARTAN, d'où le lemme.

Enfin p. 33, ligne 9 du bas, remplacer $\exp D/2$ par $(\exp \frac{D}{2} - \exp - \frac{D}{2})$.

<u>Additif à la référence [5].</u> -

p. 255, ligne 4, remplacer : "on the dimension of G" par "on the pair ($\dim G$, $\dim \mathbf{C}$)" ;

p.257, ligne 9, remplacer : $CR \neq R$ par CR/R ; ligne 13, remplacer G et H par G/R et HR/R ; ligne 19, remplacer : "Case 1" par "the induction assumption" ; ligne 22, remplacer E par E_1 ;

p. 258, ligne 16 du bas, remplacer C par $C \cap K$; ligne 15 du bas, remplacer $K = (MC).W_2$ par $v = W_1.W_2$ et K par V.

BIBLIOGRAPHIE

[1] MALČEV (A.I.). - Ob odnom klasse odnorodnykh prostranstv, Izvestija Akad. Nauk SSSR., Série math., t. 13, 1949, p. 9-32 ; On a class of homogeneous spaces, Amer. math. Soc. Translation, n° 39, 1951, 33 p.

[2] MOSTOW (G.D.). - The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces, Annals of Math., Series 2, t. 52, 1950, p. 606-636.

[3] MOSTOW (G.D.). - Factor spaces of solvable groups, Annals of Math., Series 2, t. 60, 1954, p. 1-27.

[4] MOSTOW (G.D.). - Some new decomposition theorems for semi-simple groups, Lie algebras and Lie groups. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Mem. Amer. math. Soc. n° 14); p. 31-54.

[5] MOSTOW (G.D.). - On covariant fiberings of Klein spaces, Amer. J. Math., t. 77, 1955, p. 247-278.