LAURENT SCHWARTZ

La fonction aléatoire du mouvement brownien

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. nº 161, p. 327-349
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__327_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1958)

LA FONCTION ALÉATOIRE DU MOUVEMENT BROWNIEN

par Laurent SCHWARTZ

1. Principes essentiels du calcul des probabilités.

Une loi de probabilité sur espace topologique localement compact X est une mesure de Radon $\mu \geqslant 0$ sur X, de masse totale 1. Si E est une partie de X, μ-mesurable, la mesure $\mu(E)$ de cette partie est appelée la probalité pour que $x \in X$ soit dans E ou probabilité de E suivant la loi μ, et se note $\mathcal{P}_{\mu}(x \in E)$ ou $\mathcal{P}_{\mu}(E)$.

De même qu'en algèbre il est souvent commode de supposer que tous les éléments qu'on considèrera dans une théorie ou dans un livre sont dans un même corps fourre-tout Ω (domaine universel; Ω est algébriquement clos ; et on n'introduit que des sous-corps de Ω, sur lesquels Ω est de degré de transcendance infinie), de même, en calcul des probabilités, il sera commode de supposer que tous les tirages au sort d'une théorie ou d'un livre sont réduits à un seul tirage au sort d'un élément ω d'un compact "assez gros" Ω, muni d'une loi de probabilité $d\omega$. Nous dirons plus loin ce que nous entendons par "assez gros". Alors :

a. Un évènement élémentaire est un point de Ω, on dira aussi que c'est une épreuve ou un tirage au sort. Un évènement est une partie de Ω. La probabilité de l'évènement est la mesure de cette partie.

b. Une variable aléatoire ξ sur un espace topologique X est une application, presque partout définie et mesurable, de Ω dans X.

Si X est localement compact, ξ définit une mesure image $\xi(d\omega)$, qui sera la loi de probabilité de ξ. Alors, si E est une partie de X, la probabilité pour que $\xi(\omega)$ soit dans E, soit $\mathcal{P}_{\xi(d\omega)}(E)$, existe si et seulement si $\mathcal{P}(\xi^{-1}(E))$ existe ; même si X n'est pas localement compact, et si par conséquent il n'y a pas de loi de probabilité de ξ, on pourra toujours définir $\mathcal{P}(\xi(\omega) \in E)$ comme $\mathcal{P}(\xi^{-1}(E))$.

Il arrivera, pratiquement toujours, que X soit contenu dans un compact $\hat{X}$, avec une topologie plus fine que la topologie induite. Alors ξ est a fortiori une variable aléatoire sur $\hat{X}$; mais elle a une loi de probabilité $\xi(d\omega)$ sur $\hat{X}$ qui se trouve concentrée sur X (et même en fait sur une réunion dénombrable de parties de X, compactes pour la topologie initiale de X). Pour toute partie E

de X, $\mathcal{P}(\xi(\omega) \in E)$ est alors bien $\mathcal{P}_{\xi(d\omega)}(E)$.

Deux variables aléatoires ξ_1, ξ_2, sur X, sont dites <u>équivalentes</u> si $\xi_1(\omega) = \xi_2(\omega)$ presque partout. On identifiera toujours deux variables équivalentes. Autrement dit, en toute rigueur, une variable aléatoire sur X est une classe d'applications mesurables de Ω dans X.

c. Soient X, Y, des espaces topologiques, et soit f une application continue de X dans Y.

Si ξ est une variable aléatoire sur X, son <u>image</u> par f, notée $f(\xi)$, sera par définition le variable aléatoire $f \circ \xi : \omega \to f(\xi(\omega))$, sur Y.

Si X et Y sont localement compacts, la loi de probabilité $(f(\xi))(d\omega)$ de $f(\xi)$ est l'image $f(\xi(d\omega))$ de la loi de probabilité de ξ. Ceci subsistera si, comme dans b, X et Y sont contenus dans des compacts $\hat{X}$, $\hat{Y}$, et si f se prolonge en une application continue $\hat{f}$ de $\hat{X}$ dans $\hat{Y}$.

d. Soient ξ_1, ξ_2 deux variables aléatoires sur le même espace topologique X. Si X est localement compact, ξ_1 et ξ_2 seront dites <u>semblables</u>, si elles ont même loi de probabilité : $\xi_1(d\omega) = \xi_2(d\omega)$. Cela revient à dire que, quelle que soit la partie E de X, $\mathcal{P}(\xi_1^{-1}(E))$ et $\mathcal{P}(\xi_2^{-1}(E))$ existent en même temps et sont égales ; ceci sera pris pour définition des variables semblables si X n'est pas localement compact. Si X est contenu dans un compact $\hat{X}$ comme dans b, ξ_1 et ξ_2 seront semblables sur X si et seulement si elles le sont sur $\hat{X}$, c'est-à-dire si $\xi_1(d\omega)$ et $\xi_2(d\omega)$ coïncident sur $\hat{X}$.

e. Deux variables aléatoires ξ, η, sur X, Y, respectivement, sont dites <u>indépendantes</u>, lorsque X et Y sont localement compacts, si la loi de probabilité de la variable produit (ξ, η) sur $X \times Y$ $(\omega \to (\xi(\omega), \eta(\omega))$ est le produit $\xi(d\omega) \otimes \eta(d\omega)$ des lois de ξ et de η. Cela revient à dire que, quels que soient $A \in \mathfrak{P}(X)$, $B \in \mathfrak{P}(Y)$, tels que $\mathcal{P}(\xi^{-1}(A))$ et $\mathcal{P}(\eta^{-1}(B))$ existent, $\mathcal{P}((\xi, \eta)^{-1}(A \times B))$ existe aussi et est égale à leur produit ; ce sera pris comme définition de l'indépendance si X et Y ne sont pas localement compacts. Si $X \subset \hat{X}$, $Y \subset \hat{Y}$, comme dans b, cela signifie que la mesure $(\xi, \eta)(d\omega)$ est égale au produit $\xi(d\omega) \otimes \eta(d\omega)$ sur $\hat{X} \times \hat{Y}$. Généralisation évidente au cas de l'indépendance d'une famille dénombrable de variables aléatoires.

On peut encore dire ceci. Deux évènements $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$, $B \in \mathfrak{P}(\Omega)$, sont dits indépendants si $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$ existent, et $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B)$. Alors

ξ et η sont indépendantes, si, quelles que soient les parties A et B de X et Y, telles que $\mathcal{P}(\xi^{-1}(A))$ et $\mathcal{P}(\xi^{-1}(B))$ existent, les évènements $\xi^{-1}(A)$, $\eta^{-1}(B)$, sont indépendants.

Des images (au sens de c) de variables indépendantes sont indépendantes. Si ξ_1, ξ_2 sont des variables semblables sur X, η_1, η_2, des variables semblables sur Y, et si ξ_1, η_1, sont indépendantes, de même que ξ_2, η_2, alors (ξ_1, η_1) et (ξ_2, η_2) sont-elles semblables sur $X \times Y$? C'est vrai si X et Y sont localement compacts, ou plus généralement contenus dans des compacts $\hat{X}$, $\hat{Y}$, comme dans b ; autrement, BOURBAKI n'en sait trop rien et refuse de la savoir.

f. Soit $(\xi_j)_{j \in J}$ une famille de variables aléatoires sur la même espace X, $\mathcal{F}$ un filtre sur J ; on dit que les variables ξ_j convergent presque sûrement suivant $\mathcal{F}$ vers une variable limite ξ sur X, si les applications ξ_j sont définies sur une même partie de Ω, de complémentaire négligeable, et si les $\xi_j(\omega)$ convergent presque partout vers $\xi(\omega)$.

On dit que les ξ_j convergent vers ξ, suivant $\mathcal{F}$, en probabilité, si X est un espace uniforme, et si, quel que soit l'entourage $\mathcal{U}$, et quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathcal{F}$ tel que, pour $j \in K$, $\mathcal{P}((\xi_j(\omega), \xi(\omega)) \notin \mathcal{U}) \leq \varepsilon$. Si X est localement compact, ou contenu dans un compact $\hat{X}$ comme dans b (et en supposant alors la structure uniforme de X plus fine que celle qui est induite par $\hat{X}$), la convergence en probabilité de ξ_j vers ξ entraîne la convergence vague de $\xi_j(d\omega)$ vers $\xi(d\omega)$ (parce que toute fonction continue à support compact sur X ou $\hat{X}$ est uniformément continue et bornée) ; si $\mathcal{F}$ est à base dénombrable, la convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité, donc, si X est localement compact ou $\subset \hat{X}$ compact, la convergence vague des lois.

g. Une variable aléatoire ξ est réelle si X est la droite réelle R. Alors $\xi(d\omega)$ est une loi de probabilité sur R.

Une telle variable est dite d'ordre $p \geqslant 1$ si ξ est dans L^p (relativement à la mesure $d\omega$). Alors

$$\|\xi\|_{L^p} = \|\xi\|_p = \left(\int |x|^p \, \xi(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}}$$

est la moyenne d'ordre p de ξ. Si $\xi \in L^1_\omega$, l'espérance mathématique $\mathcal{E}(\xi)$ est égale à $\int \xi(\omega)\, d\omega = \int x \, \xi(d\omega)$. Si deux variables ξ, η, d'ordre 2 sont indépendantes, on a $\mathcal{E}(\xi\eta) = \mathcal{E}(\xi)\,\mathcal{E}(\eta)$; en particulier, si ξ et η sont indépendantes et de moyenne nulle ($\mathcal{E}(\xi) = \mathcal{E}(\eta) = 0$), elles sont orthogonales au sens de la structure hilbertienne de l'espace L^2_ω des variables aléatoires réelles d'ordre 2 : $\mathcal{E}(\xi\eta) = 0$.

Nous pouvons maintenant spécifier ce que nous entendions en disant que l'espace Ω des épreuves était assez gros. Soit ξ_1 une variable aléatoire sur X ; existe-t-il une autre variable ξ_2 sur X, semblable à ξ_1 et indépendante de ξ_1 ? Ce n'est évidemment pas certain (par exemple, si Ω est réduit à deux points, c'est évidemment faux). Or dans la pratique on a besoin de cela. Si Ω est trop petit, on pourra l'agrandir comme suit. Soit $\Omega' = \Omega \times \Omega$, muni de la mesure produit $d\omega \otimes d\omega$. Alors on pourra identifier ξ_1 à $\xi_1 \circ pr_1$, application de Ω' dans X ; alors la variable $\xi_2 = \xi_1 \circ pr_2$ est bien indépendante de ξ_1 et semblable à ξ_1.

On supposera alors ce qui suit :

a. Pour toute loi de probabilité sur un espace localement compact X, rencontrée dans l'énoncé d'un théorème, il existe une variable aléatoire ξ sur X ayant cette loi (si cela n'était pas vérifié, on y parviendrait en remplaçant Ω par $\Omega \times \hat{X}$).

b. Pour toute famille dénombrable $(\xi_\nu)_{\nu=1,2\ldots}$ de variables aléatoires intervenant dans l'énoncé d'un théorème, il en existe une autre $(\eta_\nu)_{\nu=1,2\ldots}$ telle que η_ν soit semblable à ξ_ν et indépendante de ξ_ν, et que la famille des η_ν soit libre.

2. Variables aléatoires sur des espaces vectoriels topologiques.

Soit X un E.V.T. réel [1], (localement connexe séparé, comme toujours). Si on le munit de la topologie affaiblie, il peut être identifié à un sous-espace topologique du compact $\hat{X} = \hat{R}^{X'}$, où $\hat{R}$ est une compactification de R, X' le dual de X : il suffit d'identifier le point $x \in X$ au point $(\langle \alpha', x \rangle)_{\alpha' \in X'}$ de $\hat{R}^{X'}$. En outre, si $X \longrightarrow Y$ est une application linéaire continue d'un E.V.T. dans un autre, elle est aussi faiblement continue, et se prolonge donc en une application continue de $\hat{X}$ dans $\hat{Y}$. Une variable aléatoire ξ sur X définit donc une loi de probabilité $\xi(d\omega)$ sur $\hat{X}$, concentrée sur X et même sur une réunion dénombrable de compacts de X.

PROPOSITION 1. - *Soient* ξ_1, ξ_2, *deux variables aléatoires sur un E.V.T.* X. *Pour qu'elles soient semblables, il faut et il suffit que, pour tout* $\alpha' \in X'$

---

[1] Nous prenons tous les espaces vectoriels sur R, seulement pour simplifier.

<u>les variables aléatoires réelles</u> $\langle \alpha', \xi_1 \rangle$, $\langle \alpha', \xi_2 \rangle$ <u>soient semblables</u>.

Pour une variable ξ sur X, $\langle \alpha', \xi \rangle$ est la variable aléatoire réelle $\omega \longrightarrow \langle \alpha', \xi(\omega) \rangle$.

La proposition est évidente dans le sens "il faut" ; démontrons qu'"il suffit".

Soit d'abord X de dimension finie. L'image de Fourier de la mesure de Radon $\mu = \xi(d\omega)$ est la fonction

$$\alpha' \longrightarrow \int_X \exp(-i\langle \alpha', x \rangle)\, d\mu(x) = \mathcal{E}(\exp(-i\langle \alpha', \xi \rangle)).$$

Donc la connaissance de la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle $\langle \alpha', \xi \rangle$ détermine $\mathcal{F}(\xi(d\omega))$ donc $\xi(d\omega)$, ce qui démontre notre affirmation dans ce cas.

Supposons maintenant X quelconque. Si $X \longrightarrow Y$ est une application linéaire continue de X dans un E.V.T. Y de dimension finie, et si ξ_1 et ξ_2, variables aléatoires sur X, vérifient la condition de l'énoncé, il en est de même de leurs images sur Y, donc celles-ci sont semblables. En particulier, quel que soit le sous-ensemble fini J de X', les images de ξ_1 et ξ_2 dans $\hat{R}^J$, définies par l'application $x \longrightarrow (\langle \alpha', x \rangle)_{\alpha' \in J}$ de X dans $\hat{R}^J$, seront semblables.

Mais on sait que, si deux mesures $\xi_1(d\omega)$, $\xi_2(d\omega)$, sur le produit $\hat{R}^{X'}$, sont telles que, pour tout sous-ensemble fini J de X', leurs projections sur $\hat{R}^J$ coïncident, alors ces deux mesures coïncident ; donc ξ_1 et ξ_2 sont bien semblables

C.Q.F.D.

REMARQUES.

1° Une légère modification du raisonnement montre que ξ_1 et ξ_2 sont encore semblables si, pour tout α' d'un sous-espace faiblement dense [2] X'_1 de X', les variables réelles $\langle \alpha', \xi_1 \rangle$ et $\langle \alpha', \xi_2 \rangle$ sont semblables. On remplace $\hat{X}$ par $\hat{X}_1 = \hat{R}^{X'_1}$.

2° On peut toujours appeler image de Fourier de ξ la fonction sur X' : $\alpha' \longrightarrow \mathcal{E}(\exp(-i\langle \alpha', \xi \rangle))$. Elle caractérise ξ à une similitude près.

---

[2] On ne peut pas remplacer un sous-espace vectoriel dense par un sous-ensemble total : la condition n'est pas linéaire en α'.

Elle est continue sur X' muni de la topologie de la convergence compacte.

PROPOSITION 2. - Soient X et Y deux E.V.T., ξ et η des variables aléatoires resp. sur X et Y. Pour qu'elles soient indépendantes, il faut et il suffit que, pour tout $\alpha' \in X'$ et tout $\beta' \in Y'$, les variables aléatoires réelles $\langle \alpha', \xi \rangle$ et $\langle \beta', \eta \rangle$ soient indépendantes.

Evidemment nécessaire, montrons que suffisant. Soient ξ_1, η_1, des variables aléatoires respectivement semblables à ξ, η, mais indépendantes. Considérons les deux variables aléatoires (ξ, η) et (ξ_1, η_1) sur $X \times Y$; nous allons montrer qu'elles sont semblables, ce qui prouvera l'indépendance de ξ et η. Pour cela, d'après la propostion 1, il suffit de montrer que, pour tout $\alpha' \in X'$ et tout $\beta' \in Y'$, les variables réelles $\langle (\alpha', \beta'), (\xi, \eta) \rangle$ et $\langle (\alpha', \beta'), (\xi_1, \eta_1) \rangle$ sont semblables. Or ces variables s'écrivent encore $\langle \alpha', \xi \rangle + \langle \beta', \eta \rangle$ et $\langle \alpha', \xi_1 \rangle + \langle \beta', \eta_1 \rangle$; comme ξ et ξ_1 sont semblables, il en est de même de $\langle \alpha', \xi \rangle$ et $\langle \alpha', \xi_1 \rangle$; $\langle \beta', \eta \rangle$ et $\langle \beta', \eta_1 \rangle$ sont aussi semblables ; mais ξ_1 et η_1 sont indépendantes donc aussi $\langle \alpha', \xi_1 \rangle$ et $\langle \beta', \eta_1 \rangle$; $\langle \alpha', \xi \rangle$ et $\langle \beta', \eta \rangle$ sont indépendantes par hypothèse, d'où le résultat.

REMARQUE. - On peut se borner à prendre α' et β' dans des sous-espaces vectoriels faiblement denses X'_1, Y'_1 de X', Y'.

3. Variables gaussiennes (ou laplaciennes).

Soit X un espace vectoriel de dimension finie n sur R, X' son dual. Une variable aléatoire ξ sur X est dite d'ordre 2 si $\omega \to \|\xi(\omega)\|$ est d'ordre 2. Cela revientà dire que, pour tout $\alpha' \in X'$, la variable aléatoire réelle $\langle \alpha', \xi \rangle$ est d'ordre 2 ; ou encore que $\xi \in X \otimes L^2_\omega$. Alors ξ définit l'application linéaire $\alpha' \to \langle \alpha', \xi \rangle$ de X' dans L^2_ω, qui induit sur X' le produit scalaire

$$(\alpha', \beta') \to (\alpha' | \beta') = \mathcal{E}(\langle \alpha', \xi \rangle \langle \beta', \xi \rangle) .$$

Le cas le plus intéressant est celui où cette application est injective, ce qui exprime que ξ n'est pas presque sûrement dans un sous-espace vectoriel strict de X ; alors on peut identifier X' à un sous-espace de L^2_ω, et son produit scalaire est euclidien; X est par là même un espace euclidien, et son produit scalaire est le seul pour lequel, pour $\alpha \in X$, $\beta \in X$, on ait

$$\mathcal{E}((\alpha | \xi)(\beta | \xi)) = (\alpha | \beta) .$$

Soit maintenant Q une forme quadratique définie positive sur X. Appelons μ_Q (loi de Gauss-Laplace associée à Q) la loi de probabilité sur X définie par

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}Q(x)\right)\,dx\,,$$

dx étant la mesure de Haar associée à Q (c'est-à-dire égale à $dx_1\ dx_2\ \dots\ dx_n$ pour des coordonnées Q-orthonormales). Les coefficients sont choisis de telle manière que :

a. $\int_{R^n} = 1$;

b. pour $\alpha \in X$, $\beta \in X$, on ait $\mathcal{E}((\alpha \mid \xi)(\beta \mid \xi)) = (\alpha \mid \beta)$, le produit scalaire étant celui qui est défini par Q. On a toujours $\mathcal{E}(\alpha \mid \xi) = 0$..

Pour $X = R$, si Q est la forme quadratique $u \to \frac{u^2}{\sigma^2}$, on a $dx = \frac{du}{\sigma}$, et on a

$$\mu_Q = \mu_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right)\frac{du}{\sigma}\ ;$$

alors $\mathcal{E}(u) = 0$, $\mathcal{E}(u^2) = \sigma^2$; σ est l'écart type ou norme d'ordre 2 de la variable aléatoire définie par μ_σ.

Une variable strictement gaussienne sur X, associée à Q, est une variable aléatoire ξ sur X telle que $\xi(d\omega) = \mu_Q$; toutes les variables gaussiennes associées à Q sont semblables. La forme Q définit un isomorphisme canonique de X sur X' et une forme adjointe Q' sur X'. Pour tout $\alpha' \in X' \neq 0$, $\langle \alpha' \mid \xi \rangle$ est une variable réelle strictement gaussienne d'écart type $\|\alpha'\|_{Q'}$, et

$$\mathcal{E}(\langle \alpha' \mid \xi \rangle \langle \beta' \mid \xi \rangle) = (\alpha' \mid \beta')_{Q'}\,,$$

donc Q' est la forme induite par l'injection canonique de X' dans L^2_ω définie par $\xi \in X \otimes L^2_\omega$. Les moments d'ordre 2 de ξ, c'est-à-dire les $\mathcal{E}(\langle \alpha', \xi \rangle \langle \beta', \xi \rangle)$ pour $\alpha' \in X'$, $\beta' \in X'$, déterminent donc Q', donc Q, donc ξ à une similitude près.

Soit ξ une variable sur X telle que, pour tout $\alpha' \in X'$ et $\neq 0$ la variable réelle $\langle \alpha', \xi \rangle$ soit strictement gaussienne ; alors ξ est strictement gaussienne. Soit en effet Q' la forme quadratique sur X' :

$$(\alpha', \beta') \longrightarrow (\alpha' \mid \beta') = \mathcal{E}(\langle \alpha', \xi \rangle \langle \beta', \xi \rangle)\ ;$$

elle est définie positive.

Soit Q la forme adjointe sur X. Alors pour tout $\alpha' \in X'$, $\langle \alpha, \xi \rangle$ est semblable à $\langle \alpha', \xi_1 \rangle$, si ξ_1 est une variable strictement gaussienne associée à Q ; donc ξ est semblable à ξ_1, donc strictement gaussienne. D'ailleurs l'image de Fourier de $\xi(d\omega)$ est la fonction sur X' :

$$\alpha' \to \mathcal{E}(\exp(-i \langle \alpha', \xi \rangle)) = \exp(-\|\alpha'\|^2_{Q'}) = \exp(-Q'(\alpha')) .$$

Soit X_1 un sous-espace vectoriel de X ; l'image d'une variable strictement gaussienne ξ sur X, associée à Q, par la projection Q-orthogonale $X \to X_1$, est une variable strictement gaussienne ξ_1 sur X_1, associée à Q_1, forme quadratique induite par Q sur X_1. Donc, si X_2 est un sous-espace vectoriel de X, l'image de ξ par l'application canonique $X \to X/X_2$ est strictement gaussienne. Alors l'image η de ξ par toute application linéaire épijective $X \to Y$ est strictement gaussienne ; la forme quadratique Q_Y relative à η est telle que son adjointe $Q'_{Y'}$ soit induite sur Y' par l'adjointe $Q'_{X'}$ (l'épijection $X \to Y$ a une transposée $Y' \to X'$ injective, donc Y' est un sous-espace vectoriel de X').

Si ξ_1 et ξ_2 sont des variables gaussiennes indépendantes sur X_1 et X_2 respectivement, associées à Q_1 et Q_2, la variable (ξ_1, ξ_2) sur $X_1 \times X_2$ est strictement gaussienne, associée à $Q_1 \oplus Q_2$. Si ξ est strictement gaussienne sur X, et si X_1, X_2 sont deux sous-espaces vectoriels de X, les images ξ_1, ξ_2 de ξ par les projections orthogonales $X \to X_1$, $X \to X_2$, sont indépendantes, si et seulement si X_1 et X_2 sont totalement Q-orthogonaux. (Si en effet ces projections sont indépendantes, alors pour $\alpha_1 \in X_1$, $\alpha_2 \in X_2$ tous deux $\neq 0$, les variables réelles $(\alpha_1 | \xi)$, $(\alpha_2 | \xi)$ sont gaussiennes indépendantes, donc orthogonales : $\mathcal{E}((\alpha_1 | \xi)(\alpha_2 | \xi)) = 0$, donc $(\alpha_1 | \alpha_2)_Q = 0$, et X_1, X_2 sont bien orthogonales ; la réciproque est évidente en prenant une base orthonormale convenable). Pour $\alpha' \in X'$, $\beta' \in X'$, les variables réelles $\langle \alpha' | \xi \rangle$, $\langle \beta' | \xi \rangle$ sont indépendantes si et seulement si $(\alpha' | \beta')_{Q'} = 0$, c'est-à-dire si elles sont orthogonales :

$$\mathcal{E}(\langle \alpha' | \xi \rangle \langle \beta' | \xi \rangle) = 0 .$$

Généralisation évidente à un nombre fini de projections orthogonales ou d'éléments X'.

Si ξ_1, ξ_2, sont deux variables strictement gaussiennes, indépendantes sur X, associées à Q_1, Q_2, leur somme $\xi = \xi_1 + \xi_2$ est aussi strictement gaussienne, car elle est l'image du produit (ξ_1, ξ_2), variable strictement gaussienne sur $X \times X$, par l'application linéaire $(x_1, x_2) \to x_1 + x_2$ de $X \times X$ sur X ; la forme quadratique Q de ξ est alors telle que son adjointe Q' soit la somme $Q'_1 + Q'_2$ (on peut le voir aussi par Fourier). En particulier, si deux variables strictement gaussiennes réelles sont indépendantes, d'écarts types σ, τ leur somme est strictement gaussienne d'écart type $\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$.

Si maintenant X est un espace vectoriel de dimension finie, on appellera variable gaussienne (non strictement) sur X une variable presque sûrement contenue dans un sous-espace vectoriel X_1 de X, et strictement gaussienne sur X_1. Les variables gaussiennes ont des propriétés analogues à celles des variables strictement gaussiennes ; Q n'existe plus, mais Q' existe toujours (éventuellement dégénérée) et définit toujours ξ à une similitude près ; il y a moins de précautions à prendre, car on n'est pas obligé de prendre des éléments $\neq 0$ de X', des applications linéaires épijectives etc. L'application $X' \longrightarrow L^2_\omega$ n'est plus injective.

Si des variables gaussiennes ξ_j sur X convergent vers une variable ξ en probabilité ou en moyenne quadratique, ou presque sûrement suivant un filtre à base dénombrable, ξ est gaussienne ; même si les ξ_j sont strictement gaussiennes, bien évidemment ξ ne l'est pas nécessairement

4. Variables aléatoires généralisées d'ordre 2.

Soit X un espace vectoriel topologique localement convexe sur R, séparé complet.

Si on cherche à définir une variable aléatoire ξ sur X, d'ordre 2, on ne doit certainement pas se contenter de dire que c'est un élément de $X \otimes L^2_\omega$. Il faut prendre un quelconque produit tensoriel topologique complété.

Nous serons amenés à prendre

$$X \hat{\otimes}_\varepsilon L^2_\omega \approx \mathcal{L}_\varepsilon(X'_c ; L^2_\omega) .$$

Un élément ξ de cet espace sera appelé variable aléatoire généralisée d'ordre 2 sur X.

ξ définit une application linéaire $\tilde{\xi}$ de X' dans L^2_ω, continue de X'_c dans L^2_ω. Pour $\alpha' \in X'$, on notera $\langle \alpha', \xi \rangle$ l'élément correspondant $\tilde{\xi}(\alpha')$ de L^2_ω, variable aléatoire réelle d'ordre 2. L'application $\tilde{\xi}$ induit sur X' un produit scalaire

$$(\alpha', \beta') \longrightarrow (\alpha' | \beta') = \mathcal{E}(\langle \alpha', \xi \rangle \langle \beta', \xi \rangle) ;$$

si $\tilde{\xi}$ est injective, auquel cas on peut considérer X' comme sous-espace vectoriel algébrique de L^2_ω, la topologie de X'_c est plus fine que la topologie induite par L^2_ω (qui est la topologie préhilbertienne définie par

$(\alpha', \beta) \to (\alpha' | \beta))$.

D'autre part, ξ définit une application linéaire de L^2_ω dans X ; l'image de $1 \in L^2_\omega$ est un élément de X noté $\mathcal{E}(\xi)$.

Une variable généralisée d'ordre 2 n'est pas en général une variable aléatoire vraie sur X, car on ne peut pas faire correspondre à ξ une application mesurable $\omega \to \xi(\omega)$ de Ω dans X ; c'est une variable vraie si X est de dimension finie, ou plus généralement si c'est un espace de Fréchet nucléaire (car alors le diagramme général

$$X \hat{\otimes}_\pi L^2_\omega \to (L^2_\omega(X))^\wedge \to X \hat{\otimes}_\varepsilon L^2_\omega$$

montre que ces 3 espaces sont confondus si X est nucléaire ; et $L^2_\omega(X)$, espace des classes de fonctions de carré sommable à valeurs dans X, est complet si X est un Fréchet. Rappelons que R^N est un Fréchet nucléaire). Souvent aussi on pourra considérer un espace localement convexe Y, tel que X soit un sous-espace de Y, muni d'une topologie plus fine que la topologie induite, et que l'injection $X \to Y$ définisse une injection

$$X \hat{\otimes}_\varepsilon L^2_\omega - (L^2_\omega(Y))^\wedge \quad ;$$

si alors Y est un Fréchet, donc $L^2_\omega(Y)$ complet, ξ, considérée comme variable sur Y, sera une variable aléatoire vraie.

Remarquons qu'inversement une variable aléatoire vraie ξ sur X n'est pas nécessairement d'ordre 2 ; elle l'est si, pour tout $\alpha' \in X'$, $\langle \alpha', \xi \rangle$ est d'ordre 2, et si $\alpha' \to \langle \alpha', \xi \rangle$ est continue de X'_c dans L^2_ω.

Pour les variables généralisées d'ordre 2, on donnera les définitions suivantes :

a. Soit $X \xrightarrow{u} Y$ une application linéaire continue. Elle permet de définir $X \hat{\otimes}_\varepsilon L^2_\omega \xrightarrow{u \otimes I} Y \hat{\otimes}_\varepsilon L^2_\omega$; donc l'image η d'une variable généralisée ξ sur X est une variable généralisée sur Y.

b. Deux variables ξ_1, ξ_2, sur le même espace X, seront dites semblables, si, pour tout $\alpha' \in X'$, les variables aléatoires réelles $\langle \alpha', \xi_1 \rangle$, $\langle \alpha', \xi_2 \rangle$ sont semblables. Cela coïncide avec la définition déjà donnée si ξ_1 et ξ_2 sont des variables aléatoires vraies (proposition 1).

c. Deux variables généralisées ξ, η, sur X, Y, respectivement, seront dites indépendantes si, pour tout $\alpha' \in X'$ et tout $\beta' \in Y'$, les variables aléatoires réelles $\langle \alpha, \xi \rangle$ et $\langle \beta', \eta \rangle$ sont indépendantes.

Cela coïncide avec la définition antérieure pour des variables aléatoires vraies (proposition 2) : dans ces deux définitions b, c, on peut se borner à prendre des éléments de sous-espaces vectoriels faiblement denses des duals.

Une variable aléatoire généralisée d'ordre 2 sur X sera dite gaussienne si, pour tout $\alpha' \in X'$, la variable aléatoire réelle $\langle \alpha', \xi \rangle$ est gaussienne. Si X est de dimension finie, c'est équivalent à la définition antérieure. Idem pour strictement gaussienne. Dans ce dernier cas, l'application $\tilde{\xi} : X' \to L^2_\omega$ est injective, puisque, pour $\alpha' \neq 0$, $\langle \alpha', \xi \rangle$, strictement gaussienne, n'est jamais l'élément nul de L^2_ω. Donc

$$(\alpha', \beta') \to (\alpha' \mid \beta) = \mathcal{E}(\langle \alpha', \xi \rangle \langle \beta', \xi \rangle)$$

définit sur X' une structure préhilbertienne et une forme quadratique Q' correspondant à une topologie moins fine que X'_c. On ne peut pas définir sur X lui-même une forme quadratique analogue à la forme Q du cas de la dimension finie.

Si $X \xrightarrow{u} Y$ est une application linéaire continue, et si ξ est gaussienne sur X, son image $u(\xi)$ est gaussienne sur Y ; de plus, si l'image $u(X)$ est dense dans Y, et ξ strictement gaussienne, $u(\xi)$ est strictement gaussienne.

5. Exemples.

Prenons par exemple $X = \mathcal{E}^0_t = \mathcal{E}^0_{(R)}$, espace des fonctions continues d'une variable réelle t. Alors une variable généralisée d'ordre 2, $\xi \in \mathcal{E}^0_t \hat{\otimes}_\varepsilon L^2_\omega = \mathcal{E}^0_t(L^2)$ est une fonction continue sur R à valeurs dans L^2_ω ; on l'appellera fonction continue aléatoire généralisée d'ordre 2 sur R. Pour tout $t \in R$, on peut définir $\xi(t)$ comme un élément de L^2_ω, donc comme une variable aléatoire réelle d'ordre 2 ; lorsque h tend vers 0, $\xi(t+h)$ tend vers $\xi(t)$ en moyenne quadratique donc en probabilité, mais non nécessairement presque sûrement ; plus généralement, si $\alpha' = \mu$ est une mesure à support compact sur R, $\int \xi(t)\, d\mu(t) = \langle \mu, \xi \rangle$ est une variable aléatoire réelle. Une fonction continue sur R, à valeurs vectorielles, est sûrement localement de carré sommable pour la mesure de Lebesgue, donc

$$\xi \in \mathcal{L}^2_t(L^2_\omega) = L^2_\omega(\mathcal{L}^2_t) = \mathcal{L}^2_{\omega,t} \quad (^3)$$

donc, considérée comme variable aléatoire sur L^2_t, c'est une variable aléatoire vraie ; pour presque tout $\omega \in \Omega$, on peut définir $\xi(\omega)$ comme une classe de fonctions localement de carré sommable sur R.

---

(3) Nous appelons $\mathcal{L}^2$ l'espace des classes de fonctions localement de carré sommable. N'importe quelle mesure de Radon $\geqslant 0$ sur R peut remplacer ici la mesure de Lebesgue.

Un élément ξ de $\mathscr{E}_t^o \hat{\otimes}_\varepsilon L^2_\omega$ peut donc être défini par une fonction mesurable sur $\Omega \times R$, tel que, pour tout t, $\xi(t) : \omega \longrightarrow \xi(\omega, t)$ appartienne à L^2_ω, et que $t \longrightarrow \xi(t)$ soit continue de R dans L^2_ω ; et réciproquement. Deux fonction mesurables ξ_1, ξ_2, sur $\Omega \times R$, définissent le même élément de $\mathscr{E}_t^o \hat{\otimes}_\varepsilon L^2_\omega$ si et seulement si, pour tout $t \in R$, $\xi_1(t, \omega) = \xi_2(t, \omega)$ presque partout sur Ω. Pour $\mu \in \mathscr{E}'^o_t$, $\langle \xi, \mu \rangle \in L^2_\omega$ est l'intégrale $\int \xi(t)\, d\mu(t)$, par rapport à μ, d'une fonction continue vectorielle sur R à valeurs dans L^2_ω ; cette intégrale est uniquement définie comme élément de L^2_ω, c'est-à-dire comme classe de fonctions sur Ω ; elle n'a de valeur déterminée pour aucun point ω de Ω.

Soit maintenant ξ une variable aléatoire vraie sur $\mathscr{E}_t^o$. Pour presque tout ω, $\xi(\omega)$ est une fonction $t \longrightarrow \xi(\omega, t)$. Donc ξ est une fonction sur $\Omega \times R$. Comme $\omega \longrightarrow \xi(\omega)$ doit être mesurable de Ω dans $\mathscr{E}_t^o$, ξ est mesurable sur $\Omega \times R$; pour presque tout ω, $\xi(\omega) : t \longrightarrow \xi(\omega, t)$ est continue et $\omega \longrightarrow \xi(\omega)$ est mesurable de Ω dans $\mathscr{E}_t^o$; et inversement. Deux fonctions ξ_1, ξ_2, mesurables sur $\Omega \times R$, définissent la même variable aléatoire vraie sur $\mathscr{E}_t^o$ si, pour presque tout ω, $\xi_1(\omega) = \xi_2(\omega)$ sur R. Alors ξ définira, pour toute mesure $\mu \in \mathscr{E}'^o$, une variable aléatoire réelle $\langle \xi, \mu \rangle$: $\omega \longrightarrow \int \xi(\omega, t)\, d\mu(t)$; ξ sera d'ordre 2 si et seulement si $\langle \xi, \mu \rangle$ est dans L^2_ω, et si $\mu \longrightarrow \langle \xi, \mu \rangle$ est continue de $\mathscr{E}'^o_c$ dans L^2_ω.

Pour qu'une fonction ξ mesurable sur $\Omega \times R$ définisse une variable aléatoire vraie d'ordre 2 sur $\mathscr{E}_t^o$, il est donc nécessaire que :

a. pour presque tout ω, $\xi(\omega) : t \longrightarrow \xi(\omega, t)$ soit une fonction continue sur R, et que $\omega \longrightarrow \xi(\omega)$ soit mesurable de Ω dans $\mathscr{E}_t^o$;

b. pour tout t, $\xi(t) : \omega \longrightarrow \xi(\omega, t)$ soit dans L^2_ω, et que $t \longrightarrow \xi(t)$ soit continue continue de R dans L^2_ω.

Ces conditions sont suffisantes. La condition a. entraîne en effet que ξ soit une variable aléatoire vraie sur $\mathscr{E}_t^o$. Soit $\mu \in \mathscr{E}'^o$. On peut représenter pour presque tout ω, l'intégrale $\int \xi(\omega, t)\, d\mu(t)$ comme une limite de sommes de Riemann $\sum \mu(t_i, t_{i+1})\, \xi(\omega, t_i)$; mais ces sommes, comme variables aléatoires, coïncident avec $\sum \mu(t_i, t_{i+1})\, \xi(t_i)$, et comme $t \longrightarrow \xi(t)$ est, grâce à b., continue de R dans L^2_ω, elles convergent en moyenne quadratique vers l'intégrale vectorielle $\int \xi(t)\, d\mu(t) \in L^2_\omega$; cela prouve que l'intégrale vectorielle $\int \xi(t)\, d\mu(t)$ définie par b. coïncide avec $\omega \longrightarrow \int \xi(\omega, t)\, d\mu(t)$ définie par a. ; mais b. prouve alors que $\mu \to \langle \xi , \mu \rangle$ est continue de $\mathcal{E}_c'^{\circ}$ dans L^2_ω, donc ξ est d'ordre 2, et $\langle \xi , \mu \rangle \in L^2_\omega$ peut s'écrire à la fois comme intégrale vectorielle $\int \xi(t)\, d\mu(t)$ d'une fonction continue de R à valeurs dans L^2_ω, ou comme la fonction $\omega \to \int \xi(\omega , t)\, d\mu(t)$, définie pour presque toutes les valeurs de ω et de carré sommable sur Ω.

Une fonction aléatoire continue généralisée d'ordre 2 sur un intervalle (a , b) de R, $\xi \in \mathcal{E}^{\circ}_{(a,b)} \hat{\otimes}_\varepsilon L^2_\omega$, définit, par restriction, une fonction continue aléatoire généralisée sur toute partie K de (a , b) :

$$\xi_K \in \mathcal{E}^{\circ}_{(K)} \hat{\otimes}_\varepsilon L^2_\omega .$$

On dira que ξ est à accroissements aléatoires indépendants, si, pour tout système fini $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{\ell-1} < t_\ell = b$ de nombres réels, les fonctions continues aléatoires généralisées $\xi(a)$ et $\xi_{K_i} - \xi(t_i)$, $0 \leq i \leq \ell - 1$, où K_i est l'intervalle (t_i , t_{i+1}), sont des variables aléatoires généralisées d'ordre 2 indépendantes [4]. En utilisant la remarque qui suit la proposition 2, et en remarquant que, dans le dual $\mathcal{E}'^{\circ}$ de l'espace des fonctions continues, les combinaisons finies de masses ponctuelles sont faiblement denses, on voit que la condition précédente est entraînée par la suivante, apparemment beuacoup moins forte : pour tout système $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{\ell-1} < t_\ell = b$, les variables aléatoires réelles $\xi(t_0)$, $\xi(t_1) - \xi(t_0)$, ..., $\xi(t_\ell - t_{\ell-1})$, sont indépendantes. Dans ce cas, ξ est gaussienne si et seulement si, pour tous (t_1 , t_2), $\xi(t_1)$ et $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ sont gaussiennes.

Une distribution aléatoires généralisée d'ordre 2 sur R est un élément ξ de $\mathcal{D}'_t \hat{\otimes} L^2_\omega$, donc une distribution sur R à valeurs dans L^2_ω. Pour toute $\alpha' = \varphi \in \mathcal{D}_t$, $\langle \alpha', \xi \rangle = \xi(\varphi)$ est une variable aléatoire réelle. ξ est dite stationnaire, si elle est semblable à toutes ses translatées. D'après la proposition 1, cela revient à dire que, quelle que soit $\varphi \in \mathcal{D}_t$ et quelle que soit la translation τ sur R, les variables réelles $\xi(\varphi)$ et $\xi(\tau \varphi)$ sont semblables.

Si $\xi \in \mathcal{E}^{\circ}_t \hat{\otimes}_\varepsilon L^2_\omega$, on définit sa covariance comme la fonction de deux variable réelles $\Gamma(s , t) = \mathcal{E}(\xi(s)\, \xi(t))$. Alors, si $\varphi \in \mathcal{D}$, $\psi \in \mathcal{D}$, on a puisque le produit multiplicatif est continu de $L^2_\omega \times L^2_\omega$ dans L^1_ω :

---

(4) Si $a = -\infty$, définition légèrement modifiée : ne pas considérer la variable $\xi(a)$, <u>et remplacer</u> $\xi_{K_0} - \xi(t_0)$ <u>par</u> ξ_{K_0}.

$$\xi(\varphi)\ \xi(\Psi) = \iint \xi(s)\ \xi(t)\ \varphi(s)\ \Psi(t)\ ds\ dt\ ,$$

donc, puisque l'espérance mathématique est une forme linéaire continue sur L^1_ω :

$$\mathcal{E}(\xi(\varphi)\ \xi(\Psi)) = \iint \Gamma(s\ ,\ t)\ \varphi(s)\ \Psi(t)\ ds\ dt\ .$$

Alors, pour une distribution aléatoires ξ généralisée d'ordre 2, on définira la covariance par le noyau (distribution à 2 variables) $\Gamma_{s,t}$:

$$\Gamma_{s,t}(\varphi(s)\ \Psi(t) = \mathcal{E}(\ \xi(\varphi)\ \xi(\Psi))\ .$$

$\Gamma_{s,t}$ est un noyau symétrique de type $\geqslant 0$.

Remarquons qu'on peut encore écrire $\Gamma_{s,t} = \mathcal{E}(\ \xi_s\ \xi_t)$.

La signification est la suivante : ξ étant une distribution à valeurs dans L^2_ω, $\xi_s\ \xi_t = \xi_s \otimes \xi_t$ est un produit tensoriel, correspondant à la multiplication de $L^2_\omega \times L^2_\omega$ dans L^1_ω , c'est donc une distribution en s , t à valeurs dans L^1_ω , et $\mathcal{E}(\ \xi_s\ \xi_t)$ est la distribution scalaire $\Gamma_{s,t}$.

Si la distribution ξ à valeurs dans L^2_ω se prolonge en une isométrie de L^2_t sur un sous-espace de L^2_ω , alors on aura

$$\mathcal{E}(\ \xi(\varphi)\ \xi(\Psi)) = \int \varphi(u)\ \Psi(u)\ du\ ,$$

d'où $\Gamma_{s,t} = \delta_{s-t}$. <u>On démontre aisément que toute distribution aléatoire généralisée d'ordre 2 est une distribution aléatoire vraie.</u>

6. <u>La fonction aléatoire de Wiener-Lévy (ou du mouvement brownien)</u>.

On appelle fonction aléatoire de Wiener-Lévy sur l'intervalle réel $(a\ ,\ b)$ une fonction continue aléatoire généralisée d'ordre 2 , $\xi \in \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{(a,b)}\ \hat{\otimes}_\varepsilon\ L^2_\omega$ vérifiant les propriétés suivantes :

a. ξ est à accroissements aléatoires indépendants ;

b. ξ est gaussienne, ou encore, quels que soient $t_1 \in (a\ ,\ b)$, $t_2 \in (a\ ,\ b)$, $\xi(t_1)$ et $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ sont gaussiennes.

Nous allons normaliser une telle fonction. Soit $\sigma^2(t) = \mathcal{E}((\ \xi(t))^2$. Alors σ est une fonction continue croissante (car $\xi\,(t + h)$ est la somme des variables orthogonales $\xi(t)$, $\xi(t + h) - \xi(t)$, donc

$$\sigma^2(t + h) - \sigma^2(t) = \mathcal{E}((\ \xi(t + h) - \xi\,(t))^2) \geqslant 0\ .$$

On peut alors remplacer ξ par une fonction continue aléatoire η de σ^2 , en posant $\eta\,(\sigma^2(t)) = \xi\,(t)$: si $\sigma^2(t_1) = \sigma^2(t_2)$ pour $t_1 < t_2$, $\xi\,(t_2) - \xi\,(t_1)$ est presque sûrement nulle et $\eta\,(\sigma^2(t_2)) = \eta\,(\sigma^2(t_1))$. Alors

$\eta \in \mathcal{E}^{o}_{\sigma^2} \hat{\otimes}_{\varepsilon} L^2_{\omega}$ est encore une fonction de Wiener-Lévy, mais normalisée ; $(a\ ,\ b)$ est remplacée par $(\sigma^2(a),\ \sigma^2(b)) \subset R_+$.

Nous reviendrons désormais aux notations initiales, ξ , t , mais supposerons la fonction normalisée :

o. $\mathcal{E}((\xi(t))^2) = t$, et $a = 0$, $b = \infty$.

Alors $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ est une variable strictement gaussinne pour $t_1 < t_2$, d'écart-type $\sqrt{t_2 - t_1}$. Grâce à ce choix, les variables aléatoires $\xi(t + h) - \xi(t)$, h fixe, sont toutes semblables quand t varie : ce sont des variables gaussiennes d'écart-type $\sqrt{h}$.

PROPOSITION 3. - Il existe une fonction de Wiener-Lévy normalisée, et une seule à une similitude près.

Montrons d'abord l'unicité.

Elle résulte d'une propriété plus générale : si ξ_1 et ξ_2 sont deux fonctions continues aléatoires généralisées d'ordre 2, à acroissements aléatoires indépendants sur $(0, +\infty)$, et si $\xi_1(0)$ et $\xi_2(0)$ sont semblables, et $\xi_1(t_2) - \xi_1(t_1)$ et $\xi_2(t_2) - \xi_2(t_1)$ semblables pour tout couple $(t_1\ ,\ t_2)$, alors ξ_1 et ξ_2 sont semblables. La proposition 1 , remarque 1°, dit en effet que ξ_1 et ξ_2 sont sûrement semblables si, pour tout système fini $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_\ell$, et tout système de nombres réels $c_0\ , c_1\ , \dots\ , c_\ell$, les variables aléatoires

$$c_0\,\xi_1(t_0) + c_1(\xi_1(t_1) - \xi_1(t_0)) + \dots + c_\ell(\xi_1(t_\ell) - \xi_1(t_{\ell-1}))$$

et

$$c_0\,\xi_2(t_0) + c_1(\xi_2(t_1) - \xi_2(t_0)) + \dots + c_\ell(\xi_2(t_\ell) - \xi_2(t_{\ell-1}))$$

sont semblables ; mais cela résulte immédiatement des hypothèses sur ξ_1 et ξ_2 et de l'indépendance des accroissements aléatoires.

Il suffit donc de construire une fonction de Wiener-Lévy particulière.

Soit $\gamma_1\ , \gamma_2\ , \dots, \gamma_n\ , \dots$ une suite de variables aléatoires réelles gaussiennes indépendantes, de même écart-type 1 . Elles engendrent un sous-espace de Hilbert $\mathcal{H}_\omega$ de L^2_ω , dans lequel elles forment une base hilbertienne. Toute combinaison linéaires finie des γ_ν est une variable gaussienne, comme somme de variables gaussiennes indépendantes. Comme toute limite, en moyenne quadratique, de variables gaussiennes est gaussienne, tout élément γ de $\mathcal{H}_\omega$ est une variable aléatoire réelle gaussienne. De plus, un nombre fini de vecteurs de $\mathcal{H}_\omega$ sont des variables gaussiennes indépendantes si et seulement si elles sont orthogonales.

Soit alors J une isométrie de $L^2_{R_+}$ sur $\mathcal{H}_\omega$. On peut considérer J comme une distribution aléatoires généralisée d'ordre 2 , dont la covariance est $\Gamma_{s,t} = \mathcal{E}(J_s\, J_t) = \delta_{s-t}$.

Soit θ_s la fonction caractéristique de l'intervalle $(0\,,\,s)$. Alors si nous posons $\xi(s) = J(\theta_s)$, on voit que ξ a toutes les propriétés voulues :

1° d'abord ξ est une application continue de R_+ dans $\mathcal{H}_\omega \subset L^2_\omega$, parce que $s \longrightarrow \theta_s$ est une application continue de R_+ dans L^2_t. D'autre part, $\xi(0) = 0$.

2° $\xi(t_2) - \xi(t_1) = J(\theta_{t_1,t_2})$, où θ_{t_1,t_2} est la fonction caractéristique de l'intervalle $(t_1\,,\,t_2)$; c'est une variable gaussienne, et il en est de même de $\xi(t_1)$;

3° $\mathcal{E}((\xi(t_2) - \xi(t_1))^2) = \|\theta_{t_1,t_2}\|^2_{L^2} = t_2 - t_1$, et $\mathcal{E}((\xi(t))^2) = t$.

4° Reste à montrer que ξ est à accroissements indépendants. D'après ce que nous avons vu page 13, nous devons montrer que les variables aléatoires réelles $\xi(t_0)$, $\xi(t_1) - \xi(t_0)$, ..., $\xi(t_\ell) - \xi(t_{\ell-1})$, sont indépendantes ;comme elles appartiennent à $\mathcal{H}_\omega$ il suffit de voir qu'elles sont orthogonales ; or ce sont les images par J de 0, θ_{t_0,t_1}, ..., $\theta_{t_{\ell-1},t_\ell}$, qui sont bien orthogonales dans L^2_t.

REMARQUE. - La relation $\xi(t) = J(\theta_{0,t})$ peut aussi s'écrire

$$\xi(t) = \int_0^t J_\tau \, d\tau \,;$$

ξ_t est l'unique primitive de J_t qui s'annule pour $t = 0$.

PROPOSITION 4. - <u>La fonction de Wiener-Lévy est une vraie fonction aléatoire continue d'ordre</u> 2 : ξ <u>est une application mesurable de</u> Ω <u>dans</u> $\overset{\circ}{\mathcal{E}}_{(a,b)}$.

Il suffit de le montrer pour la fonction de Wiener-Lévy normalisée, sur un intervalle fini $(0\,,\,T)$, que nous prendrons pour simplifier $(0\,,\,1) = R_1$.

Rappelons (page 12) qu'on peut définir ξ comme fonction mesurable sur $\Omega \times R_1$.

Considérons alors la division de $(0\,,\,1)$ en 2^n intervalles égaux. En chacun des points de division $\frac{p}{2^n}$, la valeur de ξ est une variable aléatoire réelle $\xi(\frac{p}{n})$. Si nous appelons ξ_n la fonction sur $\Omega \times R_1$ qui, pour tout ω, est égale à $\xi(\omega\,,\,t)$ aux points $t = \frac{p}{2^n}$ et linéaire entre ces intervalles, ξ_n est une fonction mesurable sur $\Omega \times R_1$ définissant une vraie fonction aléatoire continue d'ordre 2 sur R_1, avec $\xi_n(\frac{p}{2^n}) = \xi(\frac{p}{2^n})$.

Cherchons un module de continuité de $\xi_n(\omega)$. Nous allons montrer qu'on peut chercher un module de la forme $a\sqrt{2\ \Delta t \log \frac{1}{\Delta t}}$, pourvu que

$$|\Delta t| \leq \frac{n^{1/4a^2}}{2^n}, \quad a > 1 .$$

Soient $\frac{p}{2^n}$, $\frac{q}{2^n}$, des points de division, $|q - p| \leq n^{1/4a^2}$. Alors $\xi_n(\frac{q}{2^n}) - \xi_n(\frac{p}{2^n})$ est une variable gaussienne réelle d'écart-type $\sigma = \sqrt{\frac{q-p}{2^n}}$

Alors la probabilité pour que

$$\left|\xi_n(\frac{q}{2^n}) - \xi_n(\frac{p}{2^n})\right| \geq a\sqrt{2\frac{q-p}{2^n}\log\frac{1}{(\frac{q-p}{2^n})}} = 2\ a\ \sigma\sqrt{\log\frac{1}{\sigma}}$$

est exactement

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{2a\sigma\sqrt{\log\frac{1}{\sigma}}}^{\infty} \exp(-u^2/2\sigma^2)\ du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{2a\sqrt{\log\frac{1}{\sigma}}}^{\infty}\exp(-v^2/2)\ dv$$

Mais il existe une constante C_1 telle que

$$\int_k^{\infty}\exp(-v^2/2)\ dv \leq \frac{C_1}{k}\exp(-k^2/2)$$

donc la probabilité précédente est majorée par

$$\frac{C_1}{\sqrt{\log\frac{1}{\sigma}}}\exp(-2\ a^2\log\frac{1}{\sigma}) = \frac{C_1(\sigma^2)^{a^2}}{\sqrt{\log\frac{1}{\sigma^2}}} \leq \frac{C_1 n^{1/4}}{2^{na^2}\sqrt{n\log 2 - \frac{1}{4a^2}\log n}} \leq \frac{C_2}{2^{na^2}\ n^{1/4}}$$

Alors la probabilité pour que

$$|\xi(\frac{q}{2^n}) - \xi(\frac{p}{2^n})| \geq a\sqrt{2\frac{q-p}{2^n}\log\frac{1}{(\frac{q-p}{2^n})}} ,$$

pour au moins un couple de p, q, avec $|\frac{q-p}{2^n}| \leq \frac{n^{1/4a^2}}{2^n}$, est majorée par

$$\frac{C_2}{n^{1/4}\ 2^{na^2}} \times 2^n \times n^{1/4a^2} \leq \frac{C_2}{2^{(a^2-1)n}}$$

Mais la fonction $u \longrightarrow a\sqrt{2u \log \frac{1}{u}}$ est croissante et concave (pour $u \leq \frac{1}{e}$).
Donc l'inégalité

$$|\xi_n(\omega, t') - \xi_n(\omega, t'')| \leq a\sqrt{2\,|t'' - t'|\,\log \frac{1}{|t''-t'|}} ,$$

pour des t' , t'' dyadiques, $t' = \frac{p}{2^n}$, $t'' = \frac{q}{2^n}$, entraîne la même inégalité pour des t' , t'' , quelconques, à cause de linéarité de $\xi_n(\omega)$ dans les intervalles $\frac{p}{2^n}$, $\frac{p+1}{2^n}$.

Alors ξ_n a bien le module de continuité voulu au sens suivant : sauf pour des ω de probabilité $\leq \frac{C_2}{2^{(a^2-1)n}}$, on a

$$|\xi_n(\omega, t'') - \xi_n(\omega, t') \leq a\sqrt{2\,|t''-t'|\,\log \frac{1}{|t''-t'|}} ,$$

dès que $|t'' - t'| \leq \frac{n^{1/4a^2}}{2^n}$.

Mais la probabilité d'une réunion dénombrable d'évènements est toujours majorée par la somme de leurs probabilités ; donc, sauf pour un ensemble Ω_N d'éléments ω de Ω, de probabilité inférieure où égale à

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{C_2}{2^{(a^2-1)n}} \leq \frac{C_3}{2^{(a^2-1)N}} ,$$

on a l'inégalité

$$|\xi_n(\omega, t'') - \xi_n(\omega , t')| \leq a\sqrt{2\,|t''-t'|\,\log \frac{1}{|t''-t'|}} ,$$

dès que $n \geq N$, et $|t'' - t'| \leq \frac{n^{1/4a^2}}{2^n}$.

Comme $\frac{C_3}{2^{(a^2-1)N}} \longrightarrow 0$ pour $N \longrightarrow \infty$, l'intersection Ω_0 des Ω_N est de mesure nulle. En modifiant au besoin tout sur Ω_0 , on peut le supposer vide. Donc, pour tout $\omega \in \Omega$, il existe $N(\omega)$ tel qu'on ait les inégalités ci-dessus pour $n \geq N(\omega)$.

On peut en déduire une majoration de $|\xi_{n+1}(\omega, t) - \xi_n(\omega, t)|$. A tout t , on associera le plus proche des $\frac{n}{2^n}$, soit t' . Alors

$$|\xi_{n+1}(\omega, t) - \xi_n(\omega, t)| \leqslant |\xi_{n+1}(\omega, t) - \xi_{n+1}(\omega, t')|$$
$$+ |\xi_{n+1}(\omega, t') - \xi_n(\omega, t')| + |\xi_n(\omega, t') - \xi_n(\omega, t)| .$$

Alors, pour $n \geqslant N(\omega)$, on a

$$|\xi_{n+1}(\omega, t) - \xi_n(\omega, t) \leqslant \frac{C_4 \, n^{1/2}}{2^{n/2}}$$

Donc, pour tout ω , la série des $\xi_{n+1}(\omega, t) - \xi_n(\omega, t)$, ou encore la suite des $\xi_n(\omega, t)$ est convergente, et uniformément pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. Soit $\xi_0(\omega, t)$ sa limite. La fonction ξ_0 est limite d'une suite de fonctions mesurables, donc mesurable sur $\Omega \times R_1$. Mais la fonction continue à valeurs vectorielles $\xi \in \overset{\circ}{\mathcal{E}}_t(L^2_\omega)$ est évidemment limite uniforme de ses interpolées linéaires ξ_n , donc, pour tout t :

a. $\xi_n(t)$ converge en moyenne quadratique vers $\xi(t)$;

b. $\xi_n(t)$ converge presque sûrement vers $\xi_0(t)$.

Donc ξ et ξ_0 , pour tout t , coïncident presque partout sur Ω ; alors ξ_0 peut remplacer ξ et définir la même fonction aléatoire de Wiener-Lévy (voir page 12). Mais ici, pour tout ω , $\xi_0(\omega)$ est une fonction continue sur R_1 , et non seulement de carré sommable ; en outre, $\omega \longrightarrow \xi_0(\omega)$ est une application de Ω dans $\overset{\circ}{\mathcal{E}}_t$, qui est limite simple d'une suite d'applications mesurables, donc mesurable puisque $\overset{\circ}{\mathcal{E}}_t$ est métrisable ; donc ξ_0 vérifie les conditions a. et b. de la page 12 , et définit donc une fonction continue aléatoire vraie d'ordre 2 sur $(0 , 1)$,

C.Q.F.D.

On a de plus un module de continuité de la fonction aléatoire. Pour $n \geqslant N(\omega)$, on a

$$|\xi(\omega, t) - \xi_n(\omega, t)| \leqslant C_4 \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\nu^{1/2}}{2^{\nu/2}} \leqslant C_5 \frac{n^{1/2}}{2^{n/2}} .$$

Soit $(t , t + \Delta t)$ un intervalle avec $\Delta t \leqslant \frac{1}{2^{N(\omega)}}$. Choisissons n tel que

$$\frac{(n+1)^{1/4a^2}}{2^{n+1}} \leqslant \Delta t \leqslant \frac{n^{1/4a^2}}{2^n} .$$

On a

$$|\xi(\omega, t + \Delta t) - \xi(\omega, t)| \leqslant |\xi(\omega, t + \Delta t) - \xi_n(\omega, t + \Delta t)|$$
$$+ |\xi_n(\omega, t + \Delta t) - \xi_n(\omega, t)| + |\xi_n(\omega, t) - \xi(\omega, t)|$$

$$\leqslant 2\, C_5 \frac{n^{1/2}}{2^{n/2}} + a\sqrt{2\ \Delta t \log \frac{1}{\Delta t}}$$

$$\leqslant \left(a + C_6 \frac{1}{n^{\frac{\varepsilon}{8a^2}}}\right)\sqrt{2\ \Delta t \log \frac{1}{\Delta t}}$$

Mais, pour tout ω, on peut choisir $N(\omega)$ aussi grand qu'on veut ; il existe donc, pour tout ω et pour tout $a_1 > 1$, un nombre $\eta(\omega) > 0$ tel que $\Delta t \leqslant \eta(\omega)$ entraîne $|\xi(\omega, t + \Delta t) - \xi(\omega, t)| \leqslant a\sqrt{2\ \Delta t \log \frac{1}{\Delta t}}$.
On peut donc bien dire que la fonction aléatoire ξ admet presque sûrement le module de continuité $\Delta t \rightarrow a_1 \sqrt{2\ \Delta t \log \frac{1}{\Delta t}}$, et cela quel que soit $a_1 > 1$.

PROPOSITION 5. - La fonction de Wiener-Lévy normalisée, a les propriétés suivantes :

a. $\xi(0) = 0$; $\mathcal{E}(\xi(1)) = 0$, $\mathcal{E}(\xi^2(1)) = 1$;

b. elle est à accroissements aléatoires indépendants ;

c. lorsque $\tau \geqslant 0$ varie, les fonctions aléatoires généralisées

$$t \rightarrow \xi(t + \tau) - \xi(\tau)$$

sont toutes semblables ;

d. lorsque $s > 0$ varie, les fonctions aléatoires

$$t \longrightarrow \frac{\xi(ts)}{\sqrt{s}}$$

sont toutes semblables.

Elle est, à une similitude près, la seule fonction continue aléatoire généralisée d'ordre 2 à avoir ces propriétés.

On voit qu'ici on remplace la condition d'être gaussienne et normalisée par des propriétés d'invariance par un semi-groupe d'opérations.

Il est évident que la fonction de Wiener-Lévy a ces propriétés : a. et b. ont déjà été vues ; pour voir c. , il suffit, puisque les fonctions considérées sont à accroissements indépendants, et nulles pour $t = 0$, de vérifier que, pour tout t_1 et t_2, les différentes variables réelles $\xi(t_2 + \tau) - \xi(t_1 + \sigma)$ sont semblables : or ce sont des variables gaussiennes, d'écart-type $\sqrt{t_2 - t_1}$; enfin pour vérifier d. , il suffit de vérifier que, pour tous t_1 et t_2, les différentes variables réelles $\frac{\xi(t_2 s)}{\sqrt{s}} - \frac{\xi(t_1 s)}{\sqrt{s}}$ sont semblables, or ce sont des variables gaussiennes d'écart-type $\frac{\sqrt{(t_2 - t_1)s}}{\sqrt{s}} = \sqrt{t_2 - t_1}$.

Réciproquement, soit ξ une fonction continue aléatoire généralisée d'ordre 2 sur R_+, vérifiant a., b., c., d. Pour montrer qu'elle est de Wiener-Lévy normalisée, il suffit de montrer que, pour tous t_1 et t_2, $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ est gaussienne d'écart-type $\sqrt{t_2 - t_1}$; mais c. affirme qu'elle est semblable à $\xi(t_2 - t_1)$, il suffit donc de montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, $\xi(t)$ est gaussienne d'écart-type $\sqrt{t}$. Mais d'après d., $\xi(t)$ est semblable à $\sqrt{t}\ \xi(1)$; il suffit donc de montrer que $\xi(1)$ est gaussienne d'écart-type 1. Soit φ l'image de Fourier de la loi de probabilité de $\xi(1)$ ("fonction caractéristique" de la variable aléatoire $\xi(1)$). $\xi(1)$, d'après b., est somme des n variables indépendantes

$$\xi\left(\frac{p+1}{n}\right) - \xi\left(\frac{p}{n}\right), \quad p = 0, 1, \dots n-1 ;$$

ces dernières sont toutes semblables à $\xi\left(\frac{1}{n}\right)$, d'après c., et d'après d., $\xi\left(\frac{1}{n}\right)$ est semblable à $\frac{1}{\sqrt{n}}\ \xi(1)$.

Finalement $\xi(1)$ est somme de n variables aléatoires indépendantes respectivement semblables à $\frac{1}{\sqrt{n}}\ \xi(1)$. La fonction caractéristique d'une somme de variables indépendantes est le produit des fonctions caractéristiques, on a donc $\varphi(u) = \left(\varphi\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$. Il reste à montrer que cette relation fonctionnelle implique que φ soit fonction caractéristique de la loi de Gauss : $\varphi(u) = \exp(-u^2)$. Comme $\xi(1)$ est d'ordre 2, φ est deux fois continuement différentiable, donc, pour $u \to 0$, $\varphi(u) = 1 - u^2 + O(u^2)$ à cause de a., et $\log \varphi(u) = -u^2 + O(u^2)$. Alors, pour tout u fixé, $\log \varphi\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{u^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$; et

$$\log \varphi(u) = n \log \varphi\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) = -u^2 + o(1),$$

donc $\varphi(u) = \exp(-u^2)$, et $\xi(1)$ est bien gaussienne d'écart-type 1

C.Q.F.D.

7. <u>Extension: la mesure aléatoire de Wiener-Lévy.</u>

Au lieu de ξ considérons sa dérivée J_t (au sens des distributions). J_t est une distribution sur R_+, se prolongeant en un isomorphisme de L^2_t sur $\mathcal{H}_\omega$.

Soit alors plus généralement T un espace localement compact, muni d'une mesure de Radon $dt \geq 0$. Une mesure aléatoire J généralisée d'ordre 2 sur T (c'est-à-dire un élément de $\mathcal{E}^{\prime 0}_c \hat{\otimes}_\varepsilon L^2_\omega$) est dite de Wiener-Lévy normalisée relativement à la mesure dt, si elle satisfait à la propriété suivante :

Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^0$ (fonction continue à support compact), $J(\varphi)$ est gaussienne, d'écart-type $\|\varphi\|_{L^2}$. (Donc J est gaussienne).

Il existe au plus une mesure ayant ces propriétés, à une similitude près : car si J_1 et J_2 ont ces propriétés, $J_1(\varphi)$ et $J_2(\varphi)$ sont semblables pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, donc J_1 et J_2 sont semblables (proposition 1).

Et il en existe bien une, car, si $\mathcal{H}_\omega$ est un sous-espace hilbertien de L^2_ω, engendré par des variables gaussiennes dénombrablement indépendantes assez nombreuses pour que $\mathcal{H}_\omega$ soit isomorphe à L^2_t, alors une mesure J définissant une isométrie de L^2_t sur $\mathcal{H}_\omega$ répond à la question.

La mesure de Wiener-Lévy a alors en outre la propriété suivante : si $(\varphi_k)_{k \in K}$ est un système dénombrable de fonctions de $\mathcal{D}^0$, orthogonal dans L^2_t, les $J(\varphi_k)$ forment un système libre de variables aléatoires.

C'est cette condition qui, pour $T = (a, b) \subset R$, donne la condition d'accroissements indépendants.

Si T est un groupe localement compact, dt une mesure de Haar invariante à gauche, J est stationnaire à gauche, car ses translatées à gauche sont encore des mesures de Wiener-Lévy, donc lui sont semblables.

La fonction de Wiener-Lévy, d'après la proposition 5, est une fonction aléatoire vraie. Mais la mesure aléatoire généralisée de Wiener-Lévy n'est pas une mesure aléatoire vraie. Nous avons vu un module de continuité possible pour ξ ; on montre qu'il ne peut pas être amélioré, et que ξ n'est presque sûrement pas à variation localement bornée ; donc ξ'_t n'est presque sûrement pas une mesure ; elle est presque sûrement une distribution d'ordre 1 $(\in \mathcal{D}'^1)$.

EXEMPLES.

1° Prenons pour T le tore R/Z muni de la mesure dt. J admet un développement de Fourier [5].

$$J_t = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi nt + b_n \sin 2\pi nt ,$$

où $a_0 = J(1)$ est une variable gaussienne d'écart-type 1, tandis que $a_n = 2\,J(\cos 2\pi nt)$, $b_n = 2\,J(\sin 2\pi nt)$, sont des variables gaussiennes d'écart-type $\sqrt{2}$; toutes ces variables sont indépendantes ; et c'est là une autre

---

[5] Développement de Fourier en cos, sin, oh !!! châtiment pour n'avoir considéré que des fonctions aléatoires réelles. Si l'on veut bien considérer des variables complexes on voit que, si T est un groupe abélien, dt une mesure de Haar, l'image de Fourier $\mathfrak{F}J$ est aussi de Wiener-Lévy, car $\mathfrak{F}J(\varphi) = J(\mathfrak{F}\varphi)$ est gaussienne d'écart type $\|\mathfrak{F}\varphi\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$.

manière de trouver J .

Si on considère J comme mesure périodique sur R , elle a une primitive (non périodique) unique, nulle pour $t = 0$, et cette primitive coïncide avec la fonction de Wiener-Lévy normalisée dans l'intervalle $(0 , 1)$; on a donc pour cette dernière le développement, valable pour $0 \leq t \leq 1$:

$$\xi(t) = t\,\xi(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2\pi n} \sin 2\pi nt + \frac{b_n}{2\pi n} (1 - \cos 2\pi nt)\right)$$

(développement convergent en moyenne quadratique et presque sûrement), où les a_n , b_n sont des variables gaussiennes indépendantes d'écart-type $\sqrt{2}$, $\xi(1)$ une variable gaussienne d'écart-type 1 indépendante des a_n, b_n .