ALEXANDRE GROTHENDIECK

Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. nº 149, p. 169-193

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__169_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1957)

THÉORÈMES DE DUALITÉ POUR LES FAISCEAUX ALGÉBRIQUES COHÉRENTS

par Alexandre GROTHENDIECK

Les résultats qui suivent, inspirés par le "théorème de dualité algébrique" de Serre, ont été trouvés en hiver 1955 et hiver 1956. Ils s'établissent très simplement à l'aide de résultats assez élémentaires sur la cohomologie des espaces projectifs [3], et l'utilisation intensive de l'algèbre homologique de Cartan-Eilenberg, sous la forme [2].

1. Les Ext de faisceaux de modules ([2], chap. 3 et 4).

Soit X un espace topologique muni d'un faisceau $\underline{O}$ d'anneaux avec unité (non nécessairement commutatifs). On considère la catégorie abélienne $C^{\underline{O}}$ des faisceaux de $\underline{O}$-modules, appelés aussi $\underline{O}$-Modules. On sait que tout objet de cette catégorie admet une résolution injective, ce qui permet d'y définir les foncteurs Ext ayant les propriétés formelles bien connues. De façon précise, pour éviter des confusions, nous désignons par $\mathrm{Hom}_{\underline{O}}(X\ ;\ A\ ,\ B)$ ou simplement $\mathrm{Hom}(X\ ;\ A\ ,\ B)$ le <u>groupe</u> abélien des $\underline{O}$-homomorphismes de A dans B, tandis que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}}(A\ ,\ B)$ désignera le <u>faisceau</u> des germes d'homomorphismes de A dans B $(A\ ,\ B \in C^{\underline{O}})$. On définit pour $A \in C^{\underline{O}}$ fixé des foncteurs h_A et $\underline{h}_A$ à valeurs respectivement dans la catégorie C des groupes abéliens et la catégorie C^Z des faisceaux abéliens sur X, par les formules :

$$(1.1) \qquad h_A(B) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}}(X\ ;\ A\ ,\ B) \qquad \underline{h}_A(B) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}}(A\ ,\ B)$$

Les foncteurs h_A et $\underline{h}_A$ sont des foncteurs covariants exacts à gauche, dont on considère les foncteurs dérivés droits, notés respectivement $\mathrm{Ext}^p_{\underline{O}}(X\ ;\ A\ ,\ B)$ et $\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}}(A\ ,\ B)$. On a donc par définition

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \mathrm{Ext}^p_{\underline{O}}(X\ ;\ A\ ,\ B) = (R^p\, h_A)(B) = H^p(\mathrm{Hom}_{\underline{O}}(X\ ;\ A\ ,\ C(B))) \\ \underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}}(A\ ,\ B) = (R^p\, \underline{h}_A)(B) = H^p(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}}(A\ ,\ C(B)) \end{cases}$$

où le symbole R^p désigne le passage aux foncteurs dérivés droits, et où $C(B)$ désigne une résolution injective arbitraire de B dans $C^{\underline{O}}$. Désignons par $\Gamma : C^Z \to C$ le foncteur "sections". Rappelons que ses foncteurs dérivés droits sont notés par $B \to H^p(X\ ,\ B)$:

$$H^p(X, B) = (R^p\Gamma)(B) = H^p(\Gamma(C(B))) \tag{1.3}$$

On a évidemment $h_A = \Gamma \underline{h}_A$; d'autre part on vérifie que $\underline{h}_A$ transforme objets injectifs en objets acycliques pour Γ. On en conclut de façon bien connue :

PROPOSITION 1. - Il existe pour tout $\underline{0}$-Module A un foncteur spectral cohomologique sur $\mathcal{C}^{\underline{0}}$, aboutissant au foncteur gradué $(\mathrm{Ext}^*_{\underline{0}}(X ; A, B))$, et dont le terme initial est

$$E_2^{p,q}(A, B) = H^p(X, \underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{0}}(A, B)) \tag{1.4}$$

On en déduit des "edge-homomorphismes" et une suite exacte à cinq termes que nous n'écrirons pas.

COROLLAIRE 1. - Si A est localement isomorphe à $\underline{0}^n$, alors on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Ext}^p_{\underline{0}}(X ; A, B) \xleftarrow{\sim} H^p(X, \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{0}}(A, B)) \tag{1.5}$$

(donnés par des edge-homomorphisms de la suite spectrale). En particulier on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^p_{\underline{0}}(X ; \underline{0}, B) = H^p(X, B) \tag{1.6}$$

Pour utiliser ces résultats, il faut savoir expliciter les $\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{0}}(A, B)$. Ce sont des foncteurs qui se calculent localement, i.e. si U est un ouvert de X, on a

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{0}}(A, B)\,|U = \underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{0}|U}(A\,|U, B\,|U)$$

comme il résulte du fait que la restriction à U d'un $\underline{0}$-Module injectif est un $(\underline{0}|U)$-Module injectif. De plus, on a des homomorphismes fonctoriels, pour $x \in X$ fixé

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{0}}(A, B)_x \to \mathrm{Hom}_{\underline{0}_x}(A_x, B_x) \tag{1.7}$$

qui se prolongent de façon unique en un homomorphisme de foncteurs cohomologiques en B :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{0}}(A, B)_x \to \mathrm{Ext}^p_{\underline{0}_x}(A_x, B_x) \tag{1.8}$$

PROPOSITION 2. - Si A est, dans un voisinage de x, isomorphe au conoyau d'un homomorphisme $\underline{0}^m \to \underline{0}^n$, alors (1.7) est un isomorphisme pour tout p. Il en est ainsi en particulier si A est un $\underline{0}$-Module cohérent [3].

PROPOSITION 3. - Soit $L_* = (L_i)$ une résolution gauche du $\underline{O}$-Module A par des $\underline{O}$-Modules dont chacun est isomorphe localement à un $\underline{O}^n$. Alors $\mathrm{Ext}_{\underline{O}}(A, B)$ s'identifie à $H^*(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}}(L_*, B))$, et $\mathrm{Ext}_{\underline{O}}(X; A, B)$ s'identifie à l'hypercohomologie de X par rapport au complexe $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}}(L_*, B)$.

La démonstration est standard, on considère le bicomplexe $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}}(L_*, C(B))$ où $C(B)$ est une résolution injective de B, et les homomorphismes naturels de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}}(L_*, B)$ et de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}}(A, C(B))$ dans ce dernier.

Pour finir, indiquons que les deux foncteurs Ext introduits dans (1.2) sont non seulement des foncteurs cohomologiques en B, mais des bifoncteurs cohomologiques, covariants en B et contrevariants en A.

2. Loi de composition dans les Ext.

Les résultats de ce numéro sont dus indépendamment à CARTIER et à YONEDA ; voir un exposé de CARTIER [1] pour des détails. Soit $\underline{C}$ une catégorie abélienne. Soient K et L deux objets gradués dans $\underline{C}$. On désigne par $\mathrm{Hom}(K, L)$ le groupe abélien gradué dont la composante de degré n est formé des homomorphismes homogènes de degré n de K dans L (i.e. des systèmes (u_i) d'homomorphismes $K^i \to L^{i+n}$). Si K et L sont des complexes (à opérateurs différentiels de degré $+1$ pour fixer les idées), on introduit dans $\mathrm{Hom}(K, L)$ l'opérateur différentiel donné par

$$\delta(u) = du + (-1)^{n+1}\, ud\,, \quad \text{où } n = \deg(u) \tag{2.1}$$

qui en fait un complexe à opérateur différentiel de degré $+1$. Les cycles de degré n sont les opérateurs de degré n qui anticommutent à u (en tant qu'opérateurs homogènes). On peut alors considérer $H^*(\mathrm{Hom}(K, L))$, c'est un invariant des types d'homotopie de K et de L, qu'on pourra noter $H^*(K, L)$. Si on a un troisième complexe M, alors la composition des homomorphismes définit un accouplement $\mathrm{Hom}(K, L) \times \mathrm{Hom}(L, M) \to \mathrm{Hom}(K, M)$ compatible avec les opérateurs différentiels, d'où par passage à la cohomologie des accouplements

$$H^*(K, L) \times H^*(L, M) \to H^*(K, M) \tag{2.2}$$

notés $(u, v) \to vu$. Ces accouplements satisfont une propriété évidente d'associativité. En particulier, $H^*(K, K)$ est un anneau gradué associatif avec unité, et $H^*(K, L)$ (resp. $H^*(L, K)$) est un module gradué à droite (resp. à gauche) sur cet anneau, etc..En dimension 0, (2.2) se réduit à la composition des homomorphismes permis de complexes. Enfin, une suite exacte de complexes

$0 \to K' \to K \to K'' \to 0$, telle que K'^i s'identifie à un facteur direct de K^i pour tout i , donne naissance à une suite exacte pour les complexes de groupes $\mathrm{Hom}(K'', L)$, etc., d'où un opérateur cobord $H^i(K', L) \to H^{i+1}(K'', L)$. On définit de même les opérateurs cobord relatifs à une suite exacte en L . Les accouplements (2.2) sont compatibles, au sens usuel, avec ces opérateurs cobord.

Supposons maintenant que C soit une catégorie telle que tout élément A de C admette une résolution injective $C(A)$. On constate alors, utilisant une des nombreuses variantes du théorème du bicomplexe, que

$$H^*(C(A), C(B)) = H^*(\mathrm{Hom}(C(A), C(B)))$$

est canoniquement isomorphe à

$$H^*(\mathrm{Hom}(A, C(B))) = \mathrm{Ext}^*(A, B) .$$

Les opérateurs cobord envisagés plus haut donnent les homomorphismes cobord des Ext . De plus, les accouplements (2.2) donnent ici des accouplements associatifs, compatibles avec les homomorphismes cobord :

$$\mathrm{Ext}^*(A, B) \times \mathrm{Ext}^*(B, C) \to \mathrm{Ext}^*(A, C) \tag{2.3}$$

En particulier, $\mathrm{Ext}^*(A, A)$ est un anneau gradué associatif avec unité, etc. (On montre de façon analogue que les foncteurs Ext opèrent dans les foncteurs dérivés d'un foncteur quelconque ; nous ne nous servirons pas ici de ce fait).

Dans le cas où la catégorie envisagée est la catégorie $C^{\underline{O}}$ des $\underline{O}$-Modules sur X, on obtient donc des accouplements

$$\mathrm{Ext}^p_{\underline{O}}(X ; A, B) \times \mathrm{Ext}^q_{\underline{O}}(X ; B, C) \to \mathrm{Ext}^{p+q}_{\underline{O}}(X ; A, C) \tag{2.4}$$

qui peuvent s'expliciter comme il a été dit. D'ailleurs, les mêmes développements, mais où on remplace la catégorie des groupes abéliens par la catégorie des faisceaux abéliens sur X , et les foncteurs Hom par les foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}$ définissent aussi des accouplements, ayant les mêmes propriétés formelles, et de "nature locale" cette fois-ci :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}}(A, B) \times \underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{O}}(B, C) \to \underline{\mathrm{Ext}}^{p+q}_{\underline{O}}(A, C) \tag{2.5}$$

Ces derniers se précisent si on remarque que les homomorphismes (1.8) sont compatibles avec les accouplements entre les Ext .

Rappelons enfin qu'on a aussi une structure multiplicative entre foncteurs $H^p(X , A)$ (cup-produit). On constate alors que les suites spectrales de la proposition 1 sont compatibles avec les structures multiplicatives, de façon plus précise, on a un accouplement de la suite spectrale $E(A , B)$ et de la suite spectrale $E(B , C)$ vers la suite spectrale $E(A , C)$, qui, pour l'aboutissement se réduit à l'accouplement entre les Ext globaux, et pour le termme initial à l'accouplement déduit, dans le deuxième membre de (1.4), du cup-produit et des accouplements des Ext locaux. Il en résulte en particulier que les "edge-homomorphisms"

$$\mathrm{Ext}^n_{\underline{0}}(X ; A , B) \to H^0(X ; \underline{\mathrm{Ext}}^n_{\underline{0}}(A , B)) \tag{2.6}$$

$$H^n(X , \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{0}}(A , B)) \to \mathrm{Ext}^n_{\underline{0}}(X ; A , B) \tag{2.7}$$

sont compatibles avec les structures multiplicatives. Si on se borne donc aux faisceaux localement isomorphes à un $\underline{0}^m$, cela explicite complètement la composition entre Ext globaux à l'aide du cup-produit, compte tenu de l'isomorphisme (1.5).

3. Résultats de cohomologie locale.

Soit A un anneau commutatif avec unité muni d'un idéal J. Nous allons définir, pour un A-module M variable, des homomorphismes fonctoriels

$$\begin{cases} \mathrm{Ext}^p_A(A/J , M) \to \mathrm{Hom}_A(\overset{p}{\wedge} J/J^2 , M \otimes A/J) \\ \mathrm{Tor}^A_p(A/J , M) \leftarrow (\overset{p}{\wedge} J/J^2) \otimes \mathrm{Hom}_A(A/J , M) \end{cases} \tag{3.1}$$

où les produits tensoriels et extérieurs sont pris sur l'anneau A ; noter d'ailleurs que J/J^2 est en fait un A/J-module, et que ses puissances extérieures en tant que A-module ou en tant que A/J-module sont les mêmes. La définition des homomorphismes (3.1) revient à la définition, pour tout système $\underline{x} = (x_1 , \dots , x_p)$ de points de J d'homomorphismes $\varphi_{\underline{x}}$:

$$\begin{cases} \varphi_{\underline{x}} : \mathrm{Ext}^p_A(A/J , M) \to M \otimes A/J \\ \varphi_{\underline{x}} : \mathrm{Hom}_A(A/J , M) \to \mathrm{Tor}^A_p(A/J , M) \end{cases} \tag{3.2}$$

de telle façon que les conditions suivantes soient satisfaites :

i. $\varphi_{x_1,\dots,x_p}$ dépend de façon A-multilinéaire alternée du système des $x_i \in J$

ii. $\varphi_{x_1,\dots,x_p}$ est nul quand un des x_i est dans J^2 .

En fait, ii. résulte de i., puisque $a\,\varphi_{\underline{x}} = 0$ pour $a \in J$, comme on voit en remarquant que tous les modules dans (3.2) sont annulés par J .

Pour définir $\varphi_{\underline{x}}$, considérons le complexe $K_{\underline{x}}$ dont le A-module sous-jacent est $\wedge A^p$, et dont l'opérateur différentiel est le produit intérieur $i_{\underline{x}}$ par $\underline{x}$ considéré comme forme linéaire sur A^p de composantes $x_1 , \dots , x_p$. L'opérateur différentiel est de degré -1 , les degrés sont positifs, et la cohomologie de ce complexe en dimension 0 est $A/(x_1A + \dots + x_pA)$. Comme les x_i sont dans J , on en déduit une augmentation $K_{\underline{x},o} \to A/J$. Ainsi $K_{\underline{x}}$ apparaît comme un complexe libre augmenté, à module d'augmentation A/J . On en déduit, de façon connue, des homomorphismes

$$\mathrm{Ext}^*_A(H_o(K_{\underline{x}}) , M) \to H^*(\mathrm{Hom}_A(K_{\underline{x}} , M)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Tor}^A_*(H_o(K_{\underline{x}}) , M) \leftarrow H_*(K_{\underline{x}} \otimes M)$$

d'où, en composant avec les homomorphismes sur les Ext et les Tor déduits de l'homomorphisme d'augmentation $H_o(K_{\underline{x}}) \to A/J$, des homomorphismes

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \psi_{\underline{x}} : \mathrm{Ext}^*_A(A/J , M) \to H^*(\mathrm{Hom}_A(K_{\underline{x}} , M)) \\ \psi_{\underline{x}} : \mathrm{Tor}^A_*(A/J , M) \leftarrow H_*(K_{\underline{x}} \otimes M) \end{cases}$$

Or on constate aussitôt qu'en dimension maxima p , la cohomologie des seconds membres est $M/(x_1 M + \dots + x_p M)$ (resp. est l'ensemble des éléments de M annulés par chacun des x_i). Comme les x_i sont dans J , on en déduit des homomorphismes

$$(3.4) \qquad \begin{cases} H^p(\mathrm{Hom}_A(K_{\underline{x}} , M)) \to M \otimes A/J \\ H_p(K_{\underline{x}} \otimes M) \leftarrow \mathrm{Hom}_A(A/J , M) \end{cases}$$

Composant les homomorphismes (3.3) et (3.4), on obtient les homomorphismes (3.2) que nous voulions définir. La vérification de i. est fastidieuse, mais ne présente pas de difficultés.

PROPOSITION 4. - Soit A un anneau commutatif avec unité, soit $(x_1, \dots, x_p)$ une suite d'éléments de A telle que pour $1 \leq i \leq p$, l'image de x_i dans le quotient de A par l'idéal engendré par $(x_1, \dots, x_{i-1})$ ne soit pas diviseur de 0. Soit J l'idéal engendré par les x_i. Alors J/J^2 est un (A/J)-module libre ayant pour base les images canoniques des x_i, le complexe $K_{\underline{x}}$ est une résolution libre de A/J, et pour tout A-module M, les homomorphismes (3.1) en dimension p sont bijectifs. Il en est de même des homomorphismes analogues définis pour des degrés i quelconques pourvu que $J.M = 0$.

(Le point essentiel, dont tous les autres résultent, est l'acyclicité de $K_{\underline{x}}$, qui est un fait bien connu sous les conditions indiquées).

COROLLAIRE 1. - A et J étant comme ci-dessus, supposons de plus que A soit une algèbre affine régulière de dim n sur un corps parfait $\underline{k}$, et que A/J soit une algèbre affine régulière. Désignons par $\Omega^1(A)$, $\Omega^1(A/J)$ les modules de différentielles de Kähler. Alors on a un isomorphisme canonique compatible avec la localisation,

$$\mathrm{Ext}_A^p(\Omega^{n-p}(A/J), \Omega^n(A)) = A/J \tag{3.5}$$

En effet, $\Omega^{n-p}(A/J)$ est un (A/J)-module libre de rang 1, de même $\Omega^n(A)$ est un A-module libre de rang n, donc le premier membre est égal à

$$\mathrm{Ext}_A^p(A/J, A) \otimes \Omega^{n-p}(A/J)' \otimes \Omega^n(A)$$

(où le symbole "'" désigne le $(A/J$-module dual). La produit tensoriel des deux derniers facteurs s'identifie à $\bigwedge^p (J/J^2)$, donc le tout s'identifie à $\mathrm{Ext}_A^p(A/J, \bigwedge^p (J/J^2))$, donc, en vertu de la proposition, à

$$\mathrm{Hom}_A(\bigwedge^p J/J^2, \bigwedge^p J/J^2),$$

i.e. à A/J. En particulier, il y a dans $\mathrm{Ext}_A^p(\Omega^{n-p}(A/J)), \Omega^n(A)$ un élément privilégié, correspondant à l'élément unité de A/J, appelé classe fondamentale de l'idéal J dans A. (Elle peut en fait se définir sous des conditions sensiblement plus larges). On peut mettre le corollaire 1 sous une forme plus géométrique et plus globale :

COROLLAIRE 2. - Soient X une variété non singulière sur un corps algébriquement clos $\underline{k}$, Y une sous-variété fermée non singulière de X, $\underline{O}_X$ le faisceau des anneaux locaux de X, $\underline{O}_Y$ la faisceau des anneaux locaux de Y considéré comme un faisceau quotient de $\underline{O}_X$. Soient n la dimension de X, $n-p$ celle de Y.

Soit $\underline{\Omega}_X$ (resp. $\underline{\Omega}_Y$) le faisceau des germes de formes différentielles régulières sur X (resp. Y). Alors on a des isomorphismes canoniques :

$$(3.6) \qquad \underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(\underline{\Omega}_Y^{n-p}, \underline{\Omega}_X^n) = \underline{O}_Y$$

ou encore

$$(3.6 \text{ bis}) \qquad \underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(\underline{O}_Y, \underline{\Omega}_X^n) = \underline{\Omega}_Y^{n-p}$$

La formule (3.6 bis) peut servir de définition de $\underline{\Omega}_Y^{n-p}$ pour Y variété singulière. De façon précise :

PROPOSITION 5. - Soit Y un sous-ensemble algébrique de dimension $q = n - p$ dans une variété algébrique non singulière X de dimension n. Soient F un faisceau algébrique cohérent sur X de support contenu dans Y, et L un faisceau algébrique localement libre sur X. Alors les faisceaux $\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\underline{O}_X}(F, L)$ sont nuls pour $i < p$, tandis que pour $i = p$, on a un isomorphisme canonique

$$(3.7) \qquad \underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(F, L) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(F, \underline{\mathrm{Ext}}^p(\underline{O}_X/J, L))$$

où J désigne un faisceau d'idéaux arbitraire sur X annulant F et dont l'ensemble des zéros soit Y. En particulier, si F est un faisceau algébrique cohérent sur Y, on a

$$(3.7 \text{ bis}) \qquad \underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(F, L) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_Y}(F, \underline{\mathrm{Ext}}^p(\underline{O}_Y, L)) .$$

Enfin, F étant toujours un faisceau algébrique cohérent sur Y, les faisceaux $E^i(F) = \underline{\mathrm{Ext}}^{p+i}_{\underline{O}_X}(F, \underline{\Omega}_X^n)$ ne dépendent pas de la façon d'immerger l'espace algébrique Y dans une variété non singulière X.

La question étant locale, on peut supposer X affine et $L = \underline{O}_X$. Cela ramène à une question d'algèbre commutative, et même d'algèbre locale : Si A est une localité régulière, M un A-module dont le support est de dimension $\leq q = n - p$ prouver que $\mathrm{Ext}^i_A(M, A) = 0$ pour $i < p$, et $\mathrm{Ext}^p_A(M, A) = \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Ext}^p(A/J, A))$, où J est un idéal quelconque de "dimension" $\leq q$ annulant M. Pour le premier point, on procède par récurrence sur q : un dévissage immédiat ramène au cas où M est de la forme A/J, puis, en remplaçant J par un idéal plus petit et utilisant l'hypothèse de récurrence, et la suite exacte des Ext, au cas où J est engendré par un "système de paramètres" comme dans la proposition 4 et où le résultat est immédiat. Le résultat précédent implique que si J est un idéal fixé de "dimension" $\leq q$, alors le foncteur contravariant $E(M) = \mathrm{Ext}^p_A(M , A)$ sur la catégorie des A/J-modules est exact à gauche; de plus il transforme sommes directes en produits directs, d'où résulte facilement que $E(M) = \mathrm{Hom}_A(M , E(A))$. Enfin, la dernière assertion de la proposition 5 est plus subtile, et résulte d'une caractérisation intrinsèque des $E^i(F)$ à l'aide d'un théorème de dualité locale qui ne peut être donné ici.

COROLLAIRE. - Désignons par $\underline{\omega}_Y^q$ le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(\underline{O}_Y , \underline{\Omega}_X^n)$. Alors on a un isomorphisme fonctoriel pour les faisceaux algébriques cohérents F sur Y :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(F , \underline{\Omega}_X^n) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(F , \underline{\omega}_Y^q) \tag{3.8}$$

4. Classe de cohomologie associée à une sous-variété.

Dans toute la suite, X désigne un ensemble algébrique de dimension n , défini sur un corps $\underline{k}$, que nous supposerons algébriquement clos pour simplifier. Sauf au n° 6, X est supposée non singulière. On désigne par $\underline{O}_X$ le faisceau des anneaux locaux sur X , par $\underline{\Omega}_X^* = \bigcup_p \underline{\Omega}_X^p$ le faisceau des germes de formes différentielles sur X . Si Y est une partie fermée de X , on identifie les faisceaux algébriques cohérents sur Y à des faisceaux cohérents sur X nuls hors de Y ; il en est en particulier ainsi de $\underline{O}_Y$ et $\underline{\Omega}_Y$.

LEMME 1. - Soient F un faisceau algébrique cohérent sur X dont le support est de dimension $\leq n - p$, L un faisceau algébrique cohérent localement libre sur X . Alors $\mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(X ; F , L)$ est nul pour $i < p$, et on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^p_{\underline{O}}(X ; F , L) = H^0(X , \underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}}(F , L)) \tag{4.1}$$

Si F est un faisceau algébrique cohérent sur une partie fermée Y de X de dimension $\leq n - p$, on a un isomorphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(F , L) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(F \otimes L' \otimes \underline{\Omega}_X^n , \underline{\omega}_Y^{n-p}) \tag{4.1 bis}$$

où $\underline{\omega}_Y^{n-p}$ est le faisceau sur Y défini dans le corollaire à proposition 5, (qui s'identifie à $\underline{\Omega}_Y^{n-p}$ si Y est non singulière).

La formule (4.1) est une conséquence immédiate de la suite spectrale de la proposition 1, et de la proposition 5; en vertu de la formule (3.8) on peut écrire

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(F,L) = L\otimes(\underline{\Omega}^n_X)' \otimes \underline{\mathrm{Ext}}_{\underline{O}_X}(F,\underline{\Omega}^n_X) = L\otimes(\underline{\Omega}^n_X)' \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(F,\underline{\omega}^q_Y) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(F\otimes L'\otimes\underline{\Omega}^n_X,\underline{\omega}^q_Y)$$

où $q = n - p$, d'où la formule (4.1 bis).

Faisons en particulier $F = \underline{O}_Y$, $L = \underline{\Omega}^p_X$, on trouve, compte tenu que $\underline{\Omega}^n_X \otimes (\underline{\Omega}^p_X)' = \underline{\Omega}^{n-p}_X$, un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^p_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{O}_Y\ ,\ \underline{\Omega}^p_X) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{\Omega}^{n-p}_X\ ,\ \underline{\omega}^{n-p}_Y) \tag{4.2}$$

Supposons maintenant Y <u>non singulière</u> pour simplifier, donc $\underline{\omega}^{n-p}_Y = \underline{\Omega}^{n-p}_Y$.
On a un homomorphisme naturel de $\underline{\Omega}^{n-p}_X$ dans $\underline{\Omega}^{n-p}_{Y'}$ d'où une section canonique s_Y du faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(\underline{O}_Y\ ,\ \underline{\Omega}^p_X)$, que nous appellerons, si toutes les composantes de Y sont de dimension $n - p$, <u>section fondamentale</u> du faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(\underline{O}_Y\ ,\ \underline{\Omega}^p_X)$
Cette section définit en vertu de (4.1) un élément de $\mathrm{Ext}^p_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{O}_Y\ ,\ \underline{\Omega}^p_X)$. Or l'homomorphisme naturel $\underline{O}_X \to \underline{O}_Y$ définit un homomorphisme

$$\mathrm{Ext}^p_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{O}_Y\ ,\underline{\Omega}^p_X) \to \mathrm{Ext}^p_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{O}_X\ ,\ \underline{\Omega}^p_X) = H^p(X\ ,\ \underline{\Omega}^p_X)\ .$$

On obtient ainsi un élément de $H^p(X\ ,\ \underline{\Omega}^p_X)$, noté $P_X(Y)$ et appelé <u>classe de cohomologie de</u> Y <u>dans</u> X. Elle est donc déduite de la section s_Y de $\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(\underline{O}_Y\ ,\ \underline{\Omega}^p_X)$ par le diagramme d'homomorphismes suivants :

$$H^p(X\ ,\underline{\Omega}^p_X) = \mathrm{Ext}^p_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{O}_X\ ,\underline{\Omega}^p_X) \leftarrow \mathrm{Ext}^p_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{O}_Y\ ,\underline{\Omega}^p_X) \xrightarrow{\sim} H^0(X\ ,\ \underline{\mathrm{Ext}}^p_{\underline{O}_X}(O_Y,\underline{\Omega}^p_X)) \tag{4.3}$$

Appelons <u>cycle non singulier</u> de dimension $n - p$ un élément du groupe abélien libre engendré par les sous-variétés irréductibles non singulières de dimension $n - p$ dans X. Alors la fonction $Y \to P(Y)$ se prolonge en un homomorphisme du groupe des cycles non singuliers de dimension $n - p$ sur X, dans le groupe $H^p(X\ ,\underline{\Omega}^p_X)$.

Soient Z^{n-p} et $Z'^{n-p'}$ des cycles non singuliers de dimension $n - p$ et $n - p'$, on dit qu'ils se <u>coupent transversalement</u>, si toute composante de Z coupe transversalement toute composante de Z'. Alors le cycle $Z.Z'$ est défini, c'est un cycle non singulier de dimension $n - p - p'$. Ceci dit, on a le

THÉORÈME 1. - <u>Si</u> Z^{n-p} <u>et</u> $Z'^{n-p'}$ <u>sont des cycles non singuliers qui se coupent transversalement, alors on a</u>

$$P_X(Z.Z') = P_X(Z).P_X(Z') \tag{4.4}$$

<u>où le produit du deuxième membre est le cup-produit</u>

$$H^p(X\ ,\ \underline{\Omega}_X^p) \times H^{p'}(X\ ,\ \underline{\Omega}_X^{p'}) \rightarrow H^{p+p'}(X\ ,\ \underline{\Omega}_X^{p+p'})\ .$$

(On suppose que X est isomorphe à une partie localement fermée d'un espace projectif)

Cette dernière hypothèse nous sert uniquement pour pouvoir conclure que tout faisceau algébrique cohérent sur X est quotient d'un faisceau algébrique cohérent localement libre (SERRE), donc admet une résolution gauche par des faisceaux localement libres. Pour prouver le théorème 1, on peut supposer que Z et Z' sont des sous-variétés irréductibles non singulières Y et Y' se coupant transversalement. Soit L_* une résolution gauche de $\underline{O}_Y$ par des faisceaux localement libres, alors en vertu de proposition 3, le diagramme d'homomorphismes (4.3) s'identifie au diagramme

$$R^p\Gamma(\underline{\Omega}_X^p) \xleftarrow{\alpha} (\underline{\underline{R}}^p\Gamma)\ (\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(L_*\ ,\ \underline{\Omega}_X^p)) \xrightarrow[\sim]{\beta} \Gamma(H^p(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(L_*\ ,\ \underline{\Omega}_X^p)))$$

où Γ est le foncteur "groupe des sections" sur la catégorie des faisceaux abéliens sur X , et $\underline{\underline{R}}^p\Gamma$ désigne l'hypercohomologie de dimension p dudit foncteur, et $R^p\Gamma$ son p-ième foncteur dérivé. On supposera pour simplifier que $L_o = \underline{O}_X$ et que l'augmentation $L_o \rightarrow O_Y$ est l'homomorphisme naturel (ce qui est loisible), alors α est déduit de l'homomorphisme de complexes $\underline{O}_X \rightarrow L$ ($\underline{O}_X$ étant considéré comme un complexe réduit au degré 0), compte tenu que $\underline{R}^p\Gamma(K) = R^p\Gamma(K_o)$ si K est un complexe de faisceaux réduit au degré 0 . L'homomorphisme β est un "edge-homomorphism" bien connu. Considérons un diagramme analogue, relatif à une résolution localement libre L'_* de $\underline{O}_{Y'}$, et considérons le diagramme commutatif d'accouplements :

$$\left\{\begin{array}{ccccc}
R^p\Gamma(\underline{\Omega}_X^p) & \longleftarrow & \underline{\underline{R}}^p\Gamma(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(L_*\ ,\underline{\Omega}_X^p)) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(H^p(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(L_*\ ,\underline{\Omega}_X^p))) \\
\times & & \times & & \times \\
R^{p'}\Gamma(\underline{\Omega}_X^{p'}) & \longleftarrow & \underline{\underline{R}}^{p'}\Gamma(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(L'_*\ ,\underline{\Omega}_X^{p'})) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(H^{p'}(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(L'_*\ ,\underline{\Omega}_X^{p'}))) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
R^{p+p'}\Gamma(\underline{\Omega}_X^{p+p'}) & \longleftarrow & \underline{\underline{R}}^{p+p'}\Gamma(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(L_*\otimes L'_*\ ,\underline{\Omega}_X^{p+p'})) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(H^{p+p'}(\mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(L_*\otimes L'_*,\underline{\Omega}_X^{p+p'})))
\end{array}\right. \tag{4.5}$$

Les accouplements des deux colonnes de droite sont déduits de l'accouplement de complexes de faisceaux

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(L_*, \underline{\Omega}_X^p) \times \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(L'_*, \underline{\Omega}_X^{p'}) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(L_* \otimes L'_*, \underline{\Omega}_X^{p+p'})$$

que l'on définit à l'aide du produit extérieur $\underline{\Omega}_X^p \times \underline{\Omega}_X^{p'} \to \underline{\Omega}_X^{p+p'}$. L'accouplement de la première colonne est le cup-produit (relatif au produit extérieur). Je dis que la dernière ligne de (4.5) s'identifie au diagramme d'isomorphismes analogue à (4.3), où Y est remplacé par $Y \cap Y'$ et p par $p + p'$. Pour ceci, il suffit de montrer que $L \otimes L'$ est une résolution (évidemment localement libre) de $\underline{O}_{Y \cap Y'}$. Or on a en effet

$$H_0(L \otimes L') = \underline{O}_Y \otimes \underline{O}_{Y'} = \underline{O}_{Y \cap Y'}$$

et

$$H_i(L \otimes L') = \mathrm{Tor}_i^{\underline{O}_X}(\underline{O}_Y, \underline{O}_{Y'}) = 0$$

pour $i > 0$, du fait que Y et Y' se coupant transversalement. Le théorème 1 résulte maintenant de la formule :

$$s_Y . s_{Y'} = s_{Y.Y'} \tag{4.6}$$

(où le produit du premier membre est celui de la dernière colonne de (4.5)). Cette formule (4.6), de nature purement locale, se vérifie sans difficultés en prenant pour L_* et L'_* les résolutions envisagées dans proposition 4. On démontre de même (par une démonstration plus facile) que $Z \to P_X(Z)$ est compatible avec le produit cartésien :

$$P_{X \times X'}(Z \times Z') = P_X(Z) \otimes P_{X'}(Z') \tag{4.7}$$

(formule valable si Z resp. Z' , est un cycle non singulier sur la variété non singulière X , resp. X', $Z \times Z'$ étant considéré comme un cycle non singulier sur $X \times X'$). De (4.4) et (4.7) on déduit que $P_X(Z)$ est aussi compatible avec l'opération "image inverse" par un morphisme de variétés non singulières $f : X \to X'$:

$$P_X(f^{-1}(Z')) = f^*(P_{X'}(Z)) \tag{4.8}$$

formule valable si Z est un cycle non singulier sur X' tel que f soit "transversale" à Z , i.e. tel que le graphe de f soit transversal au cycle $X \times Z'$ dans $X \times X'$.

COROLLAIRE 1. - Soient X , X' deux variétés non singulières localement fermées dans un espace projectif, supposons X' complète. Soient U un cycle non singulier sur $X \times X'$, a et b deux points de X' tels que U coupe transversalement les cycles $X \times (a)$ et $X \times (b)$, soient Z et Z' les cycles non singuliers sur X tels que $Z \times (a) = (X \times (a)).U$, $Z \times (b) = (X \times (b)).u$. Alors on a

$$P_X(Z) = P_X(Z') .$$

En effet, soit $f_a : X \longrightarrow X \times X'$ défini par $f_a(x) = (x , a)$, on a alors en vertu de (4.8) la formule $P(Z) = f_a^*(P(U))$, de même $P(Z') = f_b^*(P(U))$. Or, utilisant la formule de Künneth

$$H^*(X \times X' , \Omega^*_{X \times X'}) = H^*(X , \Omega^*_X) \otimes H^*(X' , \Omega^*_{X'})$$

et le fait que $H^0(X' , \Omega_{X'})$ est réduit aux scalaires, on obtient facilement $f_a^* = f_b^*$, d'où la conclusion.

Pour tout $x \in X$, (x) est une sous-variété non singulière de X de codimension n , et définit donc un élément ε_x de $H^n(X , \Omega^n_X)$. Si X est une variété projective non singulière, il résulte du corollaire 1 que ε_x ne dépend pas du point x choisi, on le note ε_X et on l'appelle classe fondamentale de $H^n(X , \Omega^n_X)$.

REMARQUE. - Pour avoir une théorie satisfaisante, il faudrait définir $P_X(Z)$ pour des cycles Z quelconques, et prouver le théorème 1 pour une intersection propre de cycles. (Au moment d'écrire cet exposé, cela n'est pas encore fait en toute généralité). Admettant que cela est fait, le corollaire 1 devient : si Z et Z' sont deux cycles algébriquement équivalents, alors $P_X(Z) = P_X(Z')$ (énoncé qui ne semble par résulter de ce qui précède, même si Z et Z' sont non singuliers).

5. La théorème de dualité.

Dans ce numéro, X désigne une variété projective non singulière de dimension n .

THÉORÈME 2. - La classe fondamentale ε_X de $H^n(X , \Omega^n_X)$ est une base de cet espace vectoriel.

(La démonstration sera donnée plus bas). Moyennant le théorème précédent on peut donc identifier $H^n(X , \Omega^n_X)$ au corps $\underline{k}$. Considérons maintenant les accouplements envisagés au n° 2, qui donnent en particulier un accouplement

$$\mathrm{Ext}^p_{\underline{O}_X}(X\,;\,\underline{O}_X\,,\,F)\times \mathrm{Ext}^{n-p}_{\underline{O}_X}(X\,;\,F\,,\,\underline{\Omega}^n_X)\to \mathrm{Ext}^n_{\underline{O}_X}(X\,;\,\underline{O}_X\,,\,\underline{\Omega}^n_X)\,,\quad \text{i.e.}$$

$$H^p(X\,,\,F)\times \mathrm{Ext}^{n-p}_{\underline{O}_X}(X\,;\,F\,,\,\underline{\Omega}^n_X)\to H^n(X\,,\,\underline{\Omega}^n_X) \tag{5.1}$$

Compte tenu du théorème 2, cet accouplement définit un homomorphisme

$$\mathrm{Ext}^{n-p}_{\underline{O}_X}(X\,;\,F\,,\,\underline{\Omega}^n_X)\to (H^p(X\,,\,F))' \tag{5.2}$$

Cet homomorphisme est fonctoriel en F, et permute aux homomorphismes cobords relatifs aux suites exactes $0\to F'\to F\to F''\to 0$.

THÉORÈME 3. - L'homomorphisme (5.2) est un isomorphisme.

On retrouve en particulier le résultat de Serre :

COROLLAIRE. - Soient E un fibré vectoriel algébrique sur X, $\underline{O}_X(E)$ le faisceau des germes de sections régulières de E, on a alors des isomorphismes canoniques :

$$(H^p(X\,,\,\underline{O}_X(E)))' = H^{n-p}(X\,,\,\underline{\Omega}^n_X\otimes \underline{O}_X(E')) \tag{5.3}$$

Il suffit d'appliquer le théorème 3 et le corollaire 1 à la proposition 1.

Les théorèmes 2 et 3 vont résulter de l'énoncé suivant :

(D) L'homomorphisme suivant

$$\mathrm{Ext}^{n-p}_{\underline{O}_X}(X\,;\,F\,,\,\underline{\Omega}^n_X)\to (H^p(X\,,\,F))'\otimes L\qquad (L=H^n(X\,,\,\underline{\Omega}^n_X))\,, \tag{5.2 bis}$$

déduit de l'accouplement (5.1) est un isomorphisme.

Montrons en effet que (D) implique le théorème 2. Soit $\underline{k}_x=\underline{O}_{(x)}$ le faisceau des anneaux locaux de la variété réduite au point $x\in X$, considérons l'homomorphisme canonique $\underline{O}_X\to \underline{k}_x$ et l'homomorphisme associé

$$H^o(X\,,\,\underline{O}_X)\to H^o(X\,,\,\underline{k}_x) \tag{5.3}$$

son transposé s'identifie à l'homomorphisme

$$\mathrm{Ext}^n_{\underline{O}_X}(X\,;\,\underline{k}_x\,,\,\underline{\Omega}^n_X)\otimes L'\to \mathrm{Ext}^n_{\underline{O}_X}(X\,;\,\underline{O}_X\,,\,\underline{\Omega}^n_X)\otimes L' \tag{5.4}$$

déduit de l'homomorphisme sur les Ext^n associé à $\underline{O}_X\to \underline{k}_x$:

$$\mathrm{Ext}^n_{\underline{O}_X}(X\,;\,\underline{k}_x\,,\,\underline{\Omega}^n_X)\to \mathrm{Ext}^n_{\underline{O}_X}(X\,;\,\underline{O}_X\,,\,\underline{\Omega}^n_X)=H^n(X\,,\,\underline{\Omega}^n_X) \tag{5.5}$$

Comme (5.3) est un isomorphisme, il en est de même de (5.4), donc aussi de (5.5). Comme $\varepsilon_{(x)}$ est une base de $\mathrm{Ext}^n_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{k}_x\ ,\ \underline{\Omega}^n_X)$ en vertu de (4.2), il s'ensuit bien que son image ε_X est une base de $H^n(X\ ,\ \underline{\Omega}^n_X)$.

Reste à prouver l'énoncé (D), qui résultera de façon purement formelle des faits élémentaires résumés dans les lemmes suivants. On y suppose que X est une partie fermée (singulière ou non) de l'espace projectif P de dimension r . On utilise la notation $\underline{O}_P(m)$ pour le faisceau sur P noté $\underline{O}(m)$ dans [3], et la notation $\underline{O}_X(m)$ pour le faisceau analogue sur X .

LEMME 2. - <u>L'énoncé</u> (D) <u>est vrai si</u> $X = P$ <u>et</u> $F = \underline{O}_P(m)$

Ce lemme se vérifie par un calcul direct. Le calcul explicite des $H^i(P\ ,\ \underline{O}_P(m))$ se trouve dans [3], mais il peut se faire plus élémentairement. La computation du cup-produit $H^i(P\ ,\ \underline{O}_P(m)) \times H^j(P\ ,\ \underline{O}_P(m')) \rightarrow H^{i+j}(P\ ,\ \underline{O}_P(r + r'))$ nécessaire pour expliciter l'accouplement (5.1) n'offre pas de difficultés.

LEMME 3. - <u>Tout faisceau algébrique cohérent</u> F <u>sur</u> X <u>est isomorphe à un faisceau quotient d'un faisceau</u> $\underline{O}_X(-m)^k$, <u>où on peut supposer</u> m <u>aussi grand que l'on veut.</u>

Résulte du fait que $F \otimes \underline{O}_X(m)$ est "engendré par ses sections" pour m grand, cf [3].

LEMME 4. - <u>Soit</u> $i > 0$. <u>Alors</u> $H^{r-i}(P\ ,\ \underline{O}_P(-m)) = 0$ <u>pour</u> m <u>grand</u> ; <u>et pour tout faisceau algébrique cohérent</u> B <u>sur</u> X , <u>on a</u> $\mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{O}_X(-m)\ ,\ B) = 0$ <u>pour</u> m <u>grand</u>.

Le premier énoncé résulte des calculs explicites mentionnés plus haut, pour le deuxième on note qu'on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(X\ ;\ \underline{O}_X\ (-m)\ ,\ B) = H^i(X\ ,\ B \otimes \underline{O}(m))$$

(proposition 1, corollaire 1), d'où la conclusion en vertu d'un résultat bien connu de [3]. Conjuguant les deux lemmes précédents, on trouve le

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> $i > 0$. <u>Alors le foncteur</u> $F \rightarrow H^{r-i}(P\ ,\ F)$ <u>sur la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur</u> P <u>est coeffaçable, et il en est de même du foncteur</u> $\mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(X\ ;\ F\ ,\ B)$ <u>sur la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur</u> X .

LEMME 5. – <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>deux faisceaux algébriques cohérents sur</u> X , <u>posons</u> $A(m) = A \otimes \underline{O}_X(m)$. <u>Alors pour</u> m <u>assez grand, l'homomorphisme canonique</u>

$$\mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(X\ ;\ A(-m)\ ,\ B) \to H^0(X\ ,\ \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\underline{O}_X}(A(-m)\ ,\ B)) = H^0(X\ ,\ \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\underline{O}_X}(A\ ,\ B)(m))$$

<u>est un isomorphisme</u>.

Cela résulte aussitôt de la suite spectrale de la proposition 1 appliquée à $A(-m)$ et B , puisque l'on aura

$$E_2^{p,q}(A(-m)\ ,\ B) = H^p(X\ ,\ \underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{O}_X}(A(-m)\ ,\ B)) = H^p(X\ ,\ \underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{O}_X}(A\ ,\ B)(m))\ ,$$

qui est nul pour $p > 0$ et m grand.

Démontrons alors (D) dans le cas où $X = P$. Nous prouvons d'abord que (5.2 bis) est un isomorphisme pour $p = n$; comme les deux membres sont alors des foncteurs exacts à gauche (puisque $H^{r+1}(P\ ,\ F) = 0$) , il résulte du lemme 3 qu'il suffit de prouver l'assertion pour $F = \underline{O}_P(-m)$, or elle est alors contenue dans le lemme 2. Comme les homomorphismes (5.2 bis) sont fonctoriels et compatibles avec les opérateurs cobords, et que pour $p < n$ les deux membres de (5.2 bis) sont des foncteurs coeffaçables en F (corollaire du lemme 4), il s'ensuit alors par un raisonnement standard que (5.2 bis) est un isomorphisme pour tout p . Cela prouve le théorème de dualité pour l'espace projectif.

Supposons maintenant X quelconque, mais non singulier. D'après le théorème de dualité pour P , on a un isomorphisme,

$$H^n(X\ ,\ F)' = H^n(P\ ,\ F)' = \mathrm{Ext}^{r-n}_{\underline{O}_P}(P\ ;\ F\ ,\ \underline{\Omega}^r_P)$$

En vertu du lemme 1 (n° 4) le dernier membre s'identifie à

$$\mathrm{Hom}_{\underline{O}_P}(P\ ;\ F\ ,\ \underline{\omega}^n_X) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(X\ ;\ F\ ,\ \underline{\Omega}^n_X) = \mathrm{Ext}^0_{\underline{O}_X}(X\ ;\ F\ ,\ \underline{\Omega}^n_X)$$

d'où un isomorphisme

$$H^n(X\ ,\ F)' = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(X\ ;\ F\ ,\ \underline{\Omega}^n_X) = \mathrm{Ext}^0_{\underline{O}_X}(X\ ;\ F\ ,\ \underline{\Omega}^n_X) \tag{5.6}$$

Faisant $F = \underline{\Omega}^n_X$, on trouve un isomorphisme

$$\eta : H^n(X\ ,\ \underline{\Omega}^n_X) \xrightarrow{\sim} \underline{k} \tag{5.7}$$

On vérifie que l'isomorphisme (5.6) n'est autre que (5.2 bis) pour $p = n$, quand on y fait $L = \underline{k}$ grâce à (5.7). Par suite, (5.2 bis) est un isomorphisme pour $p = n$. Pour prouver que c'est un isomorphisme pour tout p, il suffit encore de prouver que pour $p < n$, les deux membres de (5.2 bis) sont des foncteurs coeffaçables en F, et a fortiori (compte tenu du lemme 3) que les deux membres sont nuls quand on fait $F = \underline{O}_X(-m)$ avec m grand. Or pour le premier membre cela est vrai en vertu du lemme 4, et pour le deuxième membre on écrit, utilisant le théorème de dualité sur P :

$$H^p(X, \underline{O}_X(-m))' = \mathrm{Ext}^{r-p}_{\underline{O}_P}(P ; \underline{O}_X(-m), \underline{\Omega}^r_P) .$$

Le deuxième membre est nul pour $p < n$ et m grand, comme il résulte du lemme 5 (où on fait $X = P$) et du fait que $\underline{O}_X$ est en tant que faisceau algébrique cohérent sur P, de dimension cohomologique $\leq r - n$, (car X est non singulière) d'où

$$\underline{\mathrm{Ext}}^{r-p}_{\underline{O}_P}(\underline{O}_X , \underline{\Omega}^r_P) = 0 \qquad \text{pour } p < n .$$

6. <u>Le théorème de dualité pour les variétés singulières.</u>

Soit X une partie fermée de dimension n de l'espace projectif P de dimension r. La formule (5.6) doit s'écrire ici

$$(6.1) \qquad H^n(X, F)' \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(X ; F, \underline{\omega}^n_X) = \mathrm{Ext}^0_{\underline{O}_X}(X ; F, \underline{\omega}^n_X)$$

où on a posé

$$(6.2) \qquad \underline{\omega}^n_X = E^0(\underline{O}_X) = \underline{\mathrm{Ext}}^{r-n}_{\underline{O}_P}(\underline{O}_X , \underline{\Omega}^r_P)$$

Comme il a été dit dans la proposition 5, le faisceau ainsi introduit ne dépend pas en fait de l'immersion choisie de X dans une variété non singulière P. Faisant, dans (6.1), $F = \underline{\omega}^n_X$, on trouve

$$(6.2) \qquad H^n(X, \underline{\omega}^n_X)' \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(X ; \underline{\omega}^n_X , \underline{\omega}^n_X)$$

d'où l'existence d'un élément privilégié dans $H^n(X, \underline{\omega}^n_X)'$, correspondant à l'homomorphisme identique de $\underline{\omega}^n_X$ dans lui-même :

$$(6.3) \qquad \eta : H^n(X, \underline{\omega}^n_X) \to \underline{k}$$

Considérons alors les accouplements définis par la composition des Ext :

$$H^p(X\,,\,F)\times \mathrm{Ext}^{n-p}_{\underline{O}_X}(X\,;\,F\,,\,\underline{\omega}^n_X)\to H^n(X\,,\,\underline{\omega}^n_X) \tag{6.4}$$

et composons-les avec l'homomorphisme η de (6.3), on obtient des homomorphismes fonctoriels, compatibles avec les opérateurs bord :

$$\mathrm{Ext}^{n-p}_{\underline{O}_X}(X\,;\,F\,,\,\underline{\omega}^n_X)\to H^p(X\,,\,F)' \tag{6.5}$$

(généralisant (5.2)). On vérifie que pour $p = n$, on obtient ainsi l'isomorphisme (6.1). Ceci posé, on a le

THÉORÈME 3 bis. - <u>Les quatre conditions suivantes sur</u> X <u>sont équivalentes pour un entier</u> $k \geqslant 0$ <u>donné</u> :

i. <u>L'homomorphisme fonctoriel</u> (6.5) <u>est un isomorphisme pour</u> $n - k \leq p \leq n$.

ii. <u>On a</u> $H^p(X\,,\,\underline{O}_X(-m)) = 0$ <u>pour</u> m <u>grand et pour</u> $n - k \leq p < n$.

iii. <u>Le foncteur</u> $H^p(X\,,\,F)$ <u>sur la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur</u> X <u>est coeffaçable pour</u> $n - k \leq p < n$.

iv. <u>On a</u> $E^i(\underline{O}_X) = \underline{\mathrm{Ext}}^{r-n+i}_{\underline{O}_P}(\underline{O}_X\,,\,\underline{\omega}^r_P) = 0$ <u>pour</u> $0 < i \leq k$.

DÉMONSTRATION. - i. $\Rightarrow$ ii. en vertu du lemme 4, ii. $\Rightarrow$ iii. en vertu du lemme 3, iii. $\Rightarrow$ i. par un raisonnement standard bien connu, compte tenu que les deux membres de (6.5) sont alors des foncteurs coeffaçables pour $n - k \leq p < n$ (le premier l'étant en vertu du lemme 4). Enfin prouvons ii. $\Leftrightarrow$ iv. Cela résulte du corollaire à la proposition qui suit :

PROPOSITION 6. - <u>Soit</u> F <u>un faisceau algébrique cohérent sur</u> X , <u>et soit</u> i <u>un entier. Alors pour</u> m <u>assez grand, on a un isomorphisme</u> :

$$H^i(X\,,\,F(-m))' \simeq H^0(X\,,\,E^{n-i}(F)(m))\,, \tag{6.6}$$

<u>où on pose</u> (comparer n° 3, proposition 5) :

$$E^j(F) = \underline{\mathrm{Ext}}^{r-n+j}_{\underline{O}_P}(F\,,\,\underline{\Omega}^r_P) \tag{6.7}$$

En effet, en vertu du théorème de dualité sur P , le premier membre de (6.6) est isomorphe à $\mathrm{Ext}^{r-i}_{\underline{O}_P}(P\,;\,F(-m)\,,\,\Omega^r_P)$, donc (6.6) résulte du lemme 5.

COROLLAIRE. - Pour qu'on ait $H^i(X, F(-m)) = 0$ pour m grand, il faut et il suffit que $E^{n-i}(F) = 0$.

Rappelons que les $E^j(F)$ ne dépendent pas en fait de l'immersion projective envisagée. La condition du corollaire est de nature purement locale, par suite, si elle est vérifiée pour F, elle l'est pour tout faisceau localement isomorphe à un faisceau F^n. En particulier, si cette condition est vérifiée pour $\underline{O}_X$, elle l'est pour tout faisceau algébrique cohérent localement libre. C'est par exemple le cas pour tout $i < n$ si X est non singulière, pour $i = 0$ si aucune composante de X n'est réduite à un seul point, pour $i = 0, 1$ si S est normale et toutes ses composantes sont de dimension > 1 (cf. [3]). Pour qu'il en soit ainsi pour tout $i < k$, il faut et il suffit par définition que les anneaux locaux $\underline{O}_x$ $(x \in X)$ soient de "codimension homologique" $\geq k$ (cf [4] pour cette notion). Si $k = n$, cela signifie en vertu du théorème 3 bis que le théorème de dualité est vrai pour X, i.e. que (6.5) est un isomorphisme pour tout p et tout F. On peut donner de nombreuses conditions équivalentes sur les anneaux locaux $\underline{O}_x$ pour qu'il en soit ainsi (NAGATA), par exemple celle de vérifier le théorème d'équidimensionalité de Cohen-Macaulay. Il en est ainsi par exemple si localement X est une "intersection complète" dans une variété ambiante non singulière.

7. La dualité de Poincaré.

Soit X une variété projective non singulière de dimension n. Alors $H^*(X) = H^*(X, \underline{\Omega}_X^*)$ est une algèbre anticommutative bigraduée de dimension finie, que nous graduons par le degré total, $H^{p,q}(X) = H^p(X, \underline{\Omega}_X^q)$ étant donc de degré $p + q$. Les degrés de $H^*(X)$ sont compris entre 0 et $2n$. En vertu du théorème 2 et du corollaire au théorème 3, $H^*(X)$ est une "algèbre de Poincaré" de dimension $2n$, i.e. $H^{2n}(X)$ est muni d'un isomorphisme avec le corps de base $\underline{k}$, et le produit $H^m(X) \times H^{2n-m}(X) \to H^{2n}(X) = \underline{k}$ est une dualité entre $H^m(X)$ et $H^{2n-m}(X)$. De plus, si Y est une autre variété projective non singulière, la formule de Künneth pour les faisceaux algébriques cohérents donne

$$H^*(X \times Y) = H^*(X) \otimes H^*(Y) \tag{7.1}$$

isomorphisme compatible avec les structures d'algèbres de Poincaré. De plus, $H^*(X)$ est, en tant qu'algèbre commutative, un foncteur contravariant en X, un morphisme $f : Y \to X$ définissant de façon évidente un homomorphisme d'algèbres graduées

$$(7.2) \qquad f^* : H^*(X) \to H^*(Y)$$

Comme il s'agit d'algèbres de Poincaré, on obtient par transposition un homomorphisme d'espaces vectoriels :

$$(7.3) \qquad f_* : H^*(Y) \to H^*(X)$$

On a vu au n° 4 que l'effet de f^* sur les classes de cohomologie correspondant à des cycles non singuliers s'interprète géométriquement en prenant les classes de cohomologie qui correspondent à leurs images inverses. Il importe dans le cas actuel de montrer que (7.3) correspond de même à l'opération "image directe" de cycles. Cela résulte, sous des conditions de non singularité convenable du moins, du cas particulier suivant :

THÉORÈME 4. - Si f est l'application identique d'une sous-variété non singulière Y^m de X^n dans X^n, alors, désignant par 1_Y l'élément unité de $H(Y)$ on a

$$(7.4) \qquad f_*(1_Y) = P_X(Y)$$

où le deuxième membre est la classe de cohomologie dans X associée à Y.

Cette formule est équivalente à

$$(7.4 \text{ bis}) \qquad \langle \xi^{m,m} , P_X(Y) \rangle \, \varepsilon_Y = f_*(\xi^{m,m}) \qquad (\xi^{m,m} \in H^m(X , \underline{\Omega}_X^m))$$

où ε_Y est l'élément fondamental dans $H^m(Y , \Omega_Y^m)$, et constitue, dans le cas des variétés projectives non singulières, une nouvelle définition de la classe de cohomologie associée à Y. Pour démontrer le théorème 4, on interprète grâce au théorème 3 la transposée de l'homomorphisme

$$H^m(X , \underline{\Omega}_X^m) \to H^m(Y , \underline{\Omega}_Y^m) = H^m(X , \underline{\Omega}_Y^m)$$

comme l'homomorphisme

$$(7.5) \; H^{n-m}(X, \underline{\Omega}_X^{n-m}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{\underline{O}_X}^{n-m}(X; \underline{\Omega}_X^m, \underline{\Omega}_X^n) \longleftarrow \mathrm{Ext}_{\underline{O}_X}^{n-m}(X; \underline{\Omega}_Y^m, \underline{\Omega}_X^n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(X; \underline{\Omega}_Y^m, \underline{\Omega}_Y^m)$$

On vérifie que l'élément 1_Y du dual de $H^m(Y , \underline{\Omega}_Y^m)$ s'identifie à l'élément du membre de droite correspondant à l'endomorphisme identique de $\underline{\Omega}_Y^m$, et d'autre part que l'image de cet élément dans $H^{n-m}(X , \underline{\Omega}_X^{n-m})$ est bien $P_X(Y)$. Ces compatibilités, qui auraient pu être données dès le n° 4, peuvent s'énoncer, et sont valables en fait, pour des variétés non singulières quelconques, la deuxième la deuxième par exemple résultant de la commutativité du diagramme suivant d'endomorphismes canoniques :

$$(7.6)\quad \left\{\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ext}^{n-m}_{\underline{O}_X}(X\,;\,\underline{\Omega}^m_X\,,\,\underline{\Omega}^n_X) & \longleftarrow & \mathrm{Ext}^{n-m}_{\underline{O}_X}(X\,;\,\underline{\Omega}^m_Y\,,\,\underline{\Omega}^n_X) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(X\,;\,\underline{\Omega}^m_Y\,,\,\underline{\Omega}^m_Y) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \mathrm{Ext}^{n-m}_{\underline{O}_X}(X\,;\,\underline{O}_X\,,\,\underline{\Omega}^{n-m}_X) & \longleftarrow & \mathrm{Ext}^{n-m}_{\underline{O}_X}(X\,;\,\underline{O}_Y\,,\,\underline{\Omega}^{n-m}_X) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(X\,;\,\underline{\Omega}^m_X\,,\,\underline{\Omega}^m_Y) \end{array}\right.$$

On obtient ainsi un équivalent exact du formalisme de la dualité de Poincaré sur les variétés orientées compactes. En particulier, le théorème 4 permet de déterminer la classe de cohomologie associée à la diagonale de $X \times X$. Par un raisonnement bien connu, on en déduit par exemple une <u>formule de Lefschetz</u> :

THÉORÈME 5. - <u>Soit</u> f <u>un endomorphisme d'une variété projective non singulière</u> X, <u>telle que les points fixes de</u> f <u>soient de multiplicité</u> 1. <u>Alors le nombre de ces points fixes est congru,</u> mod <u>la caractéristique de</u> k <u>à la somme alternée des traces des endomorphismes des</u> $H^i(X)$ <u>définis par</u> f.

La restriction sur f qu'on a dû faire tient aux difficultés mentionnées dans la remarque du n° 4. On notera, toutefois, que la formule de Lefschetz reste vraie si f est "homotope" à un endomorphisme dont tous les points fixes sont de multiplicité 1.

8. <u>Généralisation du théorème de dualité</u>.

Soit X une variété algébrique non singulière telle que tout faisceau algébrique cohérent F sur X soit isomorphe à un quotient d'un faisceau algébrique cohérent localement libre (ce qui est le cas si X est localement fermé dans un espace projectif). Alors tout faisceau algébrique cohérent F sur X admet une résolution finie L par des faisceaux localement libres, et pour deux telles résolutions on peut toujours trouver une troisième, et un homomorphisme de celle-ci dans les deux premières compatibles avec les augmentations. De même, si L est une résolution finie localement libre de F, et si on se donné un homomorphisme $F' \to F$, alors il existe une résolution finie localement libre L' de F' et un homomorphisme $L' \to L$ compatible avec $F' \to F$, qu'on peut supposer surjectif si $F' \to F$ l'est. Cela permet de définir, étant donnés deux entiers $r , s \geq 0$, deux multifoncteurs, cohomologiques, en des arguments $A_1 , \dots , A_r \,;\, B_1 , \dots , B_s$

variant dans la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur X, et dont les valeurs sont dans la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur X, resp. dans la catégorie des modules sur $H^0(X, \underline{O}_X)$, par les formules :

$$(8.1)\quad \begin{cases} \underline{T}_r^{s*}(A_1, \dots A_r; B_1, \dots, B_s) = \underline{H}^*(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(\underline{L}(A_1) \otimes \dots \otimes \underline{L}(A_r), \underline{L}(B_1) \otimes \dots \otimes \underline{L}(B_s))) \\ T_r^{s*}(A_1, \dots, A_r; B_1, \dots, B_s) = \underline{\underline{R}}^* \Gamma(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(\underline{L}(A_1) \otimes \dots \otimes \underline{L}(A_r), \underline{L}(B_1) \otimes \dots \otimes \underline{L}(B_s))) \end{cases}$$

Dans cette formule, $\underline{L}(F)$ désigne une résolution finie localement libre du faisceau algébrique cohérent F, et $\underline{\underline{R}}^* \Gamma(K)$ désigne l'hypercohomologie de l'espace X par rapport au complexe de faisceaux K. Si r ou s est nul, on remplace le produit tensoriel des $\underline{L}(A_i)$, resp. des $\underline{L}(B_j)$, par $\underline{O}_X$. En particulier $\underline{T}_o^o$ et T_o^o sont des foncteurs gradués à 0 arguments, $\underline{T}_o^o$ se réduit au degré 0, où il est le faisceau $\underline{O}_X$, tandis que T_o^o est identique à $H^*(X, \underline{O}_X)$. Le fait que les deuxièmes membres de (8.1) ne dépendent pas des résolutions choisies est de toutes façons évident pour la première ligne (la question étant alors locale), et pour la deuxième résulte des remarques générales qui précédaient, compte tenu de la suite spectrale d'hypercohomologie du complexe de faisceaux $K = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(\underline{L}(A_1) \otimes \dots, \underline{L}(B_1) \otimes \dots)$, aboutissant à l'hypercohomologie de X par rapport à K, et dont le terme initial est $H^p(X, \underline{H}^q(K))$, i.e.

$$(8.2)\qquad E_2^{p,q} = H^p(X, (\underline{T}_r^s)^{(q)}(A_1, \dots, A_r; B_1, \dots, B_s))$$

On voit alors que cette suite spectrale elle-même ne dépend pas des résolutions choisies, son aboutissement est le premier membre de (8.1). On définit facilement les opérateurs cobords relatifs aux divers arguments A_i, B_j, en notant que toute suite exacte $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ peut se résoudre par une suite exacte de complexes finis localement libres.

On définit dans le système des foncteurs $\underline{T}_r^{s*}$, resp. T_r^{s*}, des opérations analogues à celles du calcul tensoriel, et dont la définition est immédiate à partir des formules de définition (8.1). Ainsi, on a une composition (généralisant celle envisagée dans le n° 2) :

$$(8.3)\quad T_r^{s*}(A_1, \dots, A_r; B_1, \dots, B_s) \times T_{r'}^{s'*}(A'_1, \dots, A'_{r'}; B'_1, \dots, B'_{s'}) \to T_{r+r'}^{s+s'*}(A_1, \dots, A'_{r'}; B_1, \dots, B'_{s'})$$

satisfaisant aux propriétés évidentes d'associativité, de compatibilité avec les homomorphismes fonctoriels et les homomorphismes cobords, les suites spectrales. De même, on a des opérations de symétrie qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter. On a de plus une opération de contraction chaque fois que l'un des arguments A_i

est égal à l'un des arguments B_j ;

$$(8.4)\qquad T_r^{s*}(A_1,\dots,A_{i-1},C,A_{i+1},\dots,A_r;B_1,\dots,B_{j-1},C,B_{j+1},\dots,B_s) \longrightarrow \\ \longrightarrow T_{r-1}^{s-1*}(A_1,\dots,\hat{A}_i,\dots,A_r;B_1,\dots,\hat{B}_j,\dots,B_s)$$

De plus, si un argument A_i est un faisceau localement libre, alors on peut l'enlever à condition de remplacer l'un des A_j $(j \neq i)$ par $A_j \otimes A_i$, ou l'un des B_k par $B_k \otimes A_i^!$ (où $A_i^! = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(A_i , \underline{O}_X)$) , et on a une règle de calcul analogue dans le cas où l'un des arguments B_j est localement libre. En particulier, on peut toujours enlever un argument qui est identique à $\underline{O}_X$. Si tous les arguments sont localement libres, sauf au plus un des arguments B_i, la règle qu'on vient d'énoncer donne un isomorphisme fonctoriel

$$(8.5)\qquad T_r^{s*}(A_1,\dots,A_r ; B_1,\dots,B_s) = H^*(X,A_1^! \otimes\dots\otimes A_r^! \otimes B_1 \otimes\dots\otimes B_s)$$

(car on est ramené au cas où $r = 0$, $s = 1$, où cela est immédiat : on peut aussi utiliser directement la suite spectrale de terme initial (8.2)). Des opérations correspondant aux précédentes se définissent pour les $\underline{\underline{E}}_r^s$. Les relations entre les diverses opérations ainsi introduites sont les mêmes que pour les opérations analogues en calcul tensoriel.

Soit n la dimension de X. En appliquant successivement une composition tensorielle (8.3) et des contractions (8.4) sur les arguments répétés, on obtient un accouplement

$$(8.6)\qquad (T_r^s)^p(A_1,\dots;B_1,\dots) \times (T_s^r)^{n-p}(B_1,\dots;A_1,\dots,A_r \otimes \underline{\Omega}_X^n) \longrightarrow H^n(X, \underline{\Omega}_X^n)$$

THÉORÈME 6. - Si X est une variété projective non singulière, alors les accouplements (8.6) sont des dualités.

Cela résulte de façon purement formelle du corollaire au théorème 3. Il résulte en effet facilement de ce corollaire que si K est un complexe de faisceaux algébriques cohérents localement libres, alors l'hypercohomologie de X par rapport à K est en dualité avec l'hypercohomologie de X par rapport à $K' \otimes \underline{\Omega}_X^n$ par les accouplements naturels

$$(8.7)\qquad \underline{\underline{R}}^p\Gamma(K) \times \underline{\underline{R}}^{n-p}\Gamma(K' \otimes \underline{\Omega}_X^n) \rightarrow \underline{\underline{R}}^n\Gamma(\underline{\Omega}_X^n) = H^n(X , \underline{\Omega}_X^n)$$

On le voit en utilisant la suite spectrale de terme initial $H^p(H^q(X , K))$ et la suite spectrale analogue pour $K' \otimes \underline{\Omega}_X^n$. Du résultat précédent, le théorème 6 se déduit en utilisant la définition (8.1).

REMARQUES.

1° Pour les définitions précédant le théorème 6, il n'était pas nécessaire que X soit non singulière, car il n'était pas indispensable de travailler seulement avec des résolutions <u>finies</u>. Mais si X est singulière on ne pourra plus affirmer, a priori, que les $(\underline{T}^s_r)^p(A_1, \dots ; B_1, \dots)$ soient des faisceaux <u>cohérents</u>, car dans le complexe de faisceaux

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(\underline{L}(A_1) \otimes \dots, \underline{L}(B_1) \otimes \dots)$$

il y aura une infinité de composantes de degré total donné.

2° On vérifie facilement que dans les formules (8.1), on peut remplacer <u>un</u> des $\underline{L}(B_i)$ par B_i. Compte tenu de la proposition 3, cela montre donc qu'on a

$$(8.8)\qquad \begin{cases} \underline{T}_1^{1*}(A ; B) = \underline{\mathrm{Ext}}^*_{\underline{O}_X}(A , B) \\ T_1^{1*}(A ; B) = \mathrm{Ext}^*_{\underline{O}_X}(X ; A , B) \end{cases}$$

En particulier faisant dans (8.6) $r = s = 1$ et $A_1 = \underline{O}_X$, on retrouve le théorème 3. La formule (8.8) implique aussi $T_0^{1*}(B) = H^*(X , B)$, $T_1^{0*}(A) = \mathrm{Ext}^*_{\underline{O}_X}(X ; A , \underline{O}_X)$

3° On voit sur la formule (8.1) qu'en général les foncteurs $\underline{T}^{s*}_r$ et T^{s*}_r ont des composantes de degrés positifs <u>et</u> négatifs. Utilisant la remarque 2, on voit que si la dimension de X est n, alors les composantes non nulles de $\underline{T}^{s*}_r$ sont comprises entre $-(s-1)n$ et rn, si $s > 0$, entre 0 et rn, si $s = 0$, et les composantes non nulles de T^{s*}_r sont comprises entre $-(s-1)n$ et $(r+1)n$, si $s > 0$, entre 0 et $(r+1)n$, si $s = 0$, (et sauf erreur même, si $r > 0$, entre $-(s-1)n$ et rn, resp. entre 0 et rn).

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTIER (Pierre). - Les groupes $\mathrm{Ext}^s(A , B)$, Séminaire A. Grothendieck : Algèbre homologique, t. 1, 1957, n° 3.

[2] GROTHENDIECK (Alexandre). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku math. J., t. 9, 1957, p. 119-183.

[3] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., t. 61, 1955, p. 197-278.

[4] SERRE (Jean-Pierre). - Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens, Proc. Intern. Symp. on alg. number Theory [1955. Tokyo et Nikko]. - Tokyo, Science Council of Japan, 1956 ; p. 175-189.

ADDITIF

Les difficultés signalées dans la remarque de la page 13 sont actuellement complètement résolues, grâce à une extension des théorèmes de dualité à des variétés quelconques (à singularités arbitraires). Pour cette théorie, qui peut se formuler dans le cadre général de la "théorie des schémas", nous renvoyons aux "Eléments de Géométrie algébrique" de J. DIEUDONNÉ et A. GROTHENDIECK, actuellement en préparation. On trouvera quelques indications dans :

GROTHENDIECK (A.). - Cohomology theory of algebraic varieties, Congrès int. des Mathématiciens, 1958, Edinburgh (A paraître).

[Avril 1959]