JACQUES-LOUIS LIONS

Problèmes aux limites relatifs à des équations de type elliptique

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. nº 110, p. 93-105

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__93_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1955)

PROBLÈMES AUX LIMITES RELATIFS À DES ÉQUATIONS DE TYPE ELLIPTIQUE

par Jacques-Louis LIONS

Introduction

Depuis longtemps les problèmes aux limites de type elliptique sont ramenés à des problèmes variationnels (cf. notamment COURANT-HILBERT [1]). Grâce aux distributions [12] , on peut ramener tous ces problèmes à des cas particuliers d'un procédé général. Ce procédé est donné au paragraphe 1 dans le cas de problèmes aux limites sur un ouvert Ω quelconque de R^n . Il n'y a aucune difficulté à appliquer cette méthode pour des systèmes différentiels, et sur des espaces de Riemann. Tout ceci s'étend à certaines variétés fibrées [9] .

Le paragraphe 2 se borne aux exemples les plus simples possibles (donc à des opérateurs différentiels du deuxième ordre) ceci dans le but d'éviter des difficultés techniques (qui tiennent surtout au grand nombre d'espaces fonctionnels que l'on utilise).

Le paragraphe 3 indique comment utiliser la théorie de RIESZ-FREDHOLM.

Le paragraphe 4 applique le théorème de HILLE-YOSIDA.

Tout ceci est un résumé de [6] , chapitre I.

Le procédé du paragraphe 1 permet d'étudier de larges classes de problèmes mixtes (au sens de H. HADAMARD) ; cf. [6] , chapitre II, et [8] . Ceci n'est pas étudié ici.

1. Problèmes aux limites (théorie générale)

Tous les espaces vectoriels introduits sont topologiques, localement convexes séparés.

On désigne par Ω un ouvert quelconque de R^n ; $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à supports compacts dans Ω , muni de la topologie habituelle [12] ; $\mathcal{D}'(\Omega)$ est le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, espace des distributions sur Ω ; $L^2(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur Ω ; si $f \in L^2(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} .$$

On donne maintenant deux espaces V et Q avec

(1) $$\mathcal{D}(\Omega) \subset V \subset Q \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

($E \subset F$ signifie : E contenu dans F avec une topologie plus fine), et on suppose que V est un espace de Hilbert. On suppose aussi que si $v \in V$ alors $\bar{v}$ est dans V ($\bar{v}$ distribution complexe conjugué de v). L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense ou non dans V il est dense dans Q. Il en résulte que le dual Q' de Q est un espace de distributions ;

(2) $$\mathcal{D}(\Omega) \subset Q' \subset \mathcal{D}'(\Omega) .$$

Lorsque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans V, on prendra : $V = Q$; il y a un isomorphisme canonique de V sur V', mais nous n'identifierons pas néanmoins V et V', sauf dans le cas : $V = L^2(\Omega)$.

1. Forme sesquilinéaire fondamentale.

On donne sur $V \times V$ une forme sesquilinéaire continue (linéaire en u, semi-linéaire en v) $u, v \to ((u, v))$.

Si u est donné dans V, la forme semi-linéaire $\varphi \to ((u, \varphi))$ est continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$, donc de la forme

(3) $$((u, \varphi)) = \langle \Lambda u, \bar{\varphi} \rangle, \quad \Lambda u \in \mathcal{D}'(\Omega)$$ (le crochet désignant la dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$). Par conséquent la forme $((u, v))$ définit un opérateur Λ, élément de $\mathcal{L}(V ; \mathcal{D}'(\Omega))$ (espace des applications linéaires continues de V dans $\mathcal{D}'(\Omega)$). Si $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans V, alors $\Lambda \in \mathcal{L}(V ; V')$.

L'opérateur Λ est l'opérateur défini par $((u, v))$; ce sera dans les applications, un opérateur différentiel. Notons déjà que la donnée de $((u, v))$ est davantage que la donnée de Λ.

2. Espace $\mathcal{H}$.

On désigne par $\mathcal{H}$ l'espace (peut-être réduit à $\{0\}$!) des $u \in V$ tels que $\Lambda u \in Q'$, muni de la topologie la moins fine rendant continues les applications $u \to u$ et $u \to \Lambda u$ de $\mathcal{H}$ dans V et Q'.

Evidemment, si $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans V, alors $\mathcal{H} = V$.

3. Espace N.

C'est le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$, ensemble des u tels que

(4) $$\langle \Lambda u, \bar{v} \rangle = ((u, v))$$

pour tout $v \in V$ (le crochet désigne la dualité entre Q' et Q).

$\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans V, $\mathcal{H} = V$ et même $N = V$; en effet (4) a lieu si $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, donc pour tout $v \in V$ par prolongement.

On verra sur les exemples que les fonctions de l'espace N sont des fonctions assujetties à certaines conditions aux limites.

4. Hypothèse d'ellipticité.

On décompose $((u , v))$ en sa partie hermitienne et anti-hermitienne :

$$((u , v)) = ((u , v))_1 + i((u , v))_2 ,$$

avec

$$2((u , v))_1 = ((u , v)) + \overline{((v , u))}$$

et

$$2i((u , v))_2 = ((u , v)) - \overline{((v , u))} .$$

On pose alors la définition fondamentale suivante :

DÉFINITION 1. - La forme $((u , v))$ est elliptique s'il existe $a > 0$ tel que, pour tout $u \in V$, on ait

(5) $$((u , u))_1 \geq a \|u\|_V^2$$

($\|u\|_V$ norme de u dans V).

On va maintenant démontrer le

THÉORÈME. - Si la forme $((u , v))$ est elliptique, l'opérateur Λ est un isomorphisme de N sur Q'.

La démonstration est facile : on a fait exactement les hypothèses convenables pour que cela marche. Donnons-la brièvement ; on cherche u dans N solution de

(6) $$\Lambda u = f , \quad f \text{ donné dans } Q' .$$

Ceci équivaut à trouver u dans V solution de

(7) $$((u , v)) = \langle f , \bar{v} \rangle \quad \text{pour tout } v \in V .$$

Or, $v \to \langle f , \bar{v} \rangle$ est une forme semi-linéaire continue sur V ; grâce à (5), $((u , v))_1$ définit sur V une structure hilbertienne de norme correspondante équivalente à $\|u\|_V$, donc

(8) $$\begin{cases} \langle f , \bar{v} \rangle = ((Jf , v))_1 \\ Jf \in V , \quad J \in \mathcal{L}(Q' ; V) \end{cases} .$$

De même

(9) $((u , v))_2 = ((Hu , v))_1$, $H \in \mathcal{L}(V ; V)$, hermitien pour la structure $((u , v))_1$. Alors (7) équivaut à :

(10) $(1 + iH)u = Jf$, qui admet une solution unique

(11) $u = Gf$, $G = (1 + iH)^{-1} J$

et $G \in \mathcal{L}(Q' ; N)$, d'où le théorème.

REMARQUES :

1° Si $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans V , alors Λ est un isomorphisme de V sur V' .

2° $G \circ \Lambda = 1$ dans $\mathcal{L}(N ; N)$, $\Lambda \circ G = 1$ dans $\mathcal{L}(Q' ; Q')$, $G \circ \Lambda$ est un projecteur P de $\mathcal{H}$ sur N ; le noyau de P est l'espace $\Lambda^{-1}(0) \cap \mathcal{H}$.

3° L'opérateur G est appelé l'opérateur de Green de la forme $((u , v))$. (On dit aussi : l'opérateur de Green de Λ , relativement aux conditions aux limites correspondant à N).

4° A l'opérateur de Green G correspond (théorème des noyaux de Schwartz) un noyau de Green $G_{x,y}$, distribution sur $\Omega_x \times \Omega_y$. On peut écrire symboliquement

$$(Gf)_x = \int_{\Omega_y} G_{x,y} \, f_y \, dy .$$

Pour l'étude de la régularité du noyau, cf. [13] , [6] .

5. Problèmes aux limites.

On appellera problème aux limites le

PROBLÈME 1. - Trouver U dans $\mathcal{H}$, solution de

(12) $\Lambda U = F$, F donné dans Q' ,

avec les conditions aux limites :

(13) $h - U \in N$, h étant donné dans $\mathcal{H}$.

Evidemment, sous les hypothèses du théorème 1 , le problème 1 admet une solution unique :

(14) $U = h - G\Lambda h + GF$.

Le problème 1 ne change pas si l'on change h modulo N .

2. Exemple.

Le problème pratique est le suivant : on donne Λ (opérateur différentiel) et les conditions aux limites. Par exemple, on donne

$$(1) \qquad \Lambda = -\Delta + s , \quad s > 0 , \quad \Delta = \text{Laplacien.}$$

(Si $s = 0$, cf. [2] et [5]), et on cherche U solution de (12), paragraphe 1 , les conditions aux limites étant :

U est donné sur la frontière Γ de Ω (Dirichlet)

$\frac{\partial u}{\partial n}$ est donné sur la frontière Γ de Ω (Neumann), etc.

Il s'agit de choisir convenablement V et $((u , v))$ de sorte que $u \in N$ exprime, dans un sens raisonnable, que u est nul sur Γ (Dirichlet) ou que $\frac{\partial u}{\partial n}$ est nul sur Γ (Neumann) etc.

Voici comment l'on procède avec l'opérateur (1).

Si φ et $\Psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$(2) \qquad (\Lambda \varphi, \Psi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} , \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\right)_{L^2(\Omega)} + s(\varphi , \Psi)_{L^2(\Omega)}$$

ce qui conduit à introduire l'espace suivant :

1. Espace $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$.

C'est l'espace des $u \in L^2(\Omega)$ tels que $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ (pris, bien entendu, au sens distributions !) soit dans $L^2(\Omega)$ pour tout i . On pose, pour $u , v \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$:

$$(3) \qquad \begin{cases} (u , v)_1 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} , \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L^2(\Omega)} \\ |||u|||_1^2 = \|u\|_1^2 + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \end{cases} .$$

Pour la norme $|||u|||_1$, l'espace $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Il faut maintenant étudier l'espace $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$; la première question est de savoir si $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense ou non dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$. Le résultat est [2] : la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{D}(\Omega)$ ne soit pas dense dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ est que $\complement\Omega$ ne soit pas de capacité nulle, ce que l'on supposera. On introduit alors l'adhérence $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$; les fonctions de $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ sont "nulles" à la frontière, et ceci les caractérise (pour l'énoncé précis, cf. [2]).

2. Espace V .

On prend pour V un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, contenant $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$:

$$\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega) \subset V \subset \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega) .$$

3. Espace Q .

On prend $Q = V$ si $V = \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$; sinon $Q = L^2(\Omega)$.

Reste maintenant à choisir la forme sesquilinéaire $((u , v))$. On va voir que ce choix est possible d'une infinité de manières, chaque choix conduisant à de nouveaux problèmes aux limites.

4. Première forme sesquilinéaire.

(4) $$((u , v)) = (u , v)_1 + s(u , v)_{L^2(\Omega)} .$$

Cette forme définit bien $\Lambda = - \Delta + s$, et elle est hermitienne : $((u , v)) = ((u , v))_1$. Enfin elle est elliptique, quel que soit V .

L'espace N est l'espace des $u \in V$ tels que

(5) $$(- \Delta u , v)_{L^2} = (u , v)_1 \quad \text{pour tout } v \in V .$$

Le théorème 1 s'applique : on a donc déjà résolu autant de problèmes aux limites qu'il y a d'espaces V .

EXEMPLE 1. - Problème de Dirichlet.

$V = \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$; $- \Delta + s$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ sur $\mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega)$ (cf. [3] et [8]). Dans le problème 1 , paragraphe 1 , la condition (13) signifie que U prend des valeurs données sur Γ (égales à h).

EXEMPLE 2. - Problème de Neumann.

On prend $V = \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$.

La condition (5) signifie, formellement, que $\int \frac{\partial u}{\partial n} \bar{v} \, ds = 0$ donc que $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur Γ (pour des précisions, cf. [7]).

Dans le problème 1 , paragraphe 1 , la condition (13) signifie que $\frac{\partial u}{\partial n}$ prend sur Γ des valeurs données (égales à $\frac{\partial h}{\partial n}$).

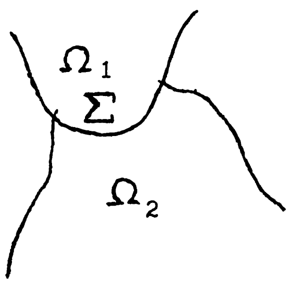
EXEMPLE 3. - Problème mélé.

Il faut utiliser le résultat suivant ; soit Σ une portion de Γ , qui est une variété une fois continûment différentiable par morceaux de dimension $n - 1$, bornée. Alors on peut prolonger les fonctions de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ sur Σ . De façon précise : il existe une application linéaire continue et une seule, $u \longrightarrow \sigma u$, de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ dans $L^2(\Sigma)$ (espace des fonctions de carré sommable sur Σ pour la mesure superficielle), telle que σu coïncide presque partout avec les valeurs de u sur Σ lorsque u est continue dans $\Omega \cup \Sigma$.

Cette propriété permet de définir aisément des espaces V importants. Prenons : $V = V_{\Sigma}$ espace des u tels que $\sigma u = 0$. Alors $u \in N$ signifie que $\sigma u = 0$ (u "nulle" sur Σ) et que sur $\Gamma - \Sigma$, $\frac{\partial u}{\partial n}$ est nul. Le problème 1 , paragraphe 1 , correspondant, est un problème mélé : on donne U sur Σ, $\frac{\partial u}{\partial n}$ sur $\Gamma - \Sigma$.

EXEMPLE 4. - Problème de transmission.

On suppose Ω non connexe, par exemple (cf. figure) $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, Γ_i = frontière de Ω_i , Γ_1 et Γ_2 ayant en commun une portion Σ "régulière" de sorte que l'on puisse définir :



$$\sigma_i(u_i) \in L^2(\Sigma) \ , \quad i = 1 \ , 2 \ , \quad u_i \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega_i)$$

Toute fonction u de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ s'identifie à un couple $(u_1 \ , u_2)$, $u_i \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega_i)$.

On prend pour V l'espace des u telles que $\sigma_1 u_1 = \alpha \sigma_2 u_2$, α = Cte (pour simplifier). Alors $u \in N$ signifie :

$$\sigma_1 u_1 = \alpha \sigma_2 u_2 \ , \tag{6}$$

puis

$$(-\Delta u_1 \ , v_1)_{L^2(\Omega_1)} + (-\Delta u_2 \ , v_2)_{L^2(\Omega_2)} = (u_1 \ , v_1)_1 + (u_2 \ , v_2)_1$$

i.e.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial n_1} = 0 \ \text{ sur } \Gamma_1 - \Sigma \ , & \dfrac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0 \ \text{ sur } \Gamma_2 - \Sigma \ , \\ \alpha \ \dfrac{\partial u_1}{\partial n_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0 \ \text{ sur } \Sigma & \end{cases} \tag{7}$$

Le problème 1 , paragraphe 1 , correspondant, est un <u>problème de transmission</u>.

5. <u>Deuxième forme sesquilinéaire</u>.

Voici maintenant une deuxième forme sesquilinéaire.

On se place dans les hypothèses de l'exemple 3 ci-dessus, et l'on prend :

$$((u , v)) = (u , v)_1 + s(u , v)_{L^2(\Omega)} + k(\sigma u , \sigma v)_{L^2(\Sigma)} \tag{8}$$

k constante > 0 (condition non nécessaire).

<u>La forme</u> (8) <u>définit encore</u> $\Lambda = -\Delta + s$. Elle est évidemment elliptique <u>quel que soit</u> V . L'espace N est cette fois défini par :

$$(-\Delta u , v)_{L^2} = (u , v)_1 + k(\sigma u , \sigma v)_{L^2(\Sigma)} \quad \text{pour tout} \quad v \in V . \tag{9}$$

<u>A chaque espace</u> V <u>va correspondre un nouveau problème aux limites</u> (du moins si $u \in V$ n'entraîne pas $\sigma u = 0$!)

Donnons un seul exemple :

EXEMPLE 5. - On prend $V = \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$. Alors $u \in N$ signifie

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma - \Sigma , \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = ku \text{ sur } \Sigma . \tag{10}$$

6. <u>Troisième forme sesquilinéaire</u>.

Vu sa grande importance pratique voici une 3e forme sesquilinéaire.

On considère $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ comme dans l'exemple 4 , et l'on prend

$$((u , v)) = \varepsilon_1[(u_1 , v_1)_1 + s(u_1 , v_1)_{L^2}] + \varepsilon_2[(u_2 , v_2)_1 + s(u_2 , v_2)_{L^2}] \tag{11}$$

$\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $s > 0$.

(ε_i constante physique dépendant de la nature de Ω_i). On a là une forme sesquilinéaire elliptique, quel que soit $V \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$.

<u>On prend par exemple pour espace</u> V , l'espace des $u = (u_1 , u_2)$ tels que

$$\sigma_1 u_1 = \sigma_2 u_2 . \tag{12}$$

Alors, $u \in N$ signifie

$$\mathcal{E}_1(u_1\ ,\gamma_1)_1 + \mathcal{E}_2(u_2\ ,\gamma_2)_1 = -\ \mathcal{E}_1(\Delta u_1\ ,\gamma_1)_{L^2} - \mathcal{E}_2(\Delta u_2\ ,\gamma_2)_{L^2}$$

pour tout $v = (v_1\ ,\ v_2) \in V$, donc

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathcal{E}_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial n_1} + \mathcal{E}_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0 \quad \text{sur } \Sigma\ , \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial n_1} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 - \Sigma\ , \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 - \Sigma\ . \end{cases}$$

Le problème aux limites correspondant (avec $h = 0$) est : trouver $(u_1\ ,\ u_2)$ avec

$$(14)\qquad \begin{aligned} -\ \Delta u_1 + su_1 &= f_1 \quad \text{dans } \Omega_1\ , \qquad f_1 \in L^2(\Omega_1) \\ -\ \Delta u_2 + su_2 &= f_2 \quad \text{dans } \Omega_2\ , \qquad f_2 \in L^2(\Omega_2) \end{aligned}$$

et les conditions aux limites (12), (13). C'est un problème aux limites du type Poisson (à vrai dire, le cas essentiel correspond à $s = 0$, ce qui entraîne quelques complications : il est nécessaire d'introduire des classes spéciales d'ouverts, les ouverts de Soboleff, cf. [5]).

REMARQUES :

1° Lorsque la frontière de Ω est une variété suffisamment dérivable de dimension $(n - 1)$, on peut, à l'aide d'une étude plus précise de l'espace $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, étudier les problèmes de dérivée oblique (généralisation de la théorie de BOULIGAND-GIRAUD) [7] .

2° Il est évident que l'on peut remplacer $-\ \Delta$ par $D = -\sum \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(g_{ij}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)$, $g_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$, avec

$$\sum_{i,j=1} (g_{ij}(x) + \overline{g_{ji}(x)})\ \zeta_j\ \overline{\zeta_i} \geqslant a(|\zeta_1|^2 + \dots + |\zeta_n|^2)\ , \qquad a > 0\ ,$$

presque partout dans Ω , pour tout système de n nombres complexes $\zeta_1\ ,\ \zeta_2\ ,\ \dots\ ,\ \zeta_n$. Les espaces V sont les mêmes ; la forme $((u\ ,\ v))$ sera, par exemple :

$$((u\ ,\ v)) = \sum \int g_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\overline{\partial v}}{\partial x_i}\,dx + s(u\ ,\ v)_{L^2(\Omega)}\ .$$

3. Utilisation de la théorie de Riesz-Fredholm

Hypothèses. - On se place sous les hypothèses du paragraphe 1 , avec en outre :

(1) $Q = L^2(\Omega)$

(2) L'injection de V dans $L^2(\Omega)$ est complètement continue.

Cherchons $u \in N$, solution de

(3) $\Lambda u + \lambda u = f$, f donné dans L^2 , $\lambda \in G$.

Ceci équivaut à

(4) $u + \lambda G u = Gf$, $G \in \mathcal{L}(L^2 ; N)$

et dans le premier membre il suffit de considérer la restriction G_1 de G à V ; de façon précise, si $G_1 \in \mathcal{L}(V ; V)$, (4) équivaut à la résolution dans V de

(5) $$(1 + \lambda G_1)u = Gf \ .$$

Or G_1 est complètement continue, grâce à (2). Ceci permet d'utiliser la théorie de Riesz-Fredholm. Signalons notamment la conséquence suivante :

THÉORÈME. - La forme $((u , v))$ est supposée elliptique hermitienne (i.e. $((u , v)) = \overline{((v , u))}$) , avec (1) et (2). Alors $\Lambda - \lambda$ est un isomorphisme de N sur $L^2(\Omega)$ sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de λ (le spectre du problème) :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Soit u_k les fonctions propres correspondantes ($\Lambda u_k = \lambda_k u_k$) , avec $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$

Le système u_k (resp. $\frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k}}$; resp. $\frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k + \lambda_k^2}}$) est un système orthonormal complet dans $L^2(\Omega)$ (resp. V ; resp. N).

L'application pratique du théorème dépend de la vérification de (2). La plupart (mais non tous) des résultats de complète continuité se ramènent aux deux propriétés suivantes :

(A) Si Ω est un ouvert borné de R^n , l'injection de $\mathring{\mathcal{D}}^1_{L^2}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est complètement continue (GÅRDING).

(B) Si Ω est un ouvert borné de frontière assez régulière (pour un énoncé précis, cf. [2]), l'injection de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est complètement continue. (RELLICH, KONDRACHOFF, etc. pour l'essentiel).

Les applications aux exemples du paragraphe 2 sont immédiates.

4. Application du théorème de Hille-Yosida.

On suppose encore que $Q = L^2(\Omega)$ et on suppose que $\mathcal{D}(\Omega) \subset N$ (ce qui est toujours vérifié dans la pratique).

On désigne par $\mathcal{A}$ l'opérateur Λ considéré comme opérateur non continu de N (muni de la topologie induite par $L^2(\Omega)$) dans $L^2(\Omega)$. Alors :

THÉORÈME. - La forme $((u\ ,\ v))$ étant elliptique, l'opérateur $-\mathcal{A}$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe, représentation continue $t \to U(t)$ de $\mathcal{R}^+$ dans $\mathcal{L}_s(L^2\ ;\ L^2)$, $U(t) \to 1$, si $t \to 0$.

DÉMONSTRATION. - Grâce au théorème de Hille-Yosida (pour ce théorème, cf. [4]), le théorème résulte de la vérification des deux points suivants :

1° $-\mathcal{A}$ a un "domaine" de définition dense dans $L^2(\Omega)$, et $-\mathcal{A}$ est fermé (immédiat)

2° $\lambda + \mathcal{A}$ est inversible pour $\mathcal{R}\lambda > 0$, l'inverse vérifiant

$$\|(\lambda + \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2;L^2)} \leq \frac{1}{\mathcal{R}\lambda} .$$

Vérifions ce point. On est ramené à résoudre dans N :

$$(\Lambda + \lambda)u = f\ ,\quad f \in L^2 . \tag{1}$$

Ceci admet une solution unique pour $\mathcal{R}\lambda > 0$. Majorons $\|u\|_{L^2}$. On déduit de (1) : $((u\ ,\ u)) + \lambda\|u\|^2_{L^2} = (f\ ,\ u)_{L^2}$; prenant les parties réelles des deux membres et utilisant d'ellipticité, on a

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{1}{\mathcal{R}\lambda}\|f\|_{L^2}\ ,\ \text{d'où le théorème.}$$

REMARQUE. - En fait l'hypothèse d'ellipticité est trop forte. Il suffit de supposer qu'il existe $\omega > 0$ tel que

$$((u\ ,\ u))_1 + \omega\|u\|^2_{L^2} \geq a\|u\|^2_V\ ,\quad a > 0\ ,\ \text{pour tout } u \in V .$$

Application du théorème.

Il existe une fonction $t \to u(t)$ et une seule, continûment dérivable de $t > 0$ à valeurs dans $L^2(\Omega)$, continue de $t \geq 0$ à valeurs dans N, solution de

$$\begin{cases} \Lambda u(t) + \frac{d}{dt} u(t) = 0\ , & t > 0 \\ u(t) \to f \text{ dans } N \text{ lorsque } t \to 0 & (f \in N) . \end{cases} \tag{2}$$

Cette solution est donnée par :

$$u(t) = U(t).f \ .$$

Le problème (2) est un problème mixte (au sens de M. HADAMARD).

ADDITIF

Le théorème du paragraphe 1 , n° 4 , résout des problèmes aux limites faibles : les solutions obtenues ne sont généralement pas continues, et les conditions aux limites sont prises dans un sens généralisé. Si l'on est dans un ouvert Ω de frontière régulière, et si la fonction f donnée dans Q' est elle aussi régulière dans Ω et sa frontière, alors on peut espérer démontrer que la solution de l'équation (6) : $\Lambda u = f$, est une solution usuelle. Ceci a été démontré par L. NIRENBERG [11] pour les problèmes de Dirichlet et de Neumann, ordre quelconque. Pour d'autres conditions aux limites, la méthode de Nirenberg doit être modifiée suivant une idée de ARONSZAJN-SMITH (à paraître) ; des simplifications et compléments sont donnés dans [8]. La question de la régularité au bord n'est pas définitivement réglée pour les problèmes mêlés, même pour l'ordre 2 (cf. sur ce point les travaux de l'école italienne (détails et bibliographie dans le livre de C. MIRANDA [10]).

Dernière minute : pour l'ordre 2, des résultats importants ont été obtenus par G. STAMPACCHIA.

BIBLIOGRAPHIE

[1] COURANT (R.) und HILBERT (D.). - Methoden der mathematischen Physik, Zweiter Band. - Berlin, Springer, 1937 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 48).

[2] DENY (J.) et LIONS (J.-L.). - Les espaces du type de Beppo Levi, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 5, 1953-54, p. 305-370.

[3] GÅRDING (Lars). - Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, Math. Scand., t. 1, 1953, p. 55-72.

[4] LATTES (Robert). - Application de la théorie des semi-groupes à l'intégration d'équations aux dérivées partielles, Séminaire Bourbaki, t. 5, 1952/53.

[5] LIONS (Jacques-Louis). - Problèmes aux limites, II., C.R. Acad. Sc. Paris, t. 236, 1953, p. 2470-2472.

[6] LIONS (Jacques-Louis). - Problèmes aux limites en théorie des distributions, Acta Math., t. 94, 1955, p. 13-153.

[7] LIONS (Jacques-Louis). - Sur les problèmes de dérivée oblique, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 240, 1955, p. 266-268 ; Sur les problèmes aux limites du type dérivée oblique, Annals of Math., t. 64, 1956, p. 207-239.

[8] LIONS (Jacques-Louis). - Cours professé au Tata Institute en 1957. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research.

[9] LIONS (J.-L.) et SCHWARTZ (L.). - Problèmes aux limites sur des espaces fibrés, Acta Math., t. 94, 1955, p. 155-159.

[10] MIRANDA (Carlo). - Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, - Berlin, Springer, 1955 (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, Heft 2).

[11] NIRENBERG (Louis). - Remarks strongly elliptic partial differential equations, Comm. pure and applied Math., t. 8, 1955, p. 649-675.

[12] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, T. 1 et 2. - Hermann, Paris, 1950-1951 (Act. scient. et ind. 1091-1122, Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 9-10).

[13] SCHWARTZ (Laurent). - Les travaux de Gårding sur les équations aux dérivées partielles elliptiques, Séminaire Bourbaki, t. 4, 1951/52.

[Mai 1959]