MARCEL BERGER

Groupes d'holonomie des variétés à connexion affine

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. nº 101, p. 7-12
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__7_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1954)

GROUPES D'HOLONOMIE DES VARIÉTÉS À CONNEXION AFFINE,

par Marcel BERGER.

1. Connexions.

B est un espace fibré principal différentiable de base V (V_m, de dimension m), de groupe structural de Lie connexe G, de projection p. L'application $g \to b.g$ de G sur la fibre contenant $b \in B$ définit un isomorphisme de l'algèbre de Lie Γ de G sur un sous-espace $V(b)$ de l'espace $T(b)$ tangent à B en b. Une connexion sur V, de groupe G, est la donnée en tout point $b \in B$ d'un projecteur $h(b)$ parallèle à $V(b)$ qui :

1°) dépend différentiablement de b ;
2°) est invariant par G, i.e. $h(b.g) = h(b).g$.

Le projecteur détermine en b un sous-espace $H(b)$ de $T(b)$: les éléments de $H(b)$ seront dits horizontaux. Une connexion est équivalente à la donnée d'une 1-forme différentielle ω sur B, à valeurs dans Γ, qui est telle que :

1°) ω est l'identité sur $V(b)$;
2°) ω vérifie $\omega(b.g) = ad(g^{-1})\,\omega(b)$.

On associe canoniquement à ω une 2-forme de courbure $\bar{\omega}$ sur B, à valeurs dans Γ, définie par $\bar{\omega}(s,t) = d\omega(h(s),h(t))$.

Une connexion permet de définir la dérivée covariante ∇T d'un tenseur quelconque T défini sur V.

Dans le cas où le fibré est celui des repères tangents à la variété V_m, le groupe structural étant alors $GL(m,R)$, la connexion est dite affine ; en réalisant Γ par des $m \times m$ matrices, ω est définie par des $T_i{}^j{}_k$ et $\bar{\omega}$ par le tenseur de courbure R : $R_i{}^j{}_{,st}$. Si $T_i{}^j{}_k = T_k{}^j{}_i$, la connexion est dite sans torsion. R et ∇R satisfont alors aux relations :

(1) $$R_i{}^j{}_{,st} + R_s{}^j{}_{,ti} + R_t{}^j{}_{,is} = 0$$

(2) $$\nabla_u R_i{}^j{}_{,st} + \nabla_s R_i{}^j{}_{,tu} + \nabla_t R_i{}^j{}_{,us} = 0$$

2. Groupes d'holonomie d'une connexion.

Soit Ω_x (resp. Ω_x^0) l'espace des lacets (resp. homotopes à l'identité) de V, d'origine x, différentiables par morceaux. Supposons V munie d'une connexion de groupe G : tout élément $\lambda \in \Omega_x$ peut être remonté en un chemin horizontal μ de B, d'origine z et d'extrémité $z.g$, tel que $p.\mu = \lambda$. L'élément g ne dépend pas de z, d'où une application $f : \Omega_x \to G$; g n'est autre que le transport parallèle le long de λ.

DÉFINITION. - On appelle groupe d'holonomie homogène (resp. restreint) et on note Ψ_x (resp. σ_x) l'image $f(\Omega_x)$ (resp. $f(\Omega_x^0)$).

Un chemin différentiable par morceaux joignant x et y définit un isomorphisme entre Ψ_x et Ψ_y (resp. σ_x et σ_y) ; on écrira, par abus de langage : Ψ, σ. Le groupe σ est un groupe de Lie, car c'est un sous-groupe connexe par arcs de G de Lie. Par passage aux quotients, on déduit de f une application $\bar{f} : \pi_1(V) \to \Psi/\sigma$.

PROPOSITION 1 (Ambrose-Singer-Lichnerowicz). - σ est la composante connexe de l'élément neutre dans Ψ.

DÉMONSTRATION. - Soit $\bar{\sigma}$ la composante connexe de l'élément neutre dans Ψ. Puisque $\pi_1(V)$ est dénombrable, $\bar{f}$ entraîne que $\bar{\sigma}/\sigma$ est dénombrable. σ est ouvert, sinon il serait de mesure nulle pour la mesure de Haar sur $\bar{\sigma}$. Il est donc fermé, et $\sigma = \bar{\sigma}$. C.Q.F.D.

Soit b_0 donné $\in B$. On notera $\bar{B}$ le sous-ensemble de B formé des b qui peuvent être joints à b_0 par un chemin horizontal différentiable par morceaux ; $\bar{B}$ est fibré principal de base V, de groupe Ψ. Dans toute la suite nous ne considérerons que des tenseurs sur $\bar{B}$. Dans ces conditions :

PROPOSITION 2 (Nijenhuis). - Quels que soient s,t,u : $R_i{}^j{}_{,st}$ et $\nabla_u R_i{}^j{}_{,st}$ appartiennent pour les indices i et j à l'algèbre de Lie Σ de σ.

Bien que la proposition 2 soit suffisante pour la suite, signalons que, plus précisément :

PROPOSITION 3 (Ambrose-Singer). - Σ est engendré par les $\bar{\omega}_b(s,t)$ quand s et t parcourent $T(b)$ et b parcourt $\bar{B}$.

3. σ des variétés à connexion affine sans torsion.

Dans toute la suite V sera munie d'une connexion affine sans torsion et sera irréductible.

THÉORÈME 1. - σ n'est pas quelconque.

σ doit prendre place dans une liste (liste I) assez longue, analogue à celle des espaces riemanniens symétriques.

PRINCIPE DE LA DÉMONSTRATION. - Elle repose sur les faits suivants :

- R vérifie la proposition 2.
- R satisfait la condition (1).
- $\sum$, algèbre de Lie d'un groupe de Lie irréductible, n'est pas quelconque.

Il faut examiner toutes les formes possibles pour $\sum$, à l'aide des résultats d'Elie CARTAN sur les groupes de Lie linéaires irréductibles. On constate alors que (1) entraîne $R = 0$ "presque toujours".

EXEMPLE. - σ est la représentation tensorielle du produit direct d'au moins trois groupes $\sigma_i \subset GL(n_i, R)$ $(i = 1,2,3)$. Alors :

$$\sum\nolimits_{aim}^{bjn} = \sum\nolimits_{1}{}_a^b \delta_i^j \delta_m^n + \delta_a^b \sum\nolimits_{2}{}_i^j \delta_m^n + \delta_a^b \delta_i^j \sum\nolimits_{3}{}_m^n \ , \tag{3}$$

où $a,b,c,d = 1,\ldots,n_1$ (resp. $i,j,k,h = 1,\ldots,n_2$ et $m,n,p,q = 1,\ldots,n_3$) et δ a la signification classique. La proposition 1 et la formule (3) montrent qu'une composante non nulle de R est de la forme $\bar{R} = R^{bim}_{aim,ckp,dhq}$ (et les autres composantes analogues). Supposons $a \neq b$. $\bar{R}$ est alors indépendant de i et m ; si n_2 et n_3 sont $\geqslant 3$, on peut choisir $i \neq k$, h et $m \neq p,q$. Les relations (3) et (1) entraînent que $\bar{R} = 0$. On montre que $\bar{R}$ est encore nul quand $a = b$.

4. σ des espaces affines symétriques.

Prenons maintenant les σ de la liste I et les $\sum$ correspondantes. On ne peut plus montrer que $R = 0$, mais en utilisant ∇R , la proposition 2 et la relation (2) , on peut montrer que "presque toujours" $\nabla R = 0$.

EXEMPLE. - σ est la représentation tensorielle du produit direct d'au moins deux groupes $\sigma_i \subset SO(n_i, R)$ $(i = 1,2)$. Avec les mêmes notations qu'au n° 3, on a pour $\sum$:

$$(4) \qquad \sum\nolimits_{ai}^{bj} = \sum\nolimits_1{}_a^b \delta_i^j + \delta_a^b \sum\nolimits_2{}_i^j \ .$$

Une composante non nulle de R est de la forme $\bar{R} = R^{bi}_{ai,ck,dh}$ et est indépendante de i. Mais de $\sum_1{}_a^b = -\sum_1{}_b^a$, on déduit de (4) et (1) que si $n_2 \geqslant 3$, $\bar{R}$ ne peut être que du type $R^{bi}_{ai,aj,bj}$ qui est indépendant de i et j.

Alors on déduit de (2) que $\nabla_{ck} R^{bi}_{ai,aj,bj} = 0$, car il suffit de choisir $j \neq k$.

Les variétés pour lesquelles $\nabla R = 0$ et $T = 0$ ont une structure <u>géométrique particulière</u> : NOMIZU a montré en effet (Séminaire BOURBAKI : Mai 1954) qu'une telle variété est localement isomorphe à un espace homogène symétrique. Les σ restants forment une liste II, réduite à une vingtaine d'éléments : ce sont ceux qui peuvent être groupes d'holonomie homogène restreint d'une variété à connexion affine sans torsion pour laquelle $\nabla R \neq 0$.

5. σ des variétés riemanniennes.

Désormais V sera une variété <u>riemannienne</u>, c'est-à-dire munie d'une métrique définie positive et de la connexion affine sans torsion canonique. Dans ce cas, σ irréductible n'est pas une <u>restriction</u>. On a en effet :

PROPOSITION 4 (Lichnerowicz-de Rham). - *Si σ est réductible et V complète, σ est un produit direct de σ_i irréductibles de variétés riemanniennes V_i.*

D'après de RHAM, le revêtement universel $\tilde{V}$ de V est un produit riemannien $\overset{i}{\times} V_i$, d'où $\psi = \overset{i}{\times} \psi_i$. On en déduit le théorème en remarquant que σ est le ψ de $\tilde{V}$.

Pour obtenir les σ possibles pour une variété riemannienne, il suffit de prendre dans les listes I et II les groupes qui sont orthogonaux. La liste I redonne les espaces riemanniens symétriques déterminés par Elie CARTAN. La liste II montre que :

THÉORÈME 2. - *Pour une variété riemannienne V_m telle que $\nabla R \neq 0$, σ irréductible ne peut être que* : $SO(m)$; $U(n)$ *ou* $SU(n)$ *si* $m = 2n$; $Sp(1) \times Sp(n)$ *ou* $Sp(n)$ *si* $m = 4n$. *Il y a trois exceptions* : G_2 *pour* V_7, $Spin(7)$ *pour* V_8, $Spin(9)$ *pour* V_{16}.

Les variétés pour lesquelles σ est $U(n)$ ou $SU(n)$ sont les suivantes : $\sigma \subset U(n)$ si V_{2n} est <u>pseudo-kählérienne</u>. Il est équivalent de dire qu'il existe sur V_{2n} une forme 2-forme échangeable avec la métrique, de rang maximum et à dérivée covariante nulle, soit φ telle que $\nabla\varphi = 0$. $\sigma = SU(n)$ s'il existe en plus sur la variété précédente une forme θ de type $(n,0)$ telle que $\nabla\theta = 0$. Ceci est équivalent à la nullité de la courbure de Ricci de V_{2n}. La première classe de Chern est alors nulle.

REMARQUE. - Les groupes obtenus, exceptions comprises, sont transitifs sur la sphère S_{m-1} des vecteurs unités tangents. Il serait agréable de pouvoir le montrer directement, auquel cas la démonstration du théorème 2 serait réduite à l'élimination du groupe $T^1 \times Sp(n)$, qui est facile.

6. Formes à dérivée covariante nulle des variétés riemanniennes.

Soit τ une forme extérieure sur V ; " $\nabla\tau = 0$ " est équivalent à " τ est invariante par Ψ_x " en tout $x \in V$. Nous avons déjà rencontré de telles formes au n° 5 : quand Ψ est réductible, les formes monômes définissant les sous-espaces stables pour Ψ sont à dérivée covariante nulle ; quand $\Psi \subset U(n)$ (resp. $SU(n)$), la forme φ et ses puissances $\varphi^p (p = 1,\ldots,n-1)$ (resp. θ) sont aussi à dérivée covariante nulle.

La représentation linéaire de $Sp(n) \times Sp(1)$ (resp. Spin (9)) dans R^{4n} (resp. R^{16}) laisse invariante une 4-forme et ses puissances (resp. une 8-forme). Le théorème 2 montre que, si $\nabla R \neq 0$, les formes précédentes sont les seules formes à dérivée covariante nulle que l'on puisse rencontrer sur une variété riemannienne. Car les représentations rencontrées de $SO(m)$, G_2 et $Spin(7)$ ne laissent invariante aucune forme extérieure. On peut encore dire :

COROLLAIRE 1. - S'il existe sur une variété riemannienne V une forme τ non triviale telle que $\nabla\tau = 0$, c'est qu'alors : soit V est symétrique, soit V est réductible, soit V est pseudo-kählérienne, soit le groupe d'holonomie homogène de V est $Sp(n) \times Sp(1)$ ou $Spin(9)$.

7. Ψ des variétés riemanniennes orientables.

Dans ce numéro, supposons V orientable ; alors $\Psi \subset SO(m)$. D'après le théorème 2, Ψ ne peut différer de σ que si $\sigma \subset U(n)$ pour V_{2n}, car σ est distingué dans Ψ (proposition 1). Si $\sigma = U(n)$, il est classique que Ψ peut avoir au plus une composante connexe dans $O(2n)$ autre que $U(n)$; cette composante est définie par l'élément $k : z \to \bar{z}$. k n'appartient d'ailleurs à $SO(2n)$ que si n est pair. Ainsi :

COROLLAIRE 2. - Si une variété orientable V_{4n+2} admet un revêtement à courbure de Ricci non nulle qui est : pseudo-kählérien, non réductible, et tel que $\nabla R \neq 0$, alors V_{4n+2} elle-même est pseudo-kählérienne. Si une variété V_{4n} admet un revêtement du type précédent, alors elle est orientable et admet un revêtement à 2 feuillets qui est pseudo-kählérien.