FRANÇOIS BRUHAT

Structure des algèbres de Lie semi-simples

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. nº 107, p. 61-68
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__61_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1955)

STRUCTURE DES ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES

par François BRUHAT

Les algèbres de Lie considérées sont des algèbres sur un corps de caractéristique zéro algébriquement clos, qui sera le corps des complexes à partir du n° 4 .

1. Sous-algèbres de Cartan. Critères de Cartan.

Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie nilpotente et ρ une représentation de $\mathfrak{h}$ dans un espace vectoriel V de dimension finie :

DÉFINITION 1. - Une forme linéaire λ sur $\mathfrak{h}$ est dite un poids de la représentation ρ , s'il existe un élément a non nul de V tel que $\rho(x)a = \lambda(x)a$ pour tout $x \in \mathfrak{h}$.

Le théorème de Lie assure l'existence d'au moins un poids (si $V \neq \{0\}$) . On notera $V(\rho , \lambda)$ (ou V^{λ}) le sous-espace des $a \in V$ tels qu'il existe un entier n avec $(\rho(x) - \lambda(x))^n a = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{h}$.

PROPOSITION 1. - Les V^{λ} sont invariants par ρ ; λ est un poids de ρ si $V^{\lambda} \neq \{0\}$ et c'est le seul poids de la restriction de ρ à V^{λ} . Enfin V est la somme directe des différents V^{λ}.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quelconque et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$: un poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ est dit une "racine" de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$. Soit Δ l'ensemble des racines non nulles : on a (proposition 1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^{\alpha}$.

PROPOSITION 2. - $[\mathfrak{g}^{\alpha} , \mathfrak{g}^{\beta}] \in \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$: en particulier $\mathfrak{g}^0$ est une sous-algèbre.

DÉFINITION 2. - Une sous-algèbre nilpotente $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ si $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$.

Il existe des sous-algèbres de Cartan : prenons un élément $X \in \mathfrak{g}$ régulier, c'est-à-dire tel que le sous-espace $\mathfrak{g}(X , 0)$ des éléments de $\mathfrak{g}$ appartenant à la valeur propre 0 de ad X soit de dimension la plus petite possible :

PROPOSITION 3. - Si X est régulier, $\mathfrak{g}(X , 0)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

On obtient par ce procédé toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$: plus précisément :

PROPOSITION 4 (Chevalley). - Deux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées par un automorphisme intérieur appartenant au groupe engendré par les exponentielles des dérivations intérieures nilpotentes de $\mathfrak{g}$.

Rappelons qu'on appelle "forme de Killing" de $\mathfrak{g}$ la forme bilinéaire symétrique $B(X , Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, X\, \mathrm{ad}\, Y)$. On vérifie facilement que $B(\mathrm{ad}\, Z.X,Y) = - B(X,\mathrm{ad}\, Z.Y)$. Si $X \in \mathfrak{h}$, $(\mathrm{ad}\, X)^2$ a dans $\mathfrak{g}^\alpha$ la seule valeur propre $\alpha(X)^2$: d'où par polarisation si X et $Y \in \mathfrak{h}$:

$$B(X , Y) = \sum_{\alpha \in \Delta} \nu(\alpha)\, \alpha(X)\, \alpha(Y) \qquad \text{avec} \quad \nu(\alpha) = \dim \mathfrak{g}^\alpha$$

LEMME 1. - Soient α et φ deux racines de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$, $\alpha \neq 0$, et soit $H \in [\mathfrak{g}^\alpha , \mathfrak{g}^{-\alpha}]$: il existe un nombre rationnel $r_{\varphi,\alpha}$, ne dépendant que de φ et α , tel que $\varphi(H) = r_{\varphi,\alpha}\alpha(H)$. Si p et q sont deux entiers $(p \leq 0 \leq q)$ tels que $[\mathfrak{g}^{-\alpha} , \mathfrak{g}^{\varphi+p\alpha}] = [\mathfrak{g}^\alpha , \mathfrak{g}^{\varphi+q\alpha}] = 0$,

$$r_{\varphi,\alpha} \text{ est égal à } - \frac{\sum_{k=p}^{q} k\, \nu(\varphi + k\alpha)}{\sum_{k=p}^{q} \nu(\varphi + k\alpha)} .$$

(Démonstration : considérons le sous-espace $V = \sum_{k=p}^{q} \mathfrak{g}^{\varphi+k\alpha}$; si $X \in \mathfrak{g}^\alpha$ et $Y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, ad X et ad Y conservant V et $\mathrm{Tr}_V(\mathrm{ad}\,[X , Y]) = 0$. Or $\mathrm{ad}\,[X , Y] = \mathrm{ad}\, H$ a dans $\mathfrak{g}^{\varphi+k\alpha}$ la seule valeur propre $\varphi(H) + k\alpha(H)$, d'où le lemme).

On déduit du lemme 1 les "critères de Cartan" :

THÉORÈME 1. - Toute algèbre de Lie dont la forme de Killing est nulle est résoluble. Si une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ ne contient aucun idéal résoluble, la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est non dégénérée et réciproquement : nous dirons que $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

$\mathfrak{g}$ est dite "simple" si $\dim \mathfrak{g} > 1$ et si $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéaux non triviaux : toute algèbre de Lie semi-simple est somme directe d'idéaux simples deux à deux orthogonaux (pour la forme de Killing).

2. Structure des algèbres semi-simples.

Désormais $\mathfrak{g}$ désigne une algèbre semi-simple et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan choisie une fois pour toutes. On pose $r = \dim \mathfrak{h}$ (rang de $\mathfrak{g}$). Pour toute racine $\alpha \neq 0$, on choisit (arbitrairement pour l'instant) un élément $E_\alpha \neq 0$ dans $\mathfrak{g}$ tel que $[H , E_\alpha] = \alpha(H)\, E_\alpha$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$. On posera pour simplifier $B(X , Y) = \langle X , Y \rangle$.

PROPOSITION 5. – $\mathfrak{g}^\alpha$ est orthogonal à $\mathfrak{g}^\beta$ pour $\alpha + \beta \neq 0$. La restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{h}$ est non dégénérée ; il existe r racines linéairement indépendantes et $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre abélienne maximale.

Si $X \in \mathfrak{g}^\alpha$ et $Y \in \mathfrak{g}^\beta$, ad X ad Y envoie $\mathfrak{g}^\gamma$ dans $\mathfrak{g}^{\alpha+\beta+\gamma}$, d'où $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, X\, \mathrm{ad}\, Y) = 0$ si $\alpha + \beta \neq 0$. Si alors $H \in \mathfrak{h}$ est orthogonal à $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0$, il est orthogonal à $\mathfrak{g}$ donc nul. S'il n'existait pas r racines linéairement indépendantes, il existerait un $H \neq 0$ avec $\alpha(H) = 0$ pour toute racine α, donc tel que $\langle H , H' \rangle = \sum \nu(\alpha)\alpha(H)\, \alpha(H') = 0$ pour tout $H' \in \mathfrak{h}$. De même, on a $[\mathfrak{h} , \mathfrak{h}] = 0$ car toute racine s'annule sur $[\mathfrak{h} , \mathfrak{h}]$.

La forme de Killing permet donc d'identifier $\mathfrak{h}$ et son dual (on posera $\alpha(H) = \langle H , \alpha \rangle$) et d'introduire un produit scalaire sur ce dual.

Soit α une racine $\neq 0$ et soit $X \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$. On a $[E_\alpha , X] \in \mathfrak{h}$ et pour $H \in \mathfrak{h}$, on a $\langle H , [E_\alpha , X] \rangle = \langle [H , E_\alpha] , X \rangle = \alpha(H) \langle E_\alpha , X \rangle$, d'où : $[E_\alpha , X] = \langle E_\alpha , X \rangle \alpha$. Or E_α n'est pas orthogonal à $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ (sinon il serait orthogonal à $\mathfrak{g}$, donc nul : ce qui montre en particulier que $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ n'est pas nul, c'est-à-dire que $-\alpha$ est racine), donc il existe un X dans $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ tel que $[E_\alpha , X] = \alpha$: le lemme 1 montre que $\langle \varphi , \alpha \rangle = r_{\varphi,\alpha} \langle \alpha , \alpha \rangle$ pour toute racine φ, d'où l'on déduit $\langle \alpha , \alpha \rangle \neq 0$. On peut alors montrer que :

PROPOSITION 6. – Pour toute racine $\alpha \neq 0$, $\mathfrak{g}^\alpha$ est de dimension 1.

COROLLAIRE. – Les sous-algèbres de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ sont caractérisées par les deux conditions

1° $\mathfrak{h}$ est abélienne maximale

2° ad H est semi-simple pour tout $H \in \mathfrak{h}$.

PROPOSITION 7. – Soient α et φ deux racines $(\alpha \neq 0)$ et soit $p_{\varphi,\alpha}$ (resp. $q_{\varphi,\alpha}$) le plus petit (resp. le plus grand) entier tel que $\varphi + p\alpha$ (resp. $\varphi + q\alpha$) soit racine : alors $\varphi + k\alpha$ est racine pour $p_{\varphi,\alpha} \leqslant k \leqslant q_{\varphi,\alpha}$.

Le scalaire $-2\frac{\langle\varphi,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ est un entier égal à $p_{\varphi,\alpha}+q_{\varphi,\alpha}$. Enfin α et $-\alpha$ sont les seules racines proportionnelles à α.

La démonstration repose sur le lemme 1 : si φ n'est pas un multiple entier de α, on applique le lemme 1 au plus grand intervalle (p', q') contenant 0 tel que $\varphi + k\alpha$ soit racine pour $p' \leq k \leq q'$ (on obtient $-2\frac{\langle\varphi,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = p'+q'$) puis à l'intervalle $(p_{\varphi,\alpha}, q')$, ce qui donne $p' = p_{\varphi,\alpha}$ et de même $q' = q_{\varphi,\alpha}$. D'autre part, si $\varphi = c\alpha$, ou bien c est un entier ou bien le résultat précédent s'applique, ce qui montre que dans tous les cas $2c$ et $2/c$ sont entiers : d'où $c = \pm 1$, $\pm\frac{1}{2}$, ± 2 et il suffit d'écarter le cas $c = 2$, ce qui se fait en appliquant le lemme 1 aux racines c et α, avec $p = -1$ et $q = 2$.

PROPOSITION 8. - Soient α et β deux racines, $\alpha+\beta \neq 0$: on a $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$.

Il est clair (propositions 2 et 6) qu'il suffit de montrer que si $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] = 0$, alors $\alpha+\beta$ n'est pas racine : supposons $\alpha \neq 0$ par exemple ; le lemme 1 appliqué aux racines β et α et aux intervalles $(p_{\beta,\alpha}, 0)$ et $(p_{\beta,\alpha}, q_{\beta,\alpha})$ montre que $q_{\beta,\alpha} = 0$, donc que $\alpha+\beta$ n'est pas racine.

Nous pouvons résumer les résultats obtenus :

THÉORÈME 2. - A toute racine non nulle α de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$ on peut associer un élément non nul E_α de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{h}$ et les E_α sous-tendent $\mathfrak{g}$ et que l'on ait les relations de commutation suivantes :

$[H, E_\alpha] = \alpha(H)\, E_\alpha = \langle H, \alpha\rangle E_\alpha$ pour $H \in \mathfrak{h}$

$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = -\alpha$

$[E_\alpha, E_\beta] = 0$ si $\alpha+\beta$ n'est pas racine

$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta}\, E_{\alpha+\beta}$ si $\alpha+\beta$ est une racine non nulle, avec $N_{\alpha,\beta} \neq 0$

3. Système des racines simples.

Soit $\mathfrak{h}^{\circ}$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des racines : on a

$$\langle\alpha,\alpha\rangle = \sum \nu(\beta)\, \beta(\alpha)^2 = \sum 1/4\ (p_{\beta,\alpha}+q_{\beta,\alpha})^2 \langle\alpha,\alpha\rangle^2$$

$\langle\alpha,\alpha\rangle$ est donc rationnel, donc aussi $\langle\alpha,\beta\rangle$. Si $X \in \mathfrak{h}^{\circ}$, $\alpha(X)$ est rationnel donc $\langle X , X\rangle = \sum \alpha(X)^2$ est rationnel $\geqslant 0$ et $\langle X , X\rangle = 0$ entraîne $\alpha(X) = 0$ pour toute racine α, donc $X = 0$:

PROPOSITION 9. - La restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{h}^o$ est une forme quadratique rationnelle définie positive et $\dim_Q \mathfrak{h}^o = \dim_K \mathfrak{h}$.

REMARQUE. - Si K est le corps des complexes, on désignera plutôt par $\mathfrak{h}^o$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des α : la proposition 9 est évidemment encore valable en remplaçant rationnel par réel.

Introduisons sur $\mathfrak{h}^o$ une structure d'ordre total compatible avec la structure vectorielle sur Q : une racine positive sera dite "simple" si elle n'est pas somme de deux racines positives.

THÉORÈME 3. - Il existe exactement r racines simples α_i, qui forment une base de $\mathfrak{h}$. Toute racine est de la forme $\sum n_i \alpha_i$, où les n_i sont des entiers tous de même signe. Le nombre $a_{ij} = -2\dfrac{\langle\alpha_j , \alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i , \alpha_i\rangle}$ $(i \neq j)$ est un entier $\geqslant 0$; à savoir le plus grand entier tel que $\alpha_j + a_{ij}\alpha_i$ soit racine.

$\varphi = \sum n_i \alpha_i$ est trivial par récurrence sur le nombre de partitions de φ en somme de racines de même signe ; il est également trivial que $\alpha_j - \alpha_i$ n'est pas racine pour $i \neq j$, d'où $p_{\alpha_j,\alpha_i} = 0$ et $a_{ij} = q_{\alpha_j,\alpha_i} \geqslant 0$. Enfin $\langle\alpha_i , \alpha_j\rangle \leq 0$ pour $i \neq j$ entraîne que les α_i sont linéairement indépendants sur Q, donc forment une base de $\mathfrak{h}^o$ (ou de $\mathfrak{h}$).

Les entiers a_{ij} sont appelés les "entiers de Cartan" de $\mathfrak{g}$. Leur donnée (ou la donnée du système des racines simples) détermine le système des racines et on a :

THÉORÈME 4. - Les entiers de Cartan (ou le système des racines simples) déterminent l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à un isomorphisme près.

D'autre part, on dit que le système Π des racines simples se décompose en deux sous-systèmes Π' et Π'' si $\Pi = \Pi' \cup \Pi''$ et si Π' et Π'' sont orthogonaux : $\mathfrak{g}$ simple est équivalent à Π indécomposable, résultat qui est à la base de la classification des algèbres simples par les méthodes de van der WAERDEN ou DYNKIN.

4. Le groupe de Weyl.

Soit λ un élément de $\mathfrak{h}^o$: la symétrie S_λ par rapport à l'hyperplan

$\langle \lambda, H\rangle = 0$ est donnée par $H \to H - 2\frac{\langle\lambda, H\rangle}{\langle\lambda,\lambda\rangle} H$. Par suite (proposition 7) si α est une racine non nulle, S_α conserve le système des racines. Soit $\mathfrak{S}$ le groupe engendré par les S_α : comme les racines engendrent $\mathfrak{h}^0$, $\mathfrak{S}$ est représenté fidèlement comme groupe de permutations des racines, donc est un groupe fini appelé "groupe de Weyl" de $\mathfrak{g}$. On appelle "chambre de Weyl" une partie convexe maximale de l'ensemble obtenu en retranchant de $\mathfrak{h}^0$ les hyperplans $\alpha(H) = 0$: l'ensemble des $H \in \mathfrak{h}^0$ avec $\alpha_i(H) > 0$ pour $1 \leq i \leq r$ est une chambre de Weyl.

THÉORÈME 5. – Le groupe de Weyl $\mathfrak{S}$ est engendré par les symétries S_{α_i} $(1 \leq i \leq r)$. Toute racine non nulle est transformée d'une α_i par un $S \in \mathfrak{S}$.

$\mathfrak{S}$ est simplement transitif sur l'ensemble des chambres de Weyl.

La proposition 4 montre que, pour tout automorphisme τ de $\mathfrak{g}$, il existe un automorphisme intérieur σ tel que $\sigma\tau$ laisse $\mathfrak{h}$ invariante, donc induise sur $\mathfrak{h}^0$ un élément du groupe $\mathfrak{T}$ des rotations qui permutent les racines (remarquons que $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}$). Nous supposerons désormais que K est le corps des complexes :

THÉORÈME 6. – a. Si un automorphisme de $\mathfrak{g}$ laisse $\mathfrak{h}^0$ invariante point par point, il est de la forme $\exp(\operatorname{ad} H)$ avec $H \in \mathfrak{h}$;

b. Tout automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}$ laissant $\mathfrak{h}$ invariante induit sur $\mathfrak{h}^0$ une rotation de $\mathfrak{S}$ et réciproquement, toute rotation de $\mathfrak{S}$ est induite par un automorphisme intérieur ;

c. Toute rotation de $\mathfrak{T}$ est induite par un automorphisme de $\mathfrak{g}$: par suite, $\operatorname{aut}\mathfrak{g}/\operatorname{int}\mathfrak{g}$ est fini et est isomorphe à $\mathfrak{T}/\mathfrak{S}$.

$\mathfrak{S}$ est donc distingué dans $\mathfrak{T}$, qui est le produit semi-direct de $\mathfrak{S}$ et du sous-groupe $\mathfrak{P}$ des rotations de $\mathfrak{T}$ laissant fixe une chambre de Weyl.

5. Formes réelles et formes compactes d'une algèbre semi-simple complexe.

Une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_0$ est dite "forme réelle" de $\mathfrak{g}$, si sa complexifiée est isomorphe à $\mathfrak{g}$. La forme de Killing de $\mathfrak{g}_0$ est alors non dégénérée, $\mathfrak{g}_0$ est semi-simple. $\mathfrak{g}_0$ sera dite "compacte" si sa forme de Killing est définie négative. On considérera toujours $\mathfrak{g}_0$ comme plongée dans $\mathfrak{g}$.

THÉORÈME 7. – On peut choisir les éléments E_α du théorème 6 de telle sorte que $N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$. Les constantes $N_{\alpha,\beta}$ sont alors réelles et l'ensemble $\mathfrak{g}_u$ des éléments de $\mathfrak{g}$ de la forme

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \alpha_i + \sum_{\alpha > 0} (\mu_\alpha E_\alpha + \bar{\mu}_\alpha E_{-\alpha})$$

avec λ_i imaginaire pur et μ_α complexe arbitraire, est une forme réelle compacte de $\mathfrak{g}$.

Signalons qu'avec ce choix des E_α, les $N_{\alpha,\beta}$ sont donnés par $N^2_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2} \langle \alpha, \alpha \rangle q_{\beta,\alpha}(I - p_{\beta,\alpha})$, donc sont déterminés au signe près: van der WAERDEN a montré qu'on pouvait choisir ces signes d'une manière qui ne dépend que du système des racines, d'où une démonstration du théorème 4. D'autre part, on montre que l'on obtient par ce procédé toutes les formes compactes de $\mathfrak{g}$:

PROPOSITION 10. – Deux formes réelles compactes de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées par un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}$.

Appelons "sous-algèbre de Cartan" d'une algèbre semi-simple réelle, une sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{h}_o$ telle que les opérateurs $\operatorname{ad} H$ soient semi-simples pour $H \in \mathfrak{h}_o$: si $\mathfrak{g}_o$ est compacte, cette dernière condition est automatiquement vérifiée. La complexifiée de $\mathfrak{h}_o$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

PROPOSITION 11. – Deux sous-algèbres de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple réelle compacte $\mathfrak{g}_u$ sont conjuguées par un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}_u$. Tout élément de $\mathfrak{g}_u$ est conjugué d'un élément de $\mathfrak{h}_o$ par un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}_u$.

Remarquons que les deux assertions de la proposition 11 sont en général inexactes pour une forme réelle non compacte.

Soit $\mathfrak{g}_o$ une forme réelle arbitraire de $\mathfrak{g}$ et θ le semi-automorphisme involutif de $\mathfrak{g}$ défini par $\mathfrak{g}_o$ ($\theta(U + iV) = U - iV$ pour U et V dans $\mathfrak{g}_o$) :

THÉORÈME 8. – (E. Cartan-Mostow-Iwasawa) – Il existe une forme compacte $\mathfrak{g}_u$ de $\mathfrak{g}$ globalement invariante par θ. La sous-algèbre $\mathfrak{g}_o \cap \mathfrak{g}_u$ est l'ensemble des points fixes d'un automorphisme involutif de $\mathfrak{g}_o$. Enfin $\mathfrak{g}_o$ est la somme directe de $\mathfrak{g}_o \cap \mathfrak{g}_u$ et d'une sous-algèbre résoluble.

θ restreinte à $\mathfrak{g}_u$ est une transformation orthogonale (pour la forme de Killing) de carré I ; soit $\mathfrak{g}_u^+$ (resp. $\mathfrak{g}_u^-$) le sous-espace de $\mathfrak{g}_u$ correspondant à la valeur propre $+1$ (resp. -1) : $\mathfrak{g}_o$ est l'ensemble des éléments de la forme $U + iV$ avec $U \in \mathfrak{g}_u^+$ et $V \in \mathfrak{g}_u^-$. Réciproquement à tout automorphisme involutif θ d'une forme compacte de $\mathfrak{g}_u$ correspond par ce procédé une forme réelle de $\mathfrak{g}$, d'où la classification des algèbres de Lie simples réelles.

D'autre part, le théorème 8 est à la base de la théorie des espaces de Riemann symétriques, de la détermination des sous-groupes compacts maximaux des groupes de Lie, et par suite des théorèmes ramenant l'homotopie des groupes de Lie à celle des groupes simples compacts, et enfin de la théorie des représentations de dimension infinie des algèbres ou groupes de Lie semi-simples.