Pierre Samuel

La jacobienne d'une courbe algébrique

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. nº 106, p. 51-59

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__51_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1954)

LA JACOBIENNE D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE

par Pierre SAMUEL

(d'après W. L. CHOW [3])

La jacobienne d'une courbe algébrique C est le groupe quotient G_0/G_1 du groupe des diviseurs de degré 0 sur C par le sous-groupe des diviseurs de fonctions. Dans le cas classique, les théorèmes d'Abel et de Jacobi montrent que c'est un tore de dimension $2g$ (g : genre de C) muni d'une structure analytique complexe. WEIL a étendu ce résultat au cas abstrait en montrant que G_0/G_1 est muni d'une structure de variété abélienne. CHOW améliore ce résultat en montrant que c'est là une variété abélienne projective (et non plus seulement "abstraite" comme chez WEIL), et surtout qu'elle est définie sur n'importe quel corps de définition de C (ce qui permet une application commode de la "méthode de Picard" à la construction des variétés de Picard et d'Albanese d'une variété normale quelconque).

1. Rapide préliminaire sur les coordonnées de Chow.

Soit V une variété de dimension r dans l'espace projectif P_n. Dans le produit de $r+1$ copies de l'espace projectif dual de P_n, les systèmes $(H^{(0)}, \ldots, H^{(r)})$ de $r+1$ hyperplans de P_n tels que $H^{(0)} \cap \ldots \cap H^{(r)} \cap V \neq \emptyset$ forment une variété de dimension $r + (r+1)(n-1) = (r+1)n - 1$. Celle-ci est donc définie par une seule équation $F(u^{(0)}, \ldots, u^{(r)}) = 0$ multi-homogène et de même degré d en les $r+1$ séries de n variables $(u_0^{(i)}, \ldots, u_n^{(i)})$ (les $u_j^{(i)}$ étant les coefficients de l'équation de $H^{(i)}$). La forme F est appelée la forme associée de V. Pour un cycle positif $Z = \sum_j n_j V_j^r$ de dimension r (V_j : variétés), la forme associée de Z est $\prod_j (F_j)^{n_j}$ par définition, F_j désignant la forme associée de V_j. Les coefficients de la forme associée d'un cycle positif Z s'appellent les coordonnées de Chow de Z ; ce sont les coordonnées homogènes d'un point d'un certain espace projectif P_N (N dépendant seulement du degré et de la dimension de Z) ; on appelle ce point le point de Chow de Z, et on le notera ici $c(Z)$.

THÉORÈME. - Les points de Chow des cycles positifs de dimension et de degré donnés de P_n ((resp. portés par une variété W de P_n) forment un ensemble algébrique dans P_N. (Voir CHOW und van der WAERDEN [4]).

On a, en conséquence, une notion de spécialisation pour les cycles ; celle-ci jouit de toutes les propriétés qu'on désire (MATSUSAKA, SAMUEL). On montre aussi que la relation "$P \in \mathrm{Supp}(Z)$" ($\mathrm{Supp}(Z)$ désignant le support de Z, c'est-à-dire la réunion des composantes de Z) équivaut à une relation algébrique (à coefficients dans le corls premier) entre les coordonnées de P et les coordonnées de Chow de Z.

Comme nous nous intéressons à des questions de corps de définition, c'est-à-dire de rationalité, la notion de <u>cycle rationnel</u> sera importante pour nous. On dit qu'un cycle Z est rationnel sur k si, pour toute composante V de Z, toute variété V' conjuguée de V sur k apparaît dans Z avec le même coefficient que V ; en caractéristique $p \neq 0$, il faut naturellement répéter chacune de ces conjuguées un certain nombre de fois, c'est-à-dire exiger en plus que le coefficient de V dans Z soit un multiple d'une certaine puissance p^e de p (l'ordre d'inséparabilité de V sur k). On montre que, si deux cycles X et Y sont rationnels sur k, et si leur produit d'intersection $X.Y$ est défini, alors $X.Y$ est rationnel sur k (WEIL, [8]). Lorsqu'un cycle Z est rationnel sur K, son point de Chow $c(Z)$ est rationnel sur K (c'est-à-dire les rapports de ses coordonnées homogènes sont dans k). La réciproque est vraie dans deux cas particuliers :

a. Aucune composante de Z n'a un coefficient multiple de la caractéristique (donc c'est vrai en caractéristique 0).

b. Z est un diviseur sur une variété V définie sur un sous-corps k de K. On notera alors $k(Z)$ le corps engendré par adjonction à k des rapports des coordonnées de Chow de Z ; c'est le plus petit corps contenant k et sur lequel Z est rationnel (W.L. CHOW [2]).

2. Position du problème. Notions sur les classes de diviseurs.

Soit C une courbe projective non singulière. Un <u>diviseur</u> sur C est une combinaison $\sum_j n_j P_j$ de points de C à coefficients entiers n_j (presque tous nuls) le <u>degré</u> de $\sum_j n_j P_j$ est, par définition, $\sum_j n_j$; les diviseurs sur C forment un groupe (addition formelle). Etant donnée une fonction rationnelle f sur C, on note $v_P(f)$ l'ordre de f au point P ; on appelle diviseur de f, et on note (f), le diviseur, $\sum_P v_P(f).P$. Comme le nombre des zéros d'une fonction f est égal au nombre de ses pôles, (f) est de degré 0. Les diviseurs de fonctions forment donc un sous-groupe G_1 du groupe G_o des diviseurs de degré 0.

On se propose de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME. - Soit C une courbe projective non singulière définie sur k . Il existe une variété abélienne projective J définie sur k (ainsi que sa loi de composition ; cf. exposé de NERON), et un homomorphisme φ du groupe $G_o(C)$ sur J tels que

1° Le noyau de φ est G_1 .

2° Le couple (J , φ) est solution du problème d'applications universelles pour les homomorphismes rationnels de G_o dans les variétés abéliennes.

(On dit qu'un homomorphisme ψ de G_o dans une variété abélienne A est rationnel sur un corps K contenant k si :

a. si $\mathfrak{p}$ est un diviseur de G_o , le point $\psi(\mathfrak{p})$ est rationnel sur $K(\mathfrak{p})$;

b. si $\mathfrak{p}'$ est une spécialisation de $\mathfrak{p}$ sur K , alors $\psi(\mathfrak{p}')$ est une spécialisation de $\psi(\mathfrak{p})$ prolongeant la précédente. Ceci veut dire que ψ induit une application rationnelle sur tout système algébrique de diviseurs contenu dans G_o).

L'unicité (à un isomorphisme birationnel près) de la variété J répondant aux conditions du théorème est évidente.

Deux diviseurs sur C sont dits linéairement équivalents si leur différence est un diviseur de fonction ; les classes d'équivalence correspondantes sont appelées les classes de diviseurs sur C ; comme tout diviseur de fonction est de degré 0 , on peut parler du degré $\deg(\mathfrak{A})$ d'une classes de diviseurs $\mathfrak{A}$. Etant donnée une classe $\mathfrak{A}$ de degré positif, on note $S(\mathfrak{A})$ le "système linéaire complet" des diviseurs positifs appartenant à $\mathfrak{A}$. Si α est un élément de $\mathfrak{A}$, ces diviseurs sont de la forme $\alpha + (f)$ où f est une fonction telle que $(f) \geqslant -\alpha$. Le théorème de Riemann-Roch dit que la dimension de l'espace vectoriel des fonctions f telles que $(f) \geqslant -\alpha$ est égale à

$$\deg(\mathfrak{A}) - g + 1 + i(\mathfrak{A})$$

où g est le genre de C , et où $i(\mathfrak{A})$ (l'indice de spécialité de $\mathfrak{A}$) est un entier positif. On a $i(\mathfrak{A}) = 0$ si $\deg(\mathfrak{A}) > 2g - 2$. A partir des fonctions f telles que $(f) \geqslant -\alpha$, on construit aisément une famille linéaire d'hypersurfaces $H_\lambda \left(\sum_{j=0}^{j=\deg(\mathfrak{A})-g+i(\mathfrak{A})} \lambda_j F_j(X) = 0 \right)$ telle que les H_λ découpent sur C , en plus d'un diviseur fixe, les diviseurs du système linéaire $S(\mathfrak{A})$.

On dit qu'une classe $\mathfrak{A}$ est rationnelle sur un corps K (contenant k) si elle contient un diviseur α rationnel sur K . Si $S(\mathfrak{A})$ est non vide, ceci équivaut à

a. $\mathfrak{A}$ contient un diviseur positif et rationnel sur K , ou à

b. On peut choisir les formes $F_j(X)$ à coefficients dans K . (cf. WEIL [8], chapitre 8, théorème 10, p. 239).

L'ensemble des classes de degré n a une sorte de structure <u>affine</u> : si l'om fait choix d'une classe $\mathfrak{B}$ de degré n , la loi de composition $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') \to \mathfrak{A} + \mathfrak{A}' - \mathfrak{B}$ est une loi de groupe abélien, qui rend l'ensemble des classes de degré n isomorphe à G_0/G_1 . Lorsque $n \geqslant g$, le théorème de Riemann-Roch montre qu'il en est de même de l'ensemble des systèmes linéaires complets de degré n . Une idée naturelle (cf. WEIL [10]).est de prendre $n = g$, car les systèmes linéaires complets de degré g sont presque tous réduits à un diviseur ; alors le <u>produit symétrique</u> $C^{(g)}$ est une variété birationnellement équivalente à la variété abélienne G_0/G_1 qu'on cherche. Mais il y a le canular des diviseurs spéciaux $(i(\mathfrak{a}) > 0)$ pour lesquels les systèmes linéaires complets sont de dimension > 0 ; WEIL l'exorcise en rapieçant des morceaux. Il y a surtout le canular du choix de la classe $\mathfrak{B}$, dont rien n'indique qu'elle puisse être prise rationnelle sur k .

3. <u>Où l'on construit, sans se servir du symbole</u> τ , <u>une variété abélienne</u>.

On considère le produit symétrique $C^{(n)}$, qui s'identifie à l'ensemble des diviseurs positifs de degré n sur C . L'équivalence linéaire $\mathfrak{c} \sim \mathfrak{c}'$ est une relation <u>algébrique</u> définie sur k entre les points $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c}'$ de $C^{(n)}$ (démonstratiom par élimination dans VAN DER WAERDEN [7]). Nous prenons $n > 2g - 2$, et tel qu'il existe un diviseur positif $\mathfrak{b}$ de degré n et rationnel sur k (couper C par une hypersurface rationnelle sur k et de degré élevé). Les systèmes linéaires $S(\mathfrak{A})$ $(\deg(\mathfrak{A}) = n)$ sont des sous-variétés de $C^{(n)}$ (van der WAERDEN [7] toutes de dimension $n - g$; si $\mathfrak{A}$ est rationnelles sur $K(\supset k)$, il existe une correspondance birationnelle définie sur K entre $S(\mathfrak{A})$ et un espace projectif de dimension $n - g$, et le point de Chow $c(S(\mathfrak{A}))$ est rationnel sur K . Soit $\mathfrak{y}$ un point générique de $C^{(n)}$ sur k ; notons $|\mathfrak{y}|$ le système linéaire complet contenant le diviseur $\mathfrak{y}$. <u>Soit</u> V <u>la variété projective de point générique</u> $c(|\mathfrak{y}|)$ sur k . Comme $k(c(|\mathfrak{y}|)) \subset k(\mathfrak{y})$, on a une application rationnelle h de $C^{(n)}$ sur V . On montre successivement :

1° <u>Si</u> $\mathfrak{a} \in C^{(n)}$, $h(\mathfrak{a})$ <u>est uniquement déterminé, et est le point de Chow d'un cycle multiple de la variété</u> $\mathfrak{a}$ (on verra plus tard que le coefficient est 1).

En effet une spécialisation $h(\mathfrak{a})$ de $h(\mathfrak{y}) = c(|\mathfrak{y}|)$ prolongeant $\mathfrak{y} \to \mathfrak{a}$ est le point de Chow d'un cycle Z de dimension $n - g$ et de même degré d que $|\mathfrak{y}|$. D'autre part (VAN DER WAERDEN [7],et résultats du paragraphe 1) la relation

"$\mathrm{Supp}(X) \subset |\mathfrak{c}|^n$, entre un cycle X de dimension $n-g$ et de degré d de $C^{(n)}$ et un diviseur positif $\mathfrak{c}$ de degré n, est une relation algébrique définie sur k. D'où $\mathrm{Supp}(Z) \subset |\mathfrak{a}|$ par spécialisation de $c(|\mathfrak{y}|) = h(\mathfrak{y})$. Comme Z et $|\mathfrak{a}|$ sont de dimension $n-g$, et que $\mathfrak{a}$ est irréductible, on a $Z = q \cdot |\mathfrak{a}|$. Comme le coefficient entier q est déterminé de façon unique par les degrés, ceci montre l'unicité de $h(\mathfrak{a})$. On voit aussi que $h(\mathfrak{a})$ est rationnel sur $k(\mathfrak{a})$.

, 2° <u>La variété V est munie d'une loi de composition de groupe, rationnelle et définie sur K, et telle que le composé de deux points de V soit uniquement déterminé.</u>

En effet, étant donnés $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ dans $C^{(n)}$, il existe $\mathfrak{c} \in C^{(n)}$ tel que $\mathfrak{a} + \mathfrak{a}' - \mathfrak{b} \sim \mathfrak{c}$ (resp. $\mathfrak{d}$ tel que $2\mathfrak{b} - \mathfrak{a} \sim \mathfrak{d}$), et il résulte de 1° que $h(\mathfrak{c})$ (resp. $h(\mathfrak{d})$) est déterminé de façon unique par la donnée de $h(\mathfrak{a})$ et $h(\mathfrak{a}')$ (resp. $h(\quad)$), c'est-à-dire des classes de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ (resp. $\mathfrak{a}$).

On vérifie aussitôt qu'on a obtenu ainsi une structure de groupe abélien sur V, avec $h(\mathfrak{b})$ pour élément neutre ; notons-la additivement. Il reste à montrer que c'est une application rationnelle de $V \times V$ sur V définie sur k. En effet :

a. Si P et Q sont des points génériques indépendantes de V sur k, on a $k(P+Q) \subset k(P, Q)$ (On a en effet, par transport de structure, $P = c(|\mathfrak{y}|)$ et $Q = c(|\mathfrak{z}|)$, où $\mathfrak{y}$ et $\mathfrak{z}$ sont des points génériques et indépendants de $C^{(n)}$ sur k, et $|\mathfrak{y}|$ (resp. $|\mathfrak{z}|$) est une variété définie sur $k(P)$ (resp. $k(Q)$), donc sur $k(P, Q)$; prenons des points génériques et indépendants $\mathfrak{y}', \mathfrak{y}''$ de $|\mathfrak{y}|$ et $\mathfrak{z}', \mathfrak{z}''$ de $|\mathfrak{z}|$ sur $k(P, Q)$; comme $\mathfrak{y}' + \mathfrak{z}' - \mathfrak{b}$ est rationnel sur $k(P, Q)(\mathfrak{y}', \mathfrak{z}')$, il existe $\mathfrak{c} \sim \mathfrak{y}' + \mathfrak{z}' - \mathfrak{b}$ et rationnel sur $k(P, Q)(\mathfrak{y}', \mathfrak{z}')$; donc $P + Q = h(\mathfrak{c})$ est rationnel sur $k(P, Q)(\mathfrak{y}', \mathfrak{z}')$, et de même sur $k(P;, Q)(\mathfrak{y}'', \mathfrak{z}'')$; il est donc rationnel sur leur intersection, qui est $k(P, Q)$ par disjonction linéaire).

b. La relation "$P' + P'' = Q$" entre points de V est algébrique et définie sur k, d'après VAN DER WAERDEN [7],et les résultats du paragraphe 1.

3° <u>Toute variété V^o dérivée de V par normalisation sur k est une variété abélienne.</u>

En effet, comme à tout point de V^o correspond un seul point de V et qu'à tout point de V ne correspondent qu'un nombre fini de points de V^o, l'addition sur V définit une application rationnelle F (définie sur k) de $V^o \times V^o$ sur V^o telle qu'à tout point (P, Q) de $V^o \times V^o$ correspondant au plus un nombre fini de points de V^o. Par un choix convenable des coordonnées affines, on peut les supposer tous à distance finie. Donc, en notant $(\overline{P}, \overline{Q})$ un point générique de $V^o \times V^o$ sur k, toutes les spécialisations de $F(\overline{P}, \overline{Q})$ prolongeant $(\overline{P}, \overline{Q}) \to (P, Q)$ sont finies ; donc les coordonnées de $F(\overline{P}, \overline{Q})$ sont entières sur l'anneau local de (P, Q) sur $V^o \times V^o$ (formé avec k pour corps de base), d'après une caractérisation bien connue des éléments entiers. Mais, comme $V^o \times V^o$ est normale sur k, cet anneau local est intégralement clos, et $F(\overline{P}, \overline{Q})$ en est un élément. Ceci veut dire que F est <u>régulière</u> en (P, Q), ce qui implique que $F(P, Q)$ est uniquement déterminé. On traite de même le passage à l'opposé. On a ainsi sur V^o une loi de composition de groupe qui est, ainsi que le passage à l'opposé, rationnelle et partout régulière. Comme V^o est complète (puisque projective), c'est une variété abélienne (cf. leur définition dans l'exposé de NÉRON [5]).

C.Q.F.D.

En particulier V^o est non singulière, et tous ses points sont même absolument simples ; donc V^o est absolument normale. D'autre part la correspondance entre V et V^o est partout biunivoque (cf. droite et cissoïde !).

4. <u>Où l'on constate que la variété abélienne obtenue a les propriétés voulues</u>.

Notons J la variété abélienne V^o obtenue au paragraphe 3. Notons h' l'application rationnelle de $C^{(n)}$ sur $J = V^o$ composée de h et de $V \to V^o$. Comme la correspondance entre V et J biunivoque, $h'(\mathfrak{a})$ est déterminé de façon unique pour tout $\mathfrak{a}$ dans $C^{(n)}$. D'autre part h' est définie sur k, et $h'(\mathfrak{a})'$ est rationnel sur $k(\mathfrak{x})$, et ne dépend que de la classe de $\mathfrak{a}$. Pour tout diviseur $\mathfrak{x}$ de degré 0 sur C, il existe un diviseur $\mathfrak{a} \in C^{(n)}$ tel que $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} + \mathfrak{x}$ ($\mathfrak{b}$ étant le diviseur "de base" choisi dans le paragraphe 3) ; comme la classe de $\mathfrak{a}$ est déterminée de façon unique par $\mathfrak{x}$, la relation $\varphi(\mathfrak{x}) = h'(\mathfrak{a})$ définit une application φ de G_0 dans J. Elle est surjective (prendre $\mathfrak{x} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$). C'est un homomorphisme de groupes abéliens (se souvenir du rôle de $\mathfrak{b}$ dans la définition de h et h'). Son noyau est G_1, car $\varphi(\mathfrak{x}) = 0 = h'(\mathfrak{b})$ veut dire $h'(\mathfrak{a}) = h'(\mathfrak{b})$, donc $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$, donc $\mathfrak{x} \sim 0$.

D'autre part φ est un <u>homomorphisme rationnel</u> sur k de G_0 sur J. En effet l'on peut prendre $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} + \mathfrak{x}$ rationnel sur $k(\mathfrak{b} + \mathfrak{x}) \subset k(\mathfrak{b}, \mathfrak{x}) = k(\mathfrak{x})$ et $\varphi(\mathfrak{x}) = h'(\mathfrak{a})$ est donc rationnel sur $k(\mathfrak{x})$. D'autre part si $\mathfrak{x}'$ est spécialisation de $\mathfrak{x}$ sur k, et si $\mathfrak{b} + \mathfrak{x} \sim \mathfrak{a} \in C^{(n)}$, on a alors $\mathfrak{b} + \mathfrak{x}' \sim \mathfrak{a}'$ où $\mathfrak{a}'$ est n'importe quelle spécialisation de $\mathfrak{a}$ prolongeant $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}'$; donc $\varphi(\mathfrak{x}') = h'(\mathfrak{a}')$ est une spécialisation de $\varphi(\mathfrak{x}) = h'(\mathfrak{a})$ sur k prolongeant $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}'$.

Démontrons enfin la propriété d'<u>application universelle</u>. Soit ψ un homomorphisme rationnel sur un corps K $(\supset k)$ de G_0 dans une variété abélienne A (définie sur K). Pour $\alpha \in C^{(n)}$, posons $u(\alpha) = \psi(\alpha - \mathfrak{b})$; c'est une application rationnelle (définie sur K) de $C^{(n)}$ dans A. Comme une application rationnelle d'une espace projectif dans une variété abélienne est nécessairement <u>constante</u> (cf. [5]), u est constante sur chaque système linéaire $|\alpha|$. Prenons un point générique $\mathfrak{y}$ de $C^{(n)}$ sur K ; alors $u(\mathfrak{y})$ est rationnel sur tout corps de la forme $K(c(|\mathfrak{y}|))(\mathfrak{y}')$, où $\mathfrak{y}'$ est un point générique de $|\mathfrak{y}|$ sur le corps de définition $K(c(|\mathfrak{y}|))$ de $|\mathfrak{y}|$, donc sur leur intersection $K(c(|\mathfrak{y}|))$. On a ainsi défini une application rationnelle de V, et donc de $V^0 = J$, dans A ; soit v celle-ci. Comme $v(0) = v(h'(\mathfrak{b})) = u(\mathfrak{b}) = 0$, et que J et A sont abéliennes, v est nécessairement un <u>homomorphisme</u> de J dans A (cf. [5]). Enfin les homomorphismes ψ et $v_0\varphi$ de G_0 dans A, qui coïncident évidemment sur les diviseurs de la forme $\alpha - \mathfrak{b}$ $(\alpha \in C^{(n)})$, coïncident sur leurs combinaisons linéaires : mais celles-ci sont tous les diviseurs de degré 0 puisqu'un tel diviseur $\mathfrak{z}$ peut (en introduisant des répétitions) s'écrire $\mathfrak{z} = \sum_j n_j \alpha_j$ où $\alpha_j \in C^{(n)}$ et où $\sum_j n_j = 0$, donc $\mathfrak{z} = \sum_j n_j(\alpha_j - \mathfrak{b})$.

C.Q.F.D.

Pour avoir tout ce que contient la théorie de WEIL, il faut encore définir une <u>fonction canonique</u>, application rationnelle f de C dans sa Jacobienne J jouissant de certaines propriétés. On choisit un diviseur $\mathfrak{p}$ de degré 1, et on pose (pour $P \in C$) $f(P) = \varphi(P - \mathfrak{p})$. Pour que $\sum_j n_j P_j \sim 0$ (où $\sum_j n_j = 0$), il faut et il suffit évidemment que $\sum_j n_j f(P_j) = 0$. On a donc bien une fonction canonique. Celle-ci est définie <u>sur</u> $k(\mathfrak{p})$. Pour avoir une fonction canonique définie <u>sur</u> k, il suffit qu'il existe un diviseur de degré 1 et rationnel sur k, en particulier un point rationnel sur k.

C'est le cas lorsque k est un corps fini (WEIL [9], haut de la p. 71, ou F.K. SCHMIDT, [6]).

5. <u>Quelques compléments, toujours plaisants, et souvent délectables.</u>

Nous avons (dans le paragraphe 3) remplacé la variété V des points de Chow des systèmes linéaires complets de degré n par un modèle normal associé V^0. En fait ceci était <u>inutile</u>, vu que V est non singulière. La démonstration en est délicate, et comporte les stades suivants :

1° La variété $C^{(n)}$ est non singulière. Si h désigne le degré de C, le degré de $C^{(n)}$ est h^n.

Méthode : si les $(x_i^{(j)})$ $(j = 1, \ldots, n)$ sont n points génériques et indépendants de C sur k, $C^{(n)}$ $(x_{i(1)}^{(1)}, x_{i(2)}^{(2)} \cdot \ldots \cdot x_{i(n)}^{(n)})$ pour point générique homogène (il y a q^n tels monômes m_s si C est plongée dans P_{q-1}). On coupe alors $C^{(n)}$ par les hyperplans de la forme $(\sum_s v_{i(1)}^{(1)} \cdot \ldots \cdot v_{i(n)}^{(n)} \cdot Y_s = 0)$.

On compte les points d'intersection avec l'intersection de n de ces hyperplans ; il y en a h^n, et chacun compte pour 1 si les v sont génériques (par transversalité). D'autre part, par tout point α de $C^{(n)}$ on peut faire passer n de ces hyperplans de façon que leur intersection ait encore $h^n - 1$ points communs avec $C^{(n)}$; donc α compte pour 1 dans l'intersection, et est donc simple sur $C^{(n)}$.

2° Tous les systèmes linéaires complets $|\alpha|$ sont des sous-variétés de même degré h^{n-g} de $C^{(n)}$. En particulier le point $h(\alpha)$ de V (défini en 3) est le point de Chow de $|\alpha|$.

Méthode : comme ci-dessus.

3° On utilise alors le théorème suivant. Soient U une variété, $(Z(y))$ un système algébrique de cycles positifs sur U tel que par tout point de U passe un cycle du système et un seul ; notons y le point de Chow de $Z(y)$, V la variété des points y, et f l'application évidente de U sur V. Si y est un point de V, si G est une composante simple (sur U) de $Z(y)$, et si f est régulière le long de G, alors U et le produit $V \times G$ sont analytiquement équivalentes aux sous-variétés G et $(y) \times G$ respectivement. En particulier, si U est non singulière, le point y est simple sur V. On applique ceci à $U = C^{(n)}$ fibrée par les cycles $|\alpha|$, et ceci montre que V est non singulière.

La démonstration de ce théorème (dû encore à CHOW [1] fait appel à toute la théorie des formes associées, et à toute la théorie des anneaux locaux complets.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOW (Wei-Liang). - Algebraic systems of positive cycles in an algebraic variety, Amer. J. Math., t. 72, 1950, p. 247-283.

[2] CHOW (Wei-Liang). - On the defining field of a diviser in an algebraic variety, Proc. Amer. math. Soc., t. 1, 1950, p. 797-799.

[3] CHOW (Wei-Liang). - The jacobian variety of an algebraic curve, Amer. J. Math., t. 76, 1954, p. 453-476.

[4] CHOW (W. L.) und VAN DER WAERDEN (B. L.). - Zur algebraischen Geometrie, IX : Über zugeordnete Formen und algebraische Systeme von algebraischen Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen, t. 113, 1937, p. 692-704.

[5] NÉRON (A.). - Variétés abéliennes [d'après A. Weil], Séminaire Bourbaki, t. 7, 1954/55.

[6] SCHMIDT (F. K.). - Analytische Zahlentheorie in Körpern der Characteristic p, Math. Zeitschrift, t. 33, 1931, p. 1-32.

[7] VAN DER VAERDEN (B. L.). - Divisorenklassen in algebraischen Funktionenkörpern, Comm. Math. Helv., t. 20, 1947, p. 68-109.

[8] WEIL (André). - Foundations of algebraic geometry. - New York, American mathematical Society, 1946 (Amer. math. Soc. Coll. Publ. n° 29).

[9] WEIL (André). - Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent. - Paris, Hermann, 1948 (Act. scient. et ind. n° 1041 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 7).

[10] WEIL (André). - Variétés abéliennes et courbes algébriques. - Paris, Hermann, 1948 (Aut. scient. et ind. n° 1064 ; Rubl. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 8).