SÉMINAIRE N. BOURBAKI

FRANÇOIS TRÈVES

Thèse d'Hörmander, II

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. nº 135, p. 371-379

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__371_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1956)

THÈSE D'HÖRMANDER [1], II

par François TRÈVES.

SOMMAIRE. - HÖRMANDER définit une relation de préordre sur l'ensemble des polynômes différentiels $P(D)$, en utilisant leurs dérivées $P^{(p)}(D)$ (voir [2]).

Par une légère modification de la preuve du lemme 1 [2], on parvient à démontrer l' "inversibilité" locale d'une large catégorie d'opérateurs différentiels à coefficients variables.

Les notations sont celles du premier exposé [2].

1. Comparaison des opérateurs différentiels.

Soient $P(D)$, $Q(D)$ deux opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants sur R^n.

DÉFINITION 1. - *On dit que* $Q(D)$ *est plus faible que* $P(D)$ (*ou que* $P(D)$ *est plus fort que* $Q(D)$) *si, à tout ouvert relativement compact* Ω *de* R^n, *il correspond une constante finie* C_Ω *telle que* $\|Q(D)\varphi\|_{L^2} \leq C_\Omega \|P(D)\varphi\|_{L^2}$ *pour toute fonction* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Nous poserons, d'autre part, pour tout polynôme $P(X) \in C[X_1, \dots, X_n]$: $\tilde{P}(\zeta) = \sqrt{\sum |P^{(p)}(\zeta)|^2}$ ($\zeta \in C^n$), la sommation étant effectuée par rapport à tous les systèmes $p = (p_1, \dots, p_n)$ de n entiers ≥ 0.

PROPOSITION 1. - *S'il existe un ouvert* Ω *non vide de* R^n, *et une constante finie* C_Ω, *tels que* $\|Q(D)\varphi\|_{L^2} \leq C_\Omega \|P(D)\varphi\|_{L^2}$ *pour toute* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *alors il existe une constante finie* B *telle que* $\tilde{Q}(\xi) \leq B\,\tilde{P}(\xi)$ *pour tout* $\xi \in R^n$. *Et s'il existe une telle constante* B, *alors* $Q(D)$ *est plus faible que* $P(D)$.

Prenons $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\psi(x) = \varphi(x) \exp(2i\pi\langle x, \xi\rangle)$. En vertu de la formule de Leibniz généralisée (voir [2]), on a :

$$P(D)\psi(x) = e^{2i\pi\langle x, \xi\rangle} \sum P^{(p)}(\xi) \frac{D^p\varphi(x)}{p!} .$$

Posons $a_{p,q} = \frac{1}{p!q!}\int D^p\varphi \cdot \overline{D^q\varphi}\, dx$. La forme quadratique $\sum a_{p,q}\, t_p\, \bar{t}_q$ est hermitique définie positive. Cela résulte de Plancherel :

$$\sum a_{p,q}\, t_p\, \bar{t}_q = \int \Big(\sum_p \frac{t_p}{p!} D^p \varphi \Big) \overline{\Big(\sum_q \frac{t_q}{q!} D^q \varphi \Big)}\, dx = \int \Big| \sum_p \frac{t_p}{p!} D^p \varphi \Big|^2 dx =$$

$$= \int \Big| \sum_p (2\pi)^{|p|} \frac{t_p\, y_1^{p_1} \dots y_n^{p_n}}{p!} \Big|^2 |\mathcal{F}\varphi(y)|^2\, dy \,.$$

Or la forme $\sum_p (2\pi)^{|p|} \frac{t_p}{p!} y_1^{p_1} \dots y_n^{p_n}$ ne peut être nulle pour tout $y \in R^n$ que si tous les t_p sont nuls.

En particulier, cela implique l'existence d'une constante finie A_1 telle que $\sum_p |t_p|^2 \leq A_1^2 \sum_{p,q} a_{p,q}\, t_p\, \bar{t}_q$ pour tout système de μ nombres complexes t_p ; μ est un entier qui dépend de l'ordre m de $P(D)$.

Prenons alors $t_p = Q^{(p)}(\xi)$; on obtient :

$$\sum_p |Q^{(p)}(\xi)|^2 = \tilde{Q}^2(\xi) \leq A_1^2 \sum_{p,q} a_{p,q}\, Q^{(p)}(\xi)\, \overline{Q^{(q)}(\xi)} \,.$$

Mais l'inégalité $\|Q(D)\psi\|^2_{L^2} \leq C^2_{\Omega} \|P(D)\psi\|^2_{L^2}$ donne immédiatement

$$\sum_{p,q} a_{p,q}\, Q^{(p)}(\xi)\, \overline{Q^{(q)}(\xi)} \leq C^2_{\Omega} \sum_{p,q} a_{p,q}\, P^{(q)}(\xi)\, \overline{P^{(q)}(\xi)}$$

et, compte tenu de ce que :

$$\sum_{p,q} a_{p,q}\, P^{(p)}(\xi)\, \overline{P^{(q)}(\xi)} \leq A_2^2 \sum_p |P^{(p)}(\xi)|^2$$

on en déduit : $\tilde{Q}(\xi) \leq B\, \tilde{P}(\xi)$, avec $B = A_1 A_2 C_{\Omega}$. La première partie de la proposition 1 se trouve ainsi démontrée.

Supposons maintenant $\tilde{Q}(\xi) \leq B\, \tilde{P}(\xi)$. En particulier, on aura

$$|Q(\xi)|^2 \leq B^2 \sum_p |P^{(p)}(\xi)|^2 \,,$$

d'où, en appliquant de nouveau Plancherel :

$$\int |Q(D)\psi|^2\, dx = \int |Q(\xi)|^2\, |\mathcal{F}\psi(\xi)|^2 d\xi \leq B^2 \sum \int |P^{(p)}(\xi)|^2\, |\mathcal{F}\psi(\xi)|\, d\xi =$$
$$= B^2 \sum_p \|P^{(p)}(D)\psi\|^2_{L^2} \,.$$

On a pris $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, où Ω est un ouvert relativement compact quelconque de R^n . Mais d'après le lemme 1 du premier exposé, nous savons qu'il existe une constante $A_\Omega < +\infty$ telle que

$$\|P^{(p)}(D)\varphi\|^2_{L^2} \leq A^2_\Omega \|P(D)\varphi\|^2_{L^2}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En prenant $C^2_\Omega = B^2 \sum_p A^2_\Omega$, on obtient immédiatement :

$$\|Q(D)\psi\|_{L^2} \leq C_\Omega \|P(D)\psi\|_{L^2} .$$

COROLLAIRE. - Pour que $Q(D)$ soit plus faible que $P(D)$, il faut et il suffit qu'il existe une constante $A < +\infty$ telle que $|Q(\xi)| \leq A\,\tilde{P}(\xi)$ pour tout $\xi \in R^n$.

Nécessité évidente, puisque $|Q(\xi)| \leq \tilde{Q}(\xi)$. D'autre part, la fin de la démonstration de la proposition 1 utilise simplement le fait que

$$|Q(\xi)|^2 \leq B^2 \sum_p |P^{(p)}(\xi)|^2 .$$

Notons $P_m(X)$ la partie homogène de plus haut degré (en l'occurrence, de degré m) du polynôme $P(X)$. On sait que l'opérateur $P(D)$ est dit elliptique si le seul zéro de $P_m(X)$ dans R^n est l'origine. Visiblement, si $P(D)$ est elliptique, il est complet et type local (voir [2]) ; et visiblement aussi (il suffit de prendre l'opérateur de la chaleur), la réciproque est inexacte.

PROPOSITION 2. - Pour que $P(D)$ soit elliptique, il faut et il suffit qu'il soit plus fort que tout opérateur $Q(D)$ d'ordre inférieur ou égal au sien.

Démonstration quasi immédiate : si $P(D)$ est elliptique, $|\xi|^{2m} \leq M_1 |P(\xi)|^2$ pour tout $\xi \in R^n$.. Si $\deg Q(X) \leq m$, alors pour tout p ,

$$|Q^{(p)}(\xi)| \leq M_2 (1 + |\xi|^{2m})^{1/2} \quad \text{(quel que soit } \xi \in R^n) .$$

Choisissons alors q de telle sorte que $P^{(q)}(X) = \text{Cte} \neq 0$; on voit qu'il existe $M < +\infty$ telle que :

$$\tilde{Q}(\xi)^2 = \sum |(Q^{(p)}(\xi)|^2 \leq M^2(|P^{(q)}(\xi)|^2 + |P(\xi)|^2) .$$

D'où la nécessité de la condition, compte tenu de la proposition 1 .

Inversement, si $P(D)$ n'était pas elliptique, il existerait un cône Γ , non réduit à l'origine et de sommet en ce point, sur lequel $P_m(\xi) = 0$, et donc sur lequel $\tilde{P}(\xi)$ croîtrait (si l'on faisait tendre $|\xi|$ vers l'infini) au plus comme $|\xi|^{m-1}$. Il serait facile alors de trouver un polynôme $Q(X)$, de degré m tel qu'il n'existe aucune constante finie A vérifiant $|Q(\xi)| \leq$ $\leq A\,\tilde{P}(\xi)$ pour tout $\xi \in R^n$.

DÉFINITION 2. - $P(D)$ sera dit de type principal si les dérivées partielles $\partial P_m/\partial X_j$ de la partie homogène $P_m(X)$ de plus haut degré de $P(X)$ ne s'annulent simultanément, dans R^n , qu'à l'origine.

Les opérateurs de type principal ont des propriétés simples, même lorsque les coefficients sont variables, comme nous le verrons plus loin. Tout opérateur elliptique est de type principal ; la réciproque est fausse puisque tous les opérateurs du 1er ordre sont de type principal. Mais ils ne sont pas tous elliptiques.

L'opérateur de la chaleur $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ n'est pas de type principal, comme on le voit immédiatement. Par contre, l'opérateur des ondes $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ est de type principal.

D'ailleurs la définition 2 équivaut à la suivante : $P(D)$ sera de type principal si le cône de R^n , dont l'équation est $P_m(\xi) = 0$, ne possède pas de génératrice double.

PROPOSITION 3. - Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1° $P(D)$ est de type principal ;

2° $P(D)$ est à la fois plus fort et plus faible que tout opérateur différentiel ayant la même partie homogène de plus haut degré que $P(D)$.

1° $\longrightarrow$ 2° . Soit $Q(D)$ un opérateur différentiel ayant même partie homogène de degré maximum que $P(D)$. On a évidemment, pour tout $\xi \in R^n$

$$\tilde{P}(\xi)^2 > \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial P}{\partial \xi_j}(\xi)\right|^2 = \Pi(\xi) + r(\xi) ,$$

où $\deg r(\xi) < 2(m-1)$, et $\Pi(\xi) = \sum \left|\frac{\partial P_m}{\partial \xi_j}(\xi)\right|^2$.

$\Pi(\xi)$ est homogène, de degré $2(m-1)$, et ne s'annule par hypothèse qu'en $\xi = 0$. Il s'ensuit que $r(\xi)/\Pi(\xi) \to 0$ lorsque $|\xi| \to +\infty$.

Prenons $|\xi|$ assez grand pour avoir $|r(\xi)|/\Pi(\xi) < \frac{3}{4}$. On a alors

$$\frac{|Q(\xi)|}{\tilde{P}(\xi)|} \leq \frac{|P(\xi)|}{\tilde{P}(\xi)} + \frac{|Q(\xi) - P(\xi)|}{\tilde{P}(\xi)} \leq 1 + \frac{2|Q(\xi) - P(\xi)|}{\sqrt{\pi(\xi)}}$$

et le dernier terme a visiblement une limite. Ceci prouve (corollaire de la proposition 1) que $Q(D)$ est plus faible que $P(D)$; mais on peut échanger les rôles de P et Q, puisqu'ils ont même partie homogène de degré m.

$2° \Longrightarrow 1°$. Si $P(D)$ possède la propriété $2°$, il en est évidemment de même de $P_m(D)$, qui est donc plus fort que $P_m(D) + \lambda D^p$, où λ est un scalaire, et $|p| = p_1 + \dots + p_n = m - 1$, et par suite aussi de $\lambda\ D^p$. Il s'ensuit qu'il existe une constante $A < + \infty$ telle que $(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{m-1} \leq A^2 \tilde{P}_m^2(\xi)$.

Supposons alors qu'il existe $\eta \in R^n$, $\eta \neq 0$, tel que $\frac{\partial P_m}{\partial \eta_j}(\eta) = 0$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$.

Puisque $P_m(X)$ est homogène, on devrait avoir aussi $P_m(\eta) = 0$ d'après l'identité d'Euler. Et de même, on aurait $\frac{\partial P_m}{\partial \eta_j}(t\eta) = 0$, $P_m(t\eta) = 0$ $(1 \leq j \leq n)$ pour tout réel t. Cela signifierait que $\tilde{P}_m^2(t\eta)$ croît au plus comme $|t|^{2m-3}$ lorsque $|t| \to \infty$; ceci est en contradiction avec l'inégalité précédente. C.Q.F.D.

Une autre caractérisation des opérateurs de type principal va nous servir bientôt :

<u>Pour que</u> $P(D)$ <u>soit de type principal, il faut et il suffit qu'il existe</u> $A < + \infty$ <u>telle que</u>

$$(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{m-1} \leq A \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial P_m}{\partial \xi_j}(\xi)\right|^2 \quad \underline{\text{pour tout}} \quad \xi \in R^n .$$

Ce résultat est évident.

2. Un théorème sur les opérateurs différentiels à coefficients variables.

$P(x, D)$ désignera, à partir de maintenant, un opérateur différentiel linéaire, à coefficients variables, sur R^n ; $P(x_0, D)$ sera l'opérateur à coefficients constants obtenu en faisant $x = x_0$ dans les coefficients de $P(x, D)$.

DÉFINITION 3. - $P(x, D)$ <u>sera dit de type principal, si</u> $P(x_0, D)$ <u>est de type principal pour tout</u> $x_0 \in R^n$.

$P_m(x, D)$ désignera la partie homogène d'ordre maximum m de $P(x, D)$.

THÉORÈME 1. - On suppose que $P(x\ ,\ D)$ est de type principal, que les coefficients de $P_m(x\ ,\ D)$ sont une fois continûment différentiables et réels, que ceux de $P(x\ ,\ D)$ sont continus. Dans ces conditions, il existe un voisinage ouvert Ω de 0 et une constante $A < +\infty$ telle que :

$$\sum_{|p| < m} \|D^p \varphi\|^2_{L^2} \leq A \ \|P(x\ ,\ D)\varphi\|^2_{L^2} \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) .$$

Nous nous bornerons ici à esquisser une transcription de la preuve de ce théorème dans des notations plus simples que celles utilisées par HÖRMANDER.

De ce que $P(x\ ,\ D)$ est de type principal découle qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$c\left(\sum |\xi_j|^2\right)^{m-1} \leq \sum \left|\frac{\partial}{\partial \xi_j} P_m(0\ ,\ \xi)\right|^2 \quad \text{pour tout } \xi \in R^n .$$

Appliquons une fois de plus Plancherel ; la majoration précédente conduit à :

$$c' \sum_{|p|=m-1} \|D^p \varphi\|^2_{L^2} \leq \sum_j \|P_{m,j}(0\ ,\ D)\varphi\|^2_{L^2}$$

où $P_{m,j}(0\ ,\ D)$ est l'opérateur (àcoefficient constants) associé à

$$\frac{-1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial X_j} P_m(0\ ,\ X) .$$

Mais du lemme 1 de [2] résulte que, si $k \leq m-2$ et si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (où Ω est, pour le moment, un ouvert relativement compact arbitraire), on aura :

$$\sum_{|p|=k} \|D^p \varphi\|^2_{L^2} \leq B\ \delta \sum_{|p|=m-1} \|D^p \varphi\|^2_{L^2}$$

où $\delta = \sup_{x \in \Omega} |x|$.

Utilisons maintenant la continue différentiabilité des coefficients de $P_m(x\ ,\ D)$;

elle permet d'écrire :

$$\sum_j \|P_{m,j}(0\ ,\ D)\varphi\|^2_{L^2} \leq \sum_j \|P_{m,j}(x\ ,\ D)\varphi\|^2_{L^2} + M\delta \sum_{|p|=m-1} \|D^p \varphi\|^2_{L^2}$$

où M est une constante , et où $P_{m,j}(x\ ,\ D)$ est l'opérateur (à coefficients variables) obtenu en substituant $\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial x_k}$ à X_k dans $\frac{-1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial X_j} P_m(x\ ,\ X)$.

Parvenus à ce point, nous voyons que :

$$(c' - M\delta) \sum_{|p|\leq m-1} \|D^p \varphi\|^2_{L^2} \leq B_1 \sum_j \|P_{m,j}(x , D)\varphi\|^2_{L^2} .$$

On essaie ensuite d'établir une majoration du type suivant :

$$(1) \qquad \sum_j \|P_{m,j}(x , D)\varphi\|^2_{L^2} \leq A_1 \delta [\,\|P(x , D)\varphi\|_{L^2} + \left(\sum_{|p|\leq m-1} \|D^p\varphi\|^2_{L^2}\right)^{1/2}] \cdot \left(\sum_{|p|\leq m-1} \|D^p\varphi\|^2_{L^2}\right)^{1/2}$$

qui, jointe à la précédente, donne :

$$(c' - M\delta - A_1 \delta)\left(\sum_{|p|\leq m-1} \|D^p \varphi\|^2_{L^2}\right)^{1/2} \leq A_1 \leq \|P(x , D)\varphi\|_{L^2} .$$

Il suffira enfin de choisir Ω assez petit pour que $\delta < \frac{c'}{M + A_1}$.

Pour établir (1) , on procède en s'inspirant de la démonstration du lemme 1 ([2]) .

On part pour cela de

$$\langle x_k(P_m(x , D)\varphi) , \overline{P_{m,k}(x , D)\varphi}\rangle = \|P_{m,k}(x , D)\varphi\|^2_{L^2} + \langle P_m(x , D)[x_k \varphi(x)] , \overline{P_{m,k}(x , D)\varphi}\rangle$$

et on transpose convenablement les dérivations et les multiplications. On parvient au résultat grâce au fait suivant : puisque les coefficients de $P_m(x , D)$ sont réels, il existe un opérateur différentiel $S(x , D)$ tel que

$$\tilde{P}_m(x , D)\, P_{m,k}(x , D) - \tilde{P}_{m,k}(x , D)P_m(x , D) - S(x , D)\, P_m(x , D)$$

ne fasse intervenir que des dérivations d'ordre $\leq 2(m - 1)$, tandis que $S(x , D)$ lui-même est d'ordre $\leq m - 1$. Rappelons que $\tilde{Q}(x , D)$ est défini par :

$$\langle Q(x , D)\varphi , \overline{\psi}\rangle = \langle \varphi , \overline{\tilde{Q}(x , D)\psi}\rangle$$

par exemple pour toutes $\varphi , \psi \in \mathcal{D}$. Remarquons que le fait précédent n'est plus vrai en général si on ne suppose pas les coefficients réels, comme l'atteste le cas de

$$P_m(x\ ,\ D) = \frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\ .$$

On a $\tilde{P}_m(x\ ,\ D) = -\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}$, et $P_{m,1}(x\ ,\ D) = 1$, d'où :

$$\tilde{P}_m(x\ ,\ D)P_{m,1}(x\ ,\ D) - \tilde{P}_{m,1}(x\ ,\ D)P_m(x\ ,\ D) = -\,2\,\frac{\partial}{\partial x}$$

et notre assertion est en défaut.

Pour interpréter le théorème 1 , introduisons l'espace $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ des fonctions définies sur Ω , dont toutes les dérivées (au sens des distributions) jusqu'à l'ordre m inclus, appartiennent à $L^2(\Omega)$. On définit sur $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ une structure hilbertienne, et on note $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$. Alors la conclusion du théorème 1 implique l'existence d'une application linéaire continue J_1 de $L^2(\Omega)$ dans $\mathcal{D}^{m-1}_{L^2}(\Omega)$, telle que $J_1P(x\ ,\ D)f = f$ pour toute $f \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$. Comme les propriétés exigées par le théorème 1 sont vraies pour le transposé $\tilde{P}(x\ ,\ D)$ dès qu'elles le sont pour $P(x\ ,\ D)$, on en déduit qu'il existe une application linéaire continue J_2 de $\mathcal{D}'^{m-1}_{L^2}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ telle que $P(x\ ,\ D)\ J_2\ f = f$ pour toute $f \in \mathcal{D}'^{m-1}_{L^2}(\Omega)$.

Soulignons que Ω ne saurait être un voisinage arbitraire de 0 ; il dépend en général de l'opérateur $P(x\ ,\ D)$, comme le prouve le contre-exemple suivant :

On considère l'opérateur $P(x\ ,\ D) = -\,y\,\frac{\partial}{\partial x} + x\,\frac{\partial}{\partial y} + \alpha(x\ ,\ y\ ,\ z)\,\frac{\partial}{\partial z}$ sur R^3 ; $\alpha(x\ ,\ y\ ,\ z)$ est une fonction réelle, indéfiniment dérivable, non nulle pour $x = y = 0$ mais nulle pour $0 < a \leq x^2 + y^2 \leq b$. L'opérateur $P(x\ ,\ D)$ est de type principal ; ses coefficients sont réels et indéfiniment différentiables. Néanmoins, si $\varphi(t) \in \mathcal{D}(R^1)$ a son support dans $(a\ ,\ b)$,

$$P(x\ ,\ D)\,\varphi(z)\,\varphi(x^2 + y^2) = 0\ ,$$

ce qui exclut l'existence d'un inverse (au sens ci-dessus) pour $P(x\ ;\ D)$ lorsque Ω ne remplit pas certaines conditions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER (Lars). - On the theory of general partial differential operators, Acta Math., t. 94, 1955, p. 161-248.

[2] TRÈVES (François). - Thèse d'Hörmander, I, Séminaire Bourbaki, t. 8, 1955/56, Exposé n°130.

[Juillet 1957]