SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-PIERRE SERRE

Théorie du corps de classes pour les revêtements non ramifiés de variétés algébriques

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. nº 133, p. 347-355
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__347_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1956)

THÉORIE DU CORPS DE CLASSES POUR LES REVÊTEMENTS NON RAMIFIÉS DE VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES

par Jean-Pierre SERRE
(d'après S. Lang, [2], [3])

1. Rappel du cas classique.

Avant d'exposer les résultats de LANG, nous rappellerons brièvement ceux relatifs aux corps de nombres, dûs principalement à HILBERT, TAKAGI, ARTIN.

Soit L/K une extension abélienne finie d'un corps de nombres algébriques K, et soit G son groupe de Galois. Soit S l'ensemble (fini) des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de K qui se ramifient dans L. Si $\mathfrak{p} \notin S$, on a : $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_g$ dans L, les $\mathfrak{P}_i$ étant des idéaux premiers de L, permutés transitivement par le groupe G. Le sous-groupe de G qui laisse fixe l'un des $\mathfrak{P}_i$ est appelé le groupe de décomposition de $\mathfrak{p}$, et noté $G_{\mathfrak{p}}$; il est indépendant de i du fait que G est abélien ; de plus, il est isomorphe au groupe de Galois de l'extension $\overline{L}_{\mathfrak{P}_i}/\overline{K}_{\mathfrak{p}}$ des corps des restes relatifs à $\mathfrak{P}_i$ et à $\mathfrak{p}$. Si $N\mathfrak{p}$ désigne le nombre d'éléments du corps fini $\overline{K}_{\mathfrak{p}}$, ce dernier groupe est un groupe cyclique, engendré par la substitution $x \longrightarrow x^{N\mathfrak{p}}$, et d'ordre $f = [\overline{L}_{\mathfrak{P}_i} : \overline{K}_{\mathfrak{p}}]$. Le groupe $G_{\mathfrak{p}}$ est donc lui-même un groupe cyclique d'ordre f, engendré par un élément σ tel que :

$$x^{\sigma} \equiv x^{N\mathfrak{p}} \bmod \mathfrak{P}_i \quad \text{(pour tout } x \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}_i}\text{, anneau local de } \mathfrak{P}_i\text{)}.$$

L'élément σ est appelé la <u>substitution de Frobenius</u> de $\mathfrak{p}$, et noté $(\mathfrak{p}, L/K)$. On a alors :

1.1. (<u>Théorème de la progression arithmétique</u>). - <u>Pour tout</u> $\sigma \in G$, <u>il existe une infinité d'idéaux premiers</u> $\mathfrak{p}$ <u>de</u> K <u>tels que</u> $\sigma = (\mathfrak{p}, L/K)$.

(De plus, la densité de ces idéaux ne dépend pas de σ).

Pour énoncer les autres résultats essentiels de la théorie du corps de classes, nous supposerons que l'extension L/K est partout <u>non ramifiée</u> (i.e. $S = \emptyset$ et K est complexe dans tout conjugué complexe de L).

L'application $\mathfrak{p} \longrightarrow (\mathfrak{p}, L/K)$ se prolonge alors par linéarité en une application $T : J_K \longrightarrow G$, où J_K désigne le groupe des idéaux de K ; nous appellerons cette application l'application de réciprocité ; elle est surjective d'après 1.1.

1.2. (Loi de réciprocité). - Le noyau de l'application de réciprocité est le sous-groupe de J_K engendré par les idéaux principaux de K et les normes des idéaux de L.

En particulier, T définit par passage au quotient un homomorphisme surjectif $T' : C_K \longrightarrow G$, où C_K désigne le groupe des classes d'idéaux de K.

1.3. (Théorème d'existence). - Tout groupe quotient de C_K est groupe de Galois d'une extension partout non ramifiée de K et d'une seule.

On voit donc que C_K est le groupe de Galois de l'extension abélienne partout non ramifiée maximale de K (c'est le "corps de classes absolu" de Hilbert).

2. Revêtements des variétés algébriques.

Dans ce numéro, k désignera un corps parfait, et $\bar{k}$ sa clôture algébrique ; dans la suite, nous nous intéresserons surtout au cas où k est un corps fini à q éléments.

Soit V une variété normale, définie sur k, et soit $K = k(V)$ le corps des fonctions rationnelles sur V, définies sur k. Le rôle joué au numéro 1 par les idéaux premiers de K sera joué ici par les cycles premiers de dimension 0 de V ; par définition, un tel cycle s'écrit

$$\mathfrak{p} = x_1 + \dots + x_d \quad ,$$

où $x_1 = x$ est un point simple de V, tel que $[k(x):k] = d$, et où $x_1,\dots,x_d$ désignent les d conjugués de x par rapport à k. L'entier d est appelé le degré du cycle premier $\mathfrak{p}$, et noté $\deg(\mathfrak{p})$. Les points x_i déterminent le même anneau local dans K, que l'on peut donc noter $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$; son corps des restes $\bar{K}_{\mathfrak{p}}$ est isomorphe aux $k(x_i)$. On observera que ces définitions sont relatives à V et à k ; lorsqu'on voudra éviter toute confusion, on parlera donc d'un cycle premier de V_k.

Soit maintenant L/K une extension abélienne finie de K, et soit G son groupe de Galois. Pour tout anneau local $\mathcal{O}$ de V_k, soit $\mathcal{O}'$ la clôture intégrale de $\mathcal{O}$ dans L ; c'est un anneau semi-local, qui peut s'écrire $\mathcal{O}' = \mathcal{O}_1 \cap \dots \cap \mathcal{O}_g$, les $\mathcal{O}_i$ désignant des anneaux locaux, permutés transitivement par G. Les $\mathcal{O}_i$ sont les anneaux locaux d'une variété algébrique W, dite normalisée de V dans L. Le corps k' des constantes de W est la fermeture algébrique de k dans L ;

s'il coïncide avec k, on dit que l'extension est "géométrique" ; dans ce cas, on a une projection canonique

$$f : W \longrightarrow V ,$$

définie sur k, qui fait de W un "revêtement" de V (en général ramifié), le groupe G s'identifiant à la manière habituelle à un groupe d'automorphismes de W.

Soient $\mathfrak{p}$ un cycle premier de V_k, $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ son anneau local, et $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$ la clôture intégrale de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ dans L. On dit que L/K est <u>non ramifiée en</u> $\mathfrak{p}$ si le radical de l'anneau semi-local $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$ est engendré par l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$; cette propriété est invariante par extension du corps de base ; dans le cas géométrique, elle équivaut à dire qu'au-dessus de tout $x \in \mathfrak{p}$ il existe exactement n points de W, si $n = [L:K]$.

3. Généralisation du théorème de la progression arithmétique.

Les notations étant celles du numéro 2, supposons que le corps de base k soit un <u>corps fini</u> à q éléments. Pour tout cycle premier $\mathfrak{p}$ de V_k, on posera alors $N\mathfrak{p} = q^{\deg(\mathfrak{p})}$; c'est le nombre d'éléments du corps fini $\overline{K}_{\mathfrak{p}}$.

Si en outre $\mathfrak{p}$ est non ramifié, soient $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_g$ les cycles premiers de W_k, correspondant aux anneaux locaux $\mathcal{O}_i$ du numéro 2 ; on voit, comme dans le cas des corps de nombres, que le groupe de décomposition $G_{\mathfrak{P}}$ de $\mathfrak{p}$ est isomorphe au groupe de Galois de l'extension $\overline{L}_{\mathfrak{P}_i}/\overline{K}_{\mathfrak{p}}$, ce qui permet de définir la <u>substitution de Frobenius</u> de $\mathfrak{p}$, que nous noterons encore $(\mathfrak{p}, L/K)$. Dans le cas géométrique, c'est l'unique élément $\sigma \in G$ tel que l'on ait

$$y^{\sigma} = y^{q^{\deg(\mathfrak{p})}} \qquad \text{pour } y \in \mathfrak{P}_i .$$

Dans le cas où l'extension L/K est due à une extension du corps des constantes (i.e. où $L = Kk'$, k' étant une extension finie de K), l'élément $(\mathfrak{p}, L/K)$ est le prolongement à L de l'automorphisme $x \longrightarrow x^{q^{\deg(\mathfrak{p})}}$ de k'/k.

Comme au numéro 1, l'application $\mathfrak{p} \longrightarrow (\mathfrak{p}, L/K)$ se prolonge par linéarité en un homomorphisme du groupe des cycles de degré 0 de V_k dans le groupe de Galois G.

Le théorème suivant constitue l'analogue du théorème 1.1. :

THÉORÈME 1. - <u>Supposons que l'extension</u> L/K <u>soit ou bien due à une extension du corps des constantes, ou bien géométrique. Alors, pour tout</u> $\sigma \in G$ <u>il existe une infinité de cycles premiers</u> $\mathfrak{p}$ <u>de</u> V_k <u>tels que</u> $\sigma = (\mathfrak{p}, L/K)$.

Comme dans le cas des corps de nombres, ce théorème se démontre par voie "analytique".

Supposons d'abord que $L = Kk'$, avec $[k' : k] = n$. Vu la forme de la substitution de Frobenius dans ce cas, le théorème équivaut à dire que, pour tout $a \in Z$, il existe une infinité de $\mathfrak{p}$ tels que $\deg(\mathfrak{p}) \equiv a \pmod n$. Or, en étudiant la fonction zêta du corps K, LANG et WEIL [4] ont démontré qu'il existe des $\mathfrak{p}$ de degré donné suffisamment grand. D'où le résultat.

Dans le cas géométrique, on introduit les séries L attachées aux caractères de G. Si χ est un tel caractère, nous écrirons $\chi(\mathfrak{p})$ au lieu de $\chi((\mathfrak{p}, L/K))$, et nous poserons comme d'ordinaire :

$$L(s,\chi) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \chi(\mathfrak{p}).N\mathfrak{p}^{-s}} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \chi(\mathfrak{p}).q^{-s.\deg(\mathfrak{p})}}$$

le produit étant étendu à tous les $\mathfrak{p}$ non ramifiés. Ce sont des fonctions analytiques périodiques, de période $\frac{2\pi i}{\log(q)}$. Soit $r = \dim V$; lorsque $r = 1$, WEIL [5] a démontré que les fonctions $L(s,\chi)$ n'ont ni zéro ni pôle pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ si $\chi \neq \chi_1$, caractère principal de G ; quant à $L(s, \chi_1)$, c'est essentiellement la fonction zêta de V, et elle a des pôles simples aux points $s \equiv 1 \bmod \frac{2\pi i}{\log(q)}$. Le cas général se ramène au cas $r = 1$ par des méthodes élémentaires, sinon simples ; on montre que $L(s,\chi)$, pour $\chi \neq \chi_1$, n'a ni zéro ni pôle pour pour $\mathrm{Re}(s) > r - \frac{1}{2}$, alors que $L(s, \chi_1)$ a des pôles simples pour $s \equiv r \bmod \frac{2\pi i}{\log(q)}$ (cf. [4] pour le cas de la fonction zêta et [3] pour le cas général). Le théorème 1 résulte facilement de là.

REMARQUES. - 1) On obtient également la densité des $\mathfrak{p}$ tels que $\sigma = (\mathfrak{p}, L/K)$.

2) Les résultats relatifs aux séries L énoncés ci-dessus s'étendent aux séries L non abéliennes d'Artin, cf. [3].

3) Il est très probable (bien que ce ne soit pas fait dans [3]) que le théorème 1 est valable pour <u>toute</u> extension finie L/K, même "mixte". On a en tout cas le résultat plus faible suivant :

COROLLAIRE. - <u>Pour toute extension finie</u> L/K <u>l'application de réciprocité est surjective</u>.

Soit G le groupe de Galois de L/K, et soit G' le sous-groupe de G image de l'application de réciprocité. Soit $L' \subset L$ le sous-corps de L laissé fixe par G' ; vu la définition de G' et la propriété de restriction de la substitution de Frobenius, on a $(\mathfrak{p}, L'/K) = 0$ dans G/G' pour tout $\mathfrak{p}$; soit $L'' \subset L'$ la plus grande extension de K due à une extension du corps des constantes et contenue dans L' ; vu ce qui précède, on a $(\mathfrak{p}, L''/K) = 0$ pour tout $\mathfrak{p}$, ce qui, d'après le théorème 1 entraîne $L'' = K$, et l'extension L'/K est géométrique ; mais alors une nouvelle application du théorème 1 montre que $L' = K$, d'où $G' = G$, C.Q.F.D.

Il reste à étudier le noyau de l'application de réciprocité, de façon à obtenir des résultats analogues à 1.2. et 1.3. ; cela a été fait, dans le cas des courbes (et même pour des extensions ramifiées) par F.K. SCHMIDT et WITT. Dans le cas des variétés de dimension quelconque, il nous faudra nous borner à des extensions d'un certain type, que nous allons maintenant définir.

4. Revêtements du type d'Albanese.

Pour simplifier le langage, nous supposerons à partir de maintenant que les variétés considérées sont des variétés projectives et non singulières.

Soit V une telle variété, définie sur un corps algébriquement clos, et soit $\varphi : V \to A$ son application canonique dans sa variété d'Albanese. Soit B une variété abélienne, et soit G un sous-groupe fini de B tels que $B/G \approx A$; ceci signifie qu'on a un homomorphisme surjectif et séparable $g : B \to A$, de noyau égal à G. Il est clair que B est un revêtement abélien non ramifié de A, dont le groupe de Galois est le groupe G, opérant par translations ; en caractéristique 0 on sait (par voie topologique) qu'il n'existe pas d'autre revêtement non ramifié de A ; on ignore s'il en est de même en caractéristique $p \neq 0$ (tout ce que l'on peut montrer est qu'il n'existe pas d'autre revêtement <u>abélien</u> non ramifié de A, et c'est loin d'être trivial).

Soit donc $g : B \to A$ un tel revêtement. On peut, à la manière classique en topologie, considérer <u>l'image réciproque de</u> B <u>par</u> φ, <u>notée</u> $W = \varphi^{-1}(B)$. Elle est définie par l'existence d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ V & \xrightarrow{\varphi} & A \end{array} .$$

Il est impossible que le revêtement $W \to V$ soit complètement décomposé, car cela signifierait que l'on peut remonter l'application $\varphi : V \to A$ en une application $V \to B$, ce qui serait contraire à la propriété "d'application universelle" de la variété d'Albanese. On tire aisément de là le fait que le revêtement W est irréductible (i.e. est bien un revêtement au sens du numéro 2).

(Dans le cas classique, ce résultat peut aussi se déduire du fait que $\pi_1(V) \longrightarrow \pi_1(A) = H_1(A) = H_1(V)/\mathrm{Tors}\, H_1(V)$ est surjectif).

Un revêtement W obtenu de la manière précédente sera dit <u>du type d'Albanese</u> ; un tel revêtement est évidemment abélien et non ramifié. La réciproque est exacte lorsque V est une <u>courbe</u>, mais inexacte pour une variété de dimension quelconque : on peut construire des revêtements cycliques d'ordre premier ℓ et non ramifiés qui ne sont pas du type d'Albanese, en prenant pour V une variété dont le groupe de Néron-Severi a de la ℓ-torsion (si $\ell \neq p$), ou une variété d'Igusa (si $\ell = p$).

Enfin, soit k un corps parfait quelconque, et soit L/K une extension finie, avec $K = k(V)$. Nous dirons que L/K est <u>une extension du type d'Albanese</u> si c'est une extension abélienne et si $L\bar{k}/K\bar{k}$ est l'extension correspondant à un revêtement de V du type d'Albanese (sur $\bar{k}$, clôture algébrique de k). En particulier toute extension due à une extension du corps des constantes est du type d'Albanese, par définition.

5. <u>Loi de réciprocité pour les extensions du type d'Albanese</u>.

Soit k un corps fini, et soit V une variété projective non singulière, définie sur k . La variété d'Albanese A de V peut alors être définie sur k (c'est un résultat de CHOW ; comme l'a remarqué WEIL, on peut l'obtenir comme cas particulier de résultats généraux sur la descente du corps de base), et il en est de même de l'application canonique $\varphi : V \longrightarrow A$ (il y a un cocycle à tuer, ce n'est pas méchant). Nous noterons A_k le groupe des points de A qui sont rationnels sur le corps k .

A tout cycle premier $\mathfrak{p} = x_1 + \dots + x_d$ de V_k , nous ferons correspondre le point $\pi(\mathfrak{p}) = \varphi(x_1) + \dots + \varphi(x_d) \in A_k$. En utilisant le théorème 1, on peut montrer que, réciproquement, tout élément $a \in A_k$ s'écrit $\pi(\mathfrak{p})$, cf. numéro 6. L'application $\mathfrak{p} \longrightarrow \pi(\mathfrak{p})$ se prolonge par linéarité en une application $\mathfrak{a} \longrightarrow \pi(\mathfrak{a})$ du groupe $J(V) = J$ des cycles de V rationnels sur k dans le groupe A_k . Cette application n'est pas canonique (du fait que φ n'est définie qu'à la translation près par un élément de A_k), mais sa restriction au sous-groupe J^0 des cycles de degré 0 l'est. Nous noterons N le noyau de $\pi : J^0 \longrightarrow A_k$, et C le groupe quotient J/N ; c'est le groupe <u>des classes de cycles de</u> V_k , il est isomorphe (non canoniquement) à $Z \times A_k$.

Soit d'autre part $T : J \longrightarrow G$ l'application de réciprocité associée à une extension L/K non ramifiée (c'est-à-dire correspondant à un revêtement $W \longrightarrow V$ partout non ramifié). On sait (numéro 3) que T est surjective. On a :

THÉORÈME 2 (Loi de réciprocité pour les extensions du type d'Albanese). - Si l'extension L/K est du type d'Albanese, le noyau de l'application de réciprocité T est le sous-groupe de J engendré par N et par les traces des cycles de W.

(Les normes du numéro 1 sont remplacées par des traces du fait que les cycles sont écrits additivement).

Comme au numéro 1, on voit en particulier que T définit par passage au quotient une surjection $T' : C \longrightarrow G$.

THÉORÈME 3 (Théorème d'existence). - Tout groupe fini, quotient de C, est groupe de Galois d'une extension du type d'Albanese, et d'une seule.

En passant à la limite, on obtient un résultat plus frappant.

Soit $K = k(V)$, soit M la composée de toutes les extensions du type d'Albanese de K, et soit $\mathfrak{g}$ le groupe de Galois de M/K. Alors l'application de réciprocité définit un isomorphisme du complété de C sur $\mathfrak{g}$ (C étant muni de la topologie définie par ses sous-groupes d'indice fini).

6. Indications sur les démonstrations.

Nous ne nous occuperons que de la démonstration du résultat énoncé à la fin du numéro précédent ; le théorème 2 se démontre de façon analogue, et le théorème 3 est alors immédiat.

On procède en deux étapes :

a) Démonstration dans le cas des variétés abéliennes.

Avec les notations du numéro 5, on a $V = A$, l'application φ étant l'application identique.

On commence par exhiber une extension abélienne infinie M de K ayant pour groupe de Galois le complété de $C = Z \times A_k$: on prend pour M la composée de l'extension $K\bar{k}/K$ ($\bar{k}$ désignant la clôture algébrique de k) et du "corps de classes absolu" H/K défini ainsi :

Soit q le nombre d'éléments du corps k, et soit $\rho : A \longrightarrow A$ l'application définie par $\rho(x) = x^q - x$. C'est un homomorphisme surjectif et séparable (car $d(x^q - x) = - dx$), ayant pour noyau le groupe fini A_k. C'est donc une extension abélienne du type d'Albanese, géométrique, qui est notre "corps de classes absolu" H/K cherché.

Il est clair d'après ce qui précède que le groupe de Galois de M/K , où $M = K\bar{k} \otimes_K H$, peut être identifié au complété de $C = Z \times A_k$. On doit ensuite vérifier que l'application de réciprocité relative à M n'est autre que l'application canonique $J \to C$. Cela ne présente pas de difficulté ; montrons-le par exemple pour le corps de classes absolu H/K . Soit $\mathfrak{p} = x + x^q + \dots + x^{q^{d-1}}$ un cycle premier de degré d de A_k . On doit montrer que $(\mathfrak{p}, H/K) \in G_{H/K} = A_k$ n'est autre que l'élément $x' = \pi(\mathfrak{p}) = x + x^q + \dots + x^{q^{d-1}}$ (la somme n'étant plus une somme formelle, mais une somme effectuée dans le groupe A) ; or, l'élément $(\mathfrak{p}, H K)$ est défini par la condition que, si $y \in A$ est tel que $y^q - y = x$, on ait $y^{q^d} = y + (\mathfrak{p}, H/K)$; comme on vérifie tout de suite que $y^{q^d} - y = x'$, notre assertion en résulte.

Il faut enfin montrer que toute extension abélienne non ramifiée de A est contenue dans l'extension M/K . Dans le cas géométrique, cela se fait ainsi : soit $\lambda : B \longrightarrow A$ l'extension considérée. On sait que, sur $\bar{k}$ la variété B devient une variété abélienne ; on en déduit alors facilement (cf. [1]) que c'est une variété abélienne sur k , et λ est un homomorphisme, composé avec une translation $a \in A_k$, que nous supposerons d'abord égale à 0 . Le noyau de λ est formé de points rationnels sur k (du fait que l'extension est abélienne), ce qui montre que l'application $\rho : A \longrightarrow A$ se factorise en $A \longrightarrow B \xrightarrow{\lambda} A$, et l'extension B est contenue dans H , donc <u>a fortiori</u> dans M . Si la translation a était $\neq 0$, on trouverait que B est contenue dans le corps de classes H_a relatif à ce point, corps qui est contenu dans M .

Le cas d'une extension quelconque est à peine plus compliqué.

b) <u>Réduction au cas des variétés abéliennes.</u>

Soit $\varphi : V \longrightarrow A$ l'application canonique de V sans sa variété d'Albanese (cf. numéro 5). On montre que l'extension abélienne non ramifiée maximale de A a pour image réciproque par φ l'extension abélienne du type d'Albanese maximale de V ; autrement dit, on montre que, si une extension $W \longrightarrow V$, abélienne sur k , est image réciproque, <u>sur</u> $\bar{k}$, d'une extension non ramifiée de A , elle l'est aussi <u>sur</u> k . LANG donne de ce fait une démonstration compliquée, mais il semble bien que ce soit une simple conséquence du résultat de WEIL cité plus haut sur la "descente du corps de base" (on peut aussi donner une démonstration directe dans le cas des extensions cycliques d'ordre p).

Cela étant, il reste simplement à montrer que $C(V) \longrightarrow C(A)$ est bijectif ; cet homomorphisme est visiblement injectif, et, d'autre part, on sait, d'après ce qui précède, que $C(A)$ peut être considéré comme le groupe de Galois de l'extension du type d'Albanese maximale de V ; la surjectivité de l'application de réciprocité (numéro 3) montre alors que $C(V) \longrightarrow C(A)$ est surjectif, C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LANG (S.). - Abelian varieties over finite fields, Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 41, 1955, p. 174-176.

[2] LANG (S.). - Unramified class field theory over function fields in several variables. Ann. of Math., t. 64, 1956, p. 285-325.

[3] LANG (S.). - Sur les séries L d'une variété algébrique, Bull. Soc. math. France, t. 84, 1956, p. 385-407.

[4] LANG (S.) and WEIL (A.). - Number of points of varieties in finite fields, Amer. J. of Math., t. 76, 1954, p. 818-827.

[5] WEIL (André). - Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent. - Paris, Hermann, 1948.

ADDITIF

[6] LANG (Serge). - Algebraic groups over finite fields, Amer. J. of Math., t. 77, 1956, p. 555-563.
[Cet article contient une extension partielle des résultats exposés dans 6 a) aux groupes algébriques quelconques].

[7] LANG (S.) et SERRE (J.-P.). - Sur les revêtements non ramifiés des variétés algébriques, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 319-330.
[On y trouvera démontré que tout revêtement non ramifié d'une variété abélienne est donné par une isogénie].

[8] SERRE (Jean -Pierre). - Groupes algébriques et théorie du corps de classes. Cours professé au Collège de France, 1957.

[Avril 1957]