ROGER GODEMENT

Représentations induites des groupes semi-simples

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. n° 131, p. 333-339

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__333_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1956)

REPRÉSENTATIONS INDUITES DES GROUPES SEMI-SIMPLES

par Roger GODEMENT.

1. Structure des groupes semi-simples.

Soit G un groupe de Lie réel semi-simple et connexe. On note $\mathfrak{g}_0$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{g}$ la complexification de $\mathfrak{g}_0$, qui est une algèbre de Lie semi-simple complexe ; on aura à considérer dans $\mathfrak{g}$ l'involution $\sigma : Z = X + iY \rightarrow X - iY = \bar{Z}$

Soit $\mathfrak{h}_0$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$, i.e. une sous-algèbre abélienne maximale telle que tous les opérateurs $\mathrm{ad}(H)$, $H \in \mathfrak{h}_0$, soient semi-simples ; la complexification $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{h}_0$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ (si un système d'équations linéaires à coefficients dans un corps k a une solution dans un corps $K \supset k$, il a aussi une solution dans k) ; évidemment $\mathfrak{h}$ est stable par σ. Pour toute racine α de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$ on peut choisir un $X_\alpha \in \mathfrak{g}$ de telle sorte que les relations suivantes soient vérifiées :

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
&[H , X_\alpha] = \alpha(H).X_\alpha \\
&[X_\alpha , X_{-\alpha}] = H_\alpha \\
&[X_\alpha , X_\beta] = 0 , && \text{si } \alpha + \beta \text{ n'est pas une racine} \\
&[X_\alpha , X_\beta] = N_{\alpha,\beta} . X_{\alpha+\beta} && \text{si } \alpha + \beta \text{ est racine}
\end{aligned}
$$

et en outre ce choix peut être fait de telle sorte qu'on ait

$$
(2) \qquad N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta} \quad ,
$$

auquel cas les constantes en question sont imaginaires pures (cf. par exemple [3] ou [2]).

De plus, il est clair que si α est racine il en est de même de la forme linéaire $\bar{\alpha}(H) = \overline{\alpha(\bar{H})}$; on démontre facilement que l'on a la relation

$$
(3) \qquad \overline{H_\alpha} = H_{\bar{\alpha}}
$$

et que l'on peut choisir les X_α de telle sorte que l'on ait, en plus de (1) et (2), les relations

$$
(4) \qquad \overline{X_\alpha} = \tau_\alpha . X_{\bar{\alpha}} \quad \text{avec } |\tau_\alpha| = 1 .
$$

Ceci fait, considérons le sous-espace <u>réel</u> $\mathfrak{g}_u$ de $\mathfrak{g}$ engendré par les éléments suivants :

$$
iH_\alpha \ ; \ X_\alpha - X_{-\alpha} ; \ i(X_\alpha + X_{-\alpha}) \ ;
$$

il est immédiat de voir à l'aide des relations (1) à (4) que c'est une <u>forme réelle compacte de</u> $\mathfrak{g}$ <u>stable par</u> σ .

Considérons la restriction de σ à $\mathfrak{g}_u$; c'est un automorphisme involutif de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_u$, qui laisse invariante la forme de Killing de $\mathfrak{g}_u$; $\mathfrak{g}_u$ est donc somme directe de la sous-algèbre $\mathfrak{k}_o = \mathfrak{g}_u \cap \mathfrak{g}_o$ (points fixes de σ dans $\mathfrak{g}_u$) et du sous-espace de formé des $X \in \mathfrak{g}_u$ tels que $\sigma(X) = -X$; ce sous-espace est de la forme $i.\mathfrak{p}_o$ où $\mathfrak{p}_o$ est un sous-espace de $\mathfrak{g}_o$ supplémentaire de $\mathfrak{k}_o$. En considérant l'involution de $\mathfrak{g}$ définie par la forme réelle $\mathfrak{g}_u$, soit σ_u , on voit facilement que $\mathfrak{g}_o$ est stable par σ_u ; donc σ_u induit une involution dans $\mathfrak{g}_o$, dont les points fixes sont les éléments de $\mathfrak{k}_o$, et qui se réduit à -1 sur $\mathfrak{p}_o$. On en déduit que les sous-algèbres de $\mathfrak{g}_o$ contenues dans $\mathfrak{p}_o$ sont nécessairement <u>abéliennes</u>.

Montrons maintenant que $\mathfrak{g}_o$ est somme directe (au point de vue vectoriel !) de $\mathfrak{k}_o$ et d'une sous-algèbre <u>résoluble</u>. Pour cela prenons dans le sous-espace $i.\mathfrak{p}_o$ de $\mathfrak{g}_u$ une sous-algèbre abélienne maximale, (elle correspond à une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{p}_o$), et soit $\mathfrak{h}_u$ une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}_u$ qui la contient ; comme $\mathfrak{g}_u$ est compacte, la complexification $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{h}_u$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ (qui ne coïncide d'ailleurs pas, en général, avec celle dont on est parti pour construire $\mathfrak{g}_u$) ; il est immédiat de voir que de plus $\mathfrak{h}$ est stable par σ , que $\mathfrak{h}_o = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_o$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_o$, et que $\mathfrak{h}$ est la complexificarion de $\mathfrak{h}_o$. On peut encore écrire, relativement à $\mathfrak{h}$ les relations (1), (2) et (3), et supposer $\mathfrak{g}_u$ engendré par les éléments (5). Si $\mathfrak{h}$ est de dimension complexe r , on peut évidemment trouver une base H_j $(1 \leq j \leq r)$ de $\mathfrak{h}$ de telle sorte que l'on ait les relations

(6) $$\overline{H_j} = H_j (1 \leq j \leq m) \; ; \; \overline{H_j} = -H_j \; (m+1 \leq j \leq r) ,$$

et que de plus les H_α soient des combinaisons linéaires à coefficients <u>réels</u> des H_j ; les nombres $\alpha(H_j)$ sont alors réels pour toute racine α , ce qui permet d'introduire dans l'ensemble des racines la relation d'ordre lexicographique par rapport à la base H_j . Soit P l'ensemble des racines > 0 de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$; on démontre alors que, pour toute racine $\alpha \in P$, on a

ou bien $\bar{\alpha} > 0$

ou bien $\bar{\alpha} = -\alpha$, auquel cas $\overline{X_\alpha} = -X_{-\alpha}$,

d'où une partition de P en deux ensembles P^+ et P^- . Il est clair que si P^+ contient α il contient $\bar{\alpha}$, et que s'il contient α et, β il contient $\alpha + \beta$ si $\alpha + \beta$ est racine ; on en déduit que les X_α $(\alpha \in P^+)$ engendrent une

une sous-algèbre nilpotente $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$ stable par σ, qui est donc la complexification de la sous-algèbre nilpotente $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}_0$. Si l'on introduit la sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{p}_0$ dont on est parti, soit $\mathfrak{l}_0$, il est clair que $\mathfrak{l}_0 + \mathfrak{n}_0$ est une sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{g}_0$; enfin on vérifie aisément que $\mathfrak{g}_0$ est somme directe (en tant qu'espace vectoriel) des sous-algèbre $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{l}_0$ et $\mathfrak{n}_0$ (théorème dû à IWASAWA).

Par ailleurs désignons par $\mathfrak{m}$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par les X_α tels que $\bar{\alpha} = -\alpha$, et par $h_u \cap \mathfrak{g}_0$; c'est évidemment une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, invariante par σ, c'est donc la complexification de la sous-algèbre $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}_0$; on voit de plus facilement que $\mathfrak{m}_0 \subset \mathfrak{k}_0$, que $[\mathfrak{m}_0, \mathfrak{n}_0] \subset \mathfrak{n}_0$ et qu'enfin $\mathfrak{l}_0 + \mathfrak{m}_0$ est le centralisateur de $\mathfrak{l}_0$ dans $\mathfrak{g}_0$, en sorte que $\mathfrak{m}_0$ est formé des éléments de $\mathfrak{k}_0$ qui commutent à $\mathfrak{l}_0$; c'est aussi le normalisateur de $\mathfrak{l}_0$ dans $\mathfrak{k}_0$.

Revenons maintenant au groupe de Lie connexe G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$; soient K, H, N les sous-groupes de G correspondent aux sous-algèbres $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{l}_0$, $\mathfrak{n}_0$ ils sont fermés, H et N sont simplement connexes, K contient le centre Z de G et K/Z est un sous-groupe compact maximal du groupe adjoint de G ; enfin, l'application $(k, h, n) \longrightarrow khn$ est un homéomorphisme de $K \times H \times N$ sur G. Soient de plus M et $\hat{M}$ le centralisateur et le normalisateur de H dans K ; ces sous-groupes fermés contiennent Z et ont même algèbre de Lie, d'où il résulte que $\hat{M}/M$ est un groupe fini W. On vérifie facilement que $\Gamma = MHN$ est un sous-groupe fermé de G, et HN un sous-groupe résoluble invariant de Γ.

Un résultat fondamental pour la suite est que les classes bilatères $\Gamma . g . \Gamma$ sont en nombre fini ; de manière précise toute classe rencontre $\hat{M}$, et deux éléments de $\hat{M}$ appartiennent à la même classe si et seulement s'ils sont congrus modulo M (de sorte que les classes $\Gamma . g . \Gamma$ correspondent biunivoquement aux éléments de W). Ce résultat est dû à BRUHAT pour les groupes classiques, et à HARISH-CHANDRA dans le cas général.

2. Représentation de G induites par des représentations de Γ.

Soient G un groupe de Lie, Γ un sous- groupe fermé de G, et L une représentation linéaire de Γ dans un vectoriel E de dimension finie (pour simplifier). Notons $D^L(G)$ l'espace des applications différentiables $\varphi : G \longrightarrow E$, qui vérifient l'identité

$$\varphi(\gamma g) = L(\gamma)\varphi(g) ,$$

et sont à support compact modulo Γ ; muni de la topologie usuelle, $D^L(G)$ est un espace vectoriel topologique localement convexe sympathique, et en faisant agir G sur $D^L(G)$ à l'aide des translations à droite on obtient la représentation différentiable de G induite par la représentation L de Γ. Dans certains cas il est possible d'introduire sur $D^L(G)$ un produit sclaire invariant par ces translations, et de plus raisonnable (un produit scalaire sur $D^L(G)$, ou tout autre "espace fonctionnel" analogue, étant qualifié de raisonnable si et seulement s'il est fonction continue de l'ensemble de ses deux arguments); par complétion, on obtient alors un espace de Hilbert et une représentation unitaire de G dans celui-ci, représentation qu'on considère encore comme <u>induite</u> par L.

Comme, dans un espace de Hilbert, les opérateurs continus s'identifient canoniquement aux formes sesquilinéaires continues, on voit que pour établir éventuellement l'irréductibilité d'une représentation unitaire induite il s'impose d'étudier le problème suivant : étant données deux représentations L_1 et L_2 de Γ, trouver sur l'espace produit $D^{L_1}(G) \times D^{L_2}(G)$ les formes bilinéaires <u>continues</u> $T(\varphi_1, \varphi_2)$ qui sont invariantes lorsque l'on soumet simultanément φ_1 et φ_2 à une translation à droite.

Soient E_1 et E_2 les espaces (de dimension finie) de L_1 et L_2 ; étant donnée une fonction différentiable à support compact $\varphi_1 : G \to E_1$, la formule

$$\varphi_1^o(g) = \int L_1(\gamma)^{-1}\varphi_1(\gamma g)d\gamma$$

(où $d\gamma$ est une mesure invariante à droite sur Γ) définit l'élément le plus général de $D^{L_1}(G)$, et il est clair, d'après le théorème des noyaux de Schwartz, que la forme bilinéaire $T(\varphi_1^o, \varphi_2^o)$ est représentée sur $G \times G$ par une distribution à valeurs dans le dual de $E_1 \otimes E_2$:

$$T(\varphi_1^o, \varphi_2^o) = \iint\langle\varphi_1(g_1) \otimes \varphi_2(g_2), dT(g_1, g_2)\rangle \quad .$$

La distribution T doit évidemment être invariante par les transformations $(g_1, g_2) \to (g_1 g, g_2 g)$; cela signifie qu'il existe sur G une distribution $dT(g)$ telle que

$$\iint\varphi(g_1, g_2)dT(g_1, g_2) = \iint \varphi(g_1 g_2, g_2)dT(g_1)dg_2 \quad ,$$

où dg est une mesure invariante à droite sur G. En examinant ce qui se passe lorsque l'on soumet φ_1 et φ_2 à des translations à gauche par des éléments de Γ, on voit par des calculs faciles que la distribution $dT(g)$ est assujettie à la condition suivante : posons

$$d(\gamma_0\,\gamma) = \delta(\gamma_0)d\gamma$$

et supposons pour simplifier G unimodulaire ; alors on doit avoir la relation

(I) $$dT(\gamma_1 g \gamma_2^{-1}) = \delta(\gamma_1\gamma_2).\check{L}_1(\gamma_1) \otimes \check{L}_2(\gamma_2).dT(g)$$

(où d'une manière générale $\check{A} = {}^tA^{-1}$). Si donc l'on introduit la représentation

(II) $$A(\gamma_1\,,\,\gamma_2) = \delta(\gamma_1\gamma_2)^{-1}.L_1(\gamma_1) \otimes L_2(\gamma_2)$$

de $\Gamma \times \Gamma$, et si l'on fait opérer $\Gamma \times \Gamma$ sur G par la formule

$$g.(\gamma_1\,,\,\gamma_2) = \gamma_1^{-1} g\, \gamma_2\ ;$$

on est ramené à chercher sur G les distributions T qui vérifient

(III) $$T.(\gamma_1\,,\,\gamma_2) = \check{A}(\gamma_1\,,\,\gamma_2)T\ .$$

3. Irréductibilité des représentations induites.

Nous supposons à nouveau que G est semi-simple et que Γ est l'un des sous-groupes construits au n° 1 ; comme on l'a vu, G se décompose alors en un nombre fini d'orbites relativement à $\Gamma \times \Gamma$; on pourra donc majorer le nombre de solutions de (III) à l'aide des résultats de l'exposé précédent.

Soit $X = \Gamma x \Gamma$ une classe ; on sait qu'il existe un ouvert Ω_X de G, stable par $\Gamma \times \Gamma$, tel que X soit une sous-variété fermée de Ω_X ; désignons par N(X) le nombre de solutions de (III) qui sont définies dans Ω_X et ont pour support X ; alors on sait que le nombre de solutions de (III), définies dans tout G, est majoré par $\sum N(X)$ (voir la fin de l'exposé précédent, n° 126).

Pour évaluer N(X) il faut utiliser les résultats du n° 3 de l'exposé précédent. Tout d'abord on doit introduire le stabilisateur du point $x \in X$ dans $\Gamma \times \Gamma$; il s'identifie au sous-groupe

$$\Gamma_x = \Gamma \cap x\Gamma x^{-1}$$

de Γ ; on notera d'ailleurs qu'avec les notations du n° 1 on peut supposer $x \in \hat{M}$ auquel cas $\Gamma_x = MHN_x$ avec $N_x = N \cap xNx^{-1}$. D'autre part introduisons au point x, pour tout entier $r \geqslant 0$, des distributions ponctuelles $D^m(x)$ $(m = (m_1\,,\,..,\,m_q)$ $m_1 + \dots + m_q = r)$ formant une base des dérivations d'ordre r transversales à X modulo les dérivations tangentes à X ; en négligeant les dérivations d'ordre transversal $< r$, on a vu dans l'exposé précédent que le stabilisateur Γ_x permute les $D^m(x)$, $|m| = r$, suivant une représentation linéaire Λ_r de Γ_x cela dit, on a $N(X) \leqslant \sum N_r(X)$, ou $N_r(X)$ est la dimension de l'espace des formes bilinéaires invariantes relativement à la représentations Λ_r de Γ_x

et à la représentation $\rho_x(\gamma_1, \gamma_2)A(\gamma_1, \gamma_2)$ de Γ_x ; la fonction ρ_x est le rapport entre les facteurs d'invariance à gauche des mesures de Haar de $\Gamma \times \Gamma$ et de Γ_x ; écrivant un élément générique du stabilisateur de x sous la forme $(\gamma, x^{-1}\gamma x)$, on a immédiatement

$$\rho_x(\gamma, x^{-1}\gamma x) = \delta(\gamma)\ \delta(x^{-1}\gamma x)\,\delta_x(\gamma)^{-1} ,$$

où δ_x est le rapport relatif au sous-groupe Γ_x. Comme

$$A(\gamma_1, \gamma_2) = \delta(\gamma_1\gamma_2)^{-1}L_1(\gamma_1) \otimes L_2(\gamma_2) ;$$

on voit qu'en fait il reste à étudier les <u>invariants bilinéaires des représentations</u> $\gamma \rightarrow \Lambda_r(\gamma)$ <u>et</u> $\gamma \rightarrow \delta_x(\gamma)^{-1}L_1(\gamma) \otimes L_2(x^{-1}\gamma x)$ <u>de</u> Γ_x.

On peut d'ailleurs démontrer que

$$\delta_x(\gamma) = \delta(\gamma)^{\frac{1}{2}}\delta(x^{-1}\gamma x)^{\frac{1}{2}} ;$$

en posant

$$L_i(\gamma) = \delta(\gamma)^{\frac{1}{2}}M_i(\gamma) \qquad (i = 1 , 2)$$

on a donc à étudier les représentations $\Lambda_r(\gamma)$ et $M_1(\gamma) \otimes M_2(x^{-1}\gamma x)$ de Γ_x.

Partons alors d'une représentation <u>unitaire</u> M de Γ ; prenons $M_1 = M$, donc $L_1(\gamma) = \delta(\gamma)^{\frac{1}{2}}M(\gamma)$, et pour M_2 la représentation $\overline{M}$ imaginaire conjuguée de M, donc $L_2(\gamma) = \delta(\gamma)^{\frac{1}{2}}\overline{M}(\gamma)$; en vertu des propriétés connues de la mesure de Haar, on peut rendre la représentation induite par L_1 unitaire (on prend un produit scalaire du type L^2 sur l'espace homogène G/Γ), par abus de langage on dira que cette représentation est la représentation unitaire de G induite par le représentation unitaire M de Γ. Les "formes d'entrelacement" $T(\varphi_1, \varphi_2)$ pour les représentations induites par L_1 et L_2 correspondent alors, entre autres, aux opérateurs qui commutent à la représentation unitaire induite par M ; si donc il n'y a pas de forme d'entrelacement non triviale, cette représentation unitaire induite sera irréductible.

Or, d'après ce qui précède nous devons, dans ce cas particulier, comparer les représentations Λ_r et $M(\gamma) \otimes \overline{M}(x^{-1}\gamma x)$ de $\Gamma_x = MHN$; on va se borner à étudier leurs restrictions au sous-groupe MH, en supposant la représentation $M(\gamma)$ de Γ <u>irréductible</u> (auquel cas, puisqu'on la suppose de dimension finie, elle est égale à 1 sur le sous-groupe N et se réduit à des scalaires de module 1 sur le sous-groupe H).

Il est clair tout d'abord que la représentation Λ_0 est l'identité ; donc $N_0(X)$ est le nombre des invariants bilinéaires des représentations $M(\gamma)$ et $\overline{M}(x^{-1}\gamma x)$ du sous-groupe MH ; comme il s'agit de représentations unitaires irréductibles de dimension finie, ce nombre est égal à 1 si les représentations $M(\gamma)$ et $M(x^{-1}\gamma x)$ de MH sont équivalentes et à 0 dans le cas contraire ; on notera d'ailleurs que la représentation $M(x^{-1}\gamma x)$ de MH ne dépend que de l'élément s du groupe fini $\hat{M}/M = W$ défini par x ; on la désignera donc par $M^s(\gamma)$.

Considérons maintenant le cas $r \geqslant 1$; il suffira cette fois de se restreindre au sous-groupe H. En effet la restriction à H de la représentation $M(\gamma)\otimes \overline{M}(x^{-1}\gamma x)$ est de la forme $h \rightarrow \chi(h).1$, avec $|\chi(h)| = 1$; d'autre part, Λ_r est une puissance symétrique de Λ_1 ; or on voit facilement que Λ_1 est un quotient de la représentation adjointe de Γ_x dans $\mathfrak{g}$, algèbre de Lie complexe de G (si $\mathfrak{c}$ est la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ correspondant à Γ, on obtient Λ_1 en passant au quotient par $\mathfrak{c} + ad(x).\mathfrak{c}$) ; on déduit de là que, restreinte à H, la représentation Λ_r est somme directe de représentations de dimension 1, à valeurs dans le groupe multiplicatif des nombres réels positifs et distinctes de l'unité ; pour $r \geqslant 1$ il ne peut donc exister aucune "forme d'entrelacement" pour $\Lambda_r(\gamma)$ et $M(\gamma)\otimes\overline{M}(x^{-1}\gamma x)$, et ceci quel que soit x.

On obtient donc en définitive le résultat suivant : soit U une représentation unitaire irréductible de dimension finie de Γ ; supposons que les diverses représentations U^s $(s \in W)$ de MH soient deux à deux non équivalentes ; alors la représentation unitaire de G induite par U est irréductible.

Des méthodes analogues, qu'on trouvera dans la thèse de BRUHAT [1], permettent aussi d'étudier d'autres représentations unitaires de G, construites à l'aide d'autres produits scalaires, ou en partant de sous-groupes plus grands que Γ.

On conjecture (parce qu'on n'a pas de contre-exemple) que la restriction $U^s \not\simeq U$ pour $s \neq e$ est superflue.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRUHAT (François). - Sur les représentations induites des groupes de Lie Bull. Soc. math. France, t. 84, 1956, p. 97-205 (Thèse Sc. math. Paris. 1955).

[2] BRUHAT (François). - Structures des algèbres de Lie semi-simples, Séminaire Bourbaki, t. 7, 1954/55.

[3] Séminiare Sophus Lie Théorie des algèbres de Lie t. 1, 1954/55.