FRANÇOIS TRÈVES

Thèse d'Hörmander, I

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. nº 130, p. 323-332

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__323_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1956)

THÈSE D'HÖRMANDER [1], I

par François TRÈVES

SOMMAIRE. - Etant donné un polynôme différentiel $P(D)$, à coefficients constants, sur R^n, HÖRMANDER introduit systématiquement les dérivées $P^{(p)}(D)$ de ce polynôme par rapport aux $\frac{\partial}{\partial x_j}$ $(1 \leq j \leq n)$. Il établit une majoration fondamentale (lemme 1) des $P^{(p)}(D)$ par $P(D)$ sur les ouverts bornés de R^n. En particulier, cette majoration conduit immédiatement à l'existence de solutions élémentaires pour $P(D)$.

Pour la première fois, HÖRMANDER donne une caractérisation complète des opérateurs différentiels à coefficients constants hypo-elliptiques (proposition 1 et 2, théorème 1).

$P(D)$ désignera l'opérateur différentiel sur R^n obtenu en substituant $\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial x_k}$ à X_k $(1 \leq k \leq n)$ dans le polynôme $P(X_1, \ldots, X_n)$. Pour tout système de n entiers $p = (p_1, \ldots, p_n)$ nous noterons $P^{(p)}(X_1, \ldots, X_n)$ le polynôme $\frac{\partial^{p_1 + \cdots + p_n}}{\partial X_1^{p_1} \ldots \partial X_n^{p_n}} P(X_1, \ldots, X_n)$. Par ailleurs, les notations seront celles de SCHWARTZ. Par exemple $\mathcal{D}(\Omega)$ sera l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact contenu dans l'ouvert Ω de R^n.

LEMME 1. - *Si Ω est un ouvert relativement compact de R^n, on peut trouver une constante C_Ω, ne dépendant que de l'ordre m de l'opérateur différentiel $P(D)$ et Ω telle que :*

$$\| P^{(p)}(D)\varphi \| \leq C_\Omega \| P(D)\varphi \|$$

quels que soient $p = (p_1, \ldots, p_n)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$\| \ \|$ désigne la norme dans $L^2(R^n)$, $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire au sens des distributions. Si T est une distribution quelconque, à support compact, on a :

(1) $\langle x_k(T*\varphi)\, , \overline{(x_kT)*\varphi}\rangle = \langle (x_kT)*\varphi\, , \overline{(x_kT)*\varphi}\rangle + \langle T*(x_k\varphi)\, , \overline{(x_kT)*\varphi}\rangle =$

$= \|(x_kT)*\varphi\|^2 + \langle (\widetilde{x_kT})*(x_k\varphi)\, , \overline{\tilde{T}*\varphi}\rangle = \|(x_kT)*\varphi\|^2 + \langle x_k[(\widetilde{x_kT})*\varphi]\, ,$

$\overline{\tilde{T}*\varphi}\rangle - \langle (x_k^2\tilde{T})*\varphi\, , \overline{\tilde{T}*\varphi}\rangle$.

Rappelons que $\tilde{T}$ est définie par $\langle \tilde{T}\, , \chi(x)\rangle = \langle T\, , \overline{\chi(-x)}\rangle$. Compte tenu de cela, (1) donne :

(2) $\quad \|(x_kT)*\varphi\|^2 \leq \|T*\varphi\| \{ \|(x_k^2T)*\varphi\| + 2B_k\|(x_kT)*\varphi\| \}$

où B_k désigne le maximum de $|x_k|$ sur le support de $T*\varphi$. Appliquons cela à $T = P(D)\delta$. Il est d'abord clair qu'il suffit de prouver le lemme pour $p = (1\, , 0\, , \dots\, , 0)$; nous prendrons donc $k = 1$ dans (2) , car

$$-2i\pi\, x_1 P(D)\delta = P^{(1\, , 0\, , \dots\, , 0)}(D)\,\delta\ .$$

D'autre part, nous raisonnerons par récurrence sur le degré m de $P(X)$. Si $m = 1$, alors $x_1^2P(D)\delta = 0$, et dans ce cas, (2) exprime bien le résultat désiré. Supposons le lemme vrai pour tous les polynômes de degré $\leq m - 1$. En particulier, cela suppose qu'il existe C'_Ω telle que :

$$\|(x_1^2P(D)\delta)*\varphi\| \leq C'_\Omega\, \|(x_1P(D)\delta)*\varphi\|\ .$$

d'où

(3) $$\|(x_1P(D)\delta)*\varphi\| \leq (C'_\Omega + 2B_1)\ \|P(D)\varphi\|.$$

C. Q. F. D.

En prenant $p_1 + \dots + p_n$ assez élevé, on déduit du lemme 1 que

$$\|\varphi\| \leq C_\Omega\, \|P(D)\varphi\|$$

D'ailleurs l'inégalité (3) montre qu'il est facile d'obtenir une majoration simple pour C_Ω . L'inégalité précédente $\|\varphi\| \leq C_\Omega\, \|P(D)\varphi\|$ permet d'établir (par Hahn-Banach) l'existence d'une solution élémentaire pour $P(D)$.

PROPOSITION 1. - Soit $P(X_1\, , \dots\, , X_n)$ un polynôme à coefficients complexes. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° Ou bien P est un polynôme constant, ou bien lorsqu'on fixe η dans R^n et lorsque $|\xi| \to +\infty$ ($\xi \in R^n$) , $|P(\xi + i\eta)| \to +\infty$, cette convergence étant uniforme par rapport à η si η reste dans un compact fixe.

2° A tout compact K de R^n on peut faire correspondre un compact H de R^n tel que $\xi \in \complement H$, $\eta \in K$ impliquent $P(\xi + i\eta) \neq 0$.

3° Quel que soit $\zeta' \in C^n$, $[P(\xi)]^{-1}P(\xi + \zeta') \to 1$ lorsque $|\xi| \to +\varphi$ (ici encore, convergence uniforme par rapport à ζ' sur chaque compact de C^n).

4° Quel que soit $\zeta' \in C^n$, et quel que soit $p \neq (0, \ldots, 0)$, $[P(\xi + \zeta')]^{-1} P^{(p)}(\xi + \zeta') \to 0$ lorsque $|\xi| \to +\infty$. La convergence est uniforme par rapport à ζ' sur chaque compact de C^n.

On démontre $1° \Rightarrow 2° \Rightarrow 3° \Rightarrow 4° \Rightarrow 1°$. Nous prouverons les implications $2° \Rightarrow 3° \Rightarrow 4°$; les autres sont parfaitement évidentes.

Supposons d'abord $\zeta' \in R^n$; nous pouvons même supposer que $\zeta' = (1, 0, \ldots, 0)$ en effectuant éventuellement un changement linéaire de coordonnées dans R^n. Substituons, dans $P(X_1, \ldots, X_n)$, $n-1$ nombres réels quelconques $\xi_2, \ldots, \xi_n$ à $X_2, \ldots, X_n$ respectivement et notons $P(X_1)$ le polynôme à une indéterminée obtenu ainsi ; si r_j $(1 \leq j \leq m)$ sont les m racines de $P(X_1)$, (en vertu de 2°) P dépend effectivement de tous les X_k, et donc $m \geq 1$. Alors,

$$P(\xi)^{-1} P(\xi + \zeta') = \prod_{j=1}^{m} \left(1 + \frac{1}{\xi_1 - r_j}\right).$$

On se donne alors $\varepsilon > 0$ arbitraire ; il correspond à ε une constante finie B telle que $|\eta| \leq \varepsilon^{-1}$, $|\xi| \geq B$ impliquent $P(\xi + i\eta) \neq 0$. Si on prend $|\xi_1| \geq B + \varepsilon^{-1}$, quel que soit le zéro z de $P(X_1, \ldots, X_n)$, on aura $|\xi - z| \geq \varepsilon^{-1}$. En particulier, cela est vrai pour $z = (r_j, \xi_2, \ldots, \xi_n)$; on doit donc avoir $|\xi_1 - r_j| \geq \varepsilon^{-1}$, et par suite :

$$|P(\xi)^{-1} P(\xi + \zeta') - 1| \leq m\varepsilon(1 + \varepsilon)^{m-1}$$

pourvu que $|\xi_1| \geq B + \varepsilon^{-1}$.

D'autre part, il n'est pas difficile de voir que l'on peut toujours trouver r vecteurs $v_i \in R^n$ et r nombres complexes c_i, tels que $P^{(p)}(\xi) = \sum c_i P(\xi + v_i)$. Si $p \neq (0, \ldots, 0)$, il faut $\sum c_i = 0$, d'où l'on déduit, en vertu du résultat qui vient d'être étébli :

$$\lim_{\xi \to +\infty} [P(\xi)^{-1} P^{(p)}(\xi)] = \sum c_i = 0. \tag{4}$$

Soit alors ζ' un vecteur complexe quelconque ; la formule de Taylor donne :

$$P(\xi + \zeta') = P(\xi) + \sum P^{(p)}(\xi) \frac{\zeta'^p}{p!} \tag{5}$$

où la sommation est étendue aux indices $p \neq (0, \ldots, 0)$, où $p! = p_1! \ldots p_n!$ et $\zeta'^p = \zeta'^{p_1}_1 \ldots \zeta'^{p_n}_n$ Mais alors, en divisant les deux membres de (5) par $P(\xi)$, et en tenant compte de (4), on voit que $P(\xi)^{-1} P(\xi + \zeta') \to 1$ lorsque $|\xi| \to +\infty$, uniformément par rapport à ζ' sur chaque compact de C^n. Ainsi $2° \Rightarrow 3°$. Mais en revenant à ξ l'une des formules qui précédent, on voit aussi que :

$$P(\xi + \zeta')^{-1} P^{(p)}(\xi + \zeta') + \sum c_i [P(\xi)^{-1} P(\xi + v_i + \zeta')][P(\xi + \zeta')^{-1} P(\xi)]$$

tend vers $\Sigma c_i = 0$ lorsque $|\zeta| \to +\infty$, avec l'uniformité en ζ' que l'on désirait. $3° \Rightarrow 4°$.

PROPOSITION 2. - Soit un opérateur différentiel $P(D)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(L) Quels que soient l'ouvert Ω de R^n et l'élément u de $L^2(\Omega)$ tel que $P(D)u \in L^2(\Omega)$ (au sens des distributions), on a aussi $P(D)(\varphi u) \in L^2(\Omega)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

(L') Quels que soient Ω et $u \in L^2(\Omega)$ telle que $P(D)u \in L^2(\Omega)$, $P^{(p)}(D)u$ est localement L^2 dans Ω pour tout $p = (p_1, \dots, p_n)$. Plus précisément, à tout ouvert relativement compact Ω' tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, correspond $A < +\infty$ (ne dépendant pas de u) telle que :

$$||P^{(p)}(D)u||^2_{\Omega'} \leq A(||u||^2_\Omega + ||P(D)u||^2_\Omega) .$$

Pour voir que $(L') \Rightarrow (L)$, il suffit d'appliquer une "formule de Leibniz" (fréquemment utilisée par HÖRMANDER) :

$$P(D)(uv) = \sum_p \frac{1}{p_1! \dots p_n!} [P^{(p)}(D)u] \left[\frac{\partial^{p_1 + \dots + p_n}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} v\right] .$$

Prenons alors $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$, ayant son support dans Ω' ; on a :

$$||P(D)(\alpha u)|| \leqslant \sum ||\alpha_p P^{(p)}(D)u||$$

où les $\alpha_p \in \mathcal{D}(\Omega)$ ont toutes leur support dans Ω'.

Réciproquement, $(L) \Rightarrow (L')$. Pour prouver cela, on considère le graphe G de $P(D)$ dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, cet espace étant muni de la norme usuelle

$$||\{u, v\}|| = (||u||^2 + ||v||^2)^{1/2} .$$

G est fermé pour cette norme. Prenons alors Ω' comme il est dit dans (L'), et considérons l'application $(u, P(D)u) \to P^{(p)}(D)u$ de G dans $\mathcal{D}'(\Omega')$. En réalité, l'image de G par cette application est dans $L^2(\Omega')$. Cela résulte du lemme 1. Car soit $\beta \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\beta = 1$ sur Ω' ; et prenons la suite habituelle $\{\rho_m\}$ de fonctions de $\mathcal{D}$ qui convergent vers δ dans $\mathcal{E}'$. D'après le lemme 1, on a :

$$C||P(D)(\rho_m * (\beta u))|| \geqslant ||P^{(p)}(D)(\rho_m * (\beta u))|| .$$

Mais $P(D)(\rho_m * (\beta u))$ converge dans $L^2(\Omega)$, vers $P(D)(\beta u)$ qui appartient à $L^2(\Omega)$ en vertu de la condition (L). Il en résulte que les $P^{(p)}(D)(\rho_m * (\beta u))$

convergent aussi dans $L^2(\Omega)$; leur limite est $P^{(p)}(D)(\beta u)$ (définie a priori comme distribution), qui coincide avec $P^{(p)}(D)u$ sur Ω'.

La démonstration s'achève en montrant, par un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait, que le graphe dans $G \times L^2(\Omega')$ de l'application $(u,P(D)u) \mapsto P^{(p)}(D)u$ est fermé. Cette application est donc continue, et ceci équivaut à l'inégalité de la condition (L').

Tout opérateur différentiel P(D) qui vérifie la condition (L) ou (L') est appelé de <u>type local</u> par HÖRMANDER. Nous dirons d'autre part qu'un polynôme P(X) est <u>complet</u>, s'il n'existe aucun vecteur non nul $v \in R^n$, tel que l'on ait : $P(\xi) = P(\xi + \lambda v)$ quels que soient $\xi \in R^n$ et le nombre réel λ. Nous dirons que l'opérateur différentiel P(D) est <u>complet</u> si le polynôme associé P(X) l'est.

D'autre part, on appelle <u>hypo-elliptique</u> tout opérateur différentiel P(D) qui possède l'une des deux propriétés suivantes, équivalentes :

(HE) <u>Toute solution élémentaire de</u> P(D) <u>est indéfiniment différentiable dans le complémentaire de l'origine</u>.
(HE') <u>Quel que soit l'ouvert</u> Ω <u>de</u> R^n <u>et la fonction</u> g, <u>indéfiniment différentiable dans</u> Ω, <u>toute solution sur</u> Ω <u>de</u> $P(D)f = g$ <u>est aussi indéfiniment différentiable dans</u> Ω [3].

Le résultat principal du chapitre 2 de la thèse d'HÖRMANDER est constitué par le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> P(D) <u>un opérateur différentiel. Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

1° P(D) <u>est complet et de type local</u>.
2° P(D) <u>est hypo-elliptique</u>.
3° P(X) <u>vérifie les conditions équivalentes de la proposition</u> 1.

<u>De plus, si</u> P(D) <u>possède l'une des propriétés ci-dessus, et si</u> E <u>est une solution élémentaire quelconque de</u> P(D), <u>pour toute</u> $u \in \mathcal{E}' \cap L^2$ <u>et tout</u> $p = (p_1, \dots, p_n)$ <u>la convolution</u> $P^{(p)}(D)E * u$ <u>est localement</u> $-L^2$.

Nous commencerons par prouver que les conditions, portant sur le polynôme P(X), de la proposition 1 sont équivalentes au fait que P(D) soit hypo-elliptique. Remarquons que pour établir ce dernier fait, il suffit de prouver qu'il existe <u>une</u> solution élémentaire E de P(D), indéfiniment différentiable dans le complémentaire de l'origine (voir [3], Exposé n° 4). Par la même occasion, nous démontrerons la dernière propriété énoncée dans le théorème 1, à partir de la propriété 2.

Prouvons tout de suite que (HE') entraîne la propriété 2 de la proposition 1. Prenons un ouvert relativement compact Ω de R^n. L'ensemble N des $u \in L^2(\Omega)$ tels que $P(D)u = 0$ (sur Ω) est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega)$. Soit Ω' un ouvert tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$; considérons l'application $u \to \frac{\partial u}{\partial x_j}$ de N dans $\mathcal{D}'(\Omega')$. C'est ici que nous utilisons (HE') ; elle implique que $N \subset \mathcal{E}(\Omega)$, i.e. que $\frac{\partial}{\partial x_j}$ applique N dans $L^2(\Omega')$. On voit immédiatement que le graphe de cette application est fermé, d'où résulte qu'il existe $B < +\infty$ et que :

$$\sum_j \left\|\frac{\partial \chi}{\partial x_j}\right\|^2_{\Omega'} < B \, \|\chi\|^2_{\Omega'} \quad , \text{ pour toute } \chi \in N .$$

Fixons η dans R^n, et choisissons ξ de manière à ce que $\zeta = \xi + i\eta$ soit un zéro de $P(X)$. Prenons, dans l'inégalité précédente,

$$\chi(x) = \exp(-2i\pi \langle x , \zeta \rangle) \quad ;$$

elle conduit à :

$$\left(\sum_j |\zeta_j|^2\right) \int_{\Omega'} \exp(4\pi \langle x , \eta \rangle)dx \leqslant B_1 \int_{\Omega} \exp(4\pi \langle x , \eta \rangle)dx$$

ce qui prouve que $|\xi|$ reste borné pourvu que $|\eta|$ le reste aussi.

Montrons maintenant que les propriétés de la proposition 1 entraînent l'existence d'une solution élémentaire E de P(D), indéfiniment différentiable dans le complémentaire de l'origine.

Choisissons une constante finie A telle que $|\xi| \geqslant A$ implique $|P(\xi)| \geqslant 1$; ceci est possible d'après le propriété 1 de la proposition 1. Nous pouvons toujours supposer que le terme de plus haut degré en X_1 de $P(X)$ est X_1^m. Alors si le point $(\xi_2, \dots, \xi_n)$ varie dans R^{n-1} en restant dans la boule $\xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 \leqslant A^2$, l'ensemble des nombres complexes ζ_1 tels que $|P(\zeta_1, \xi_2, \dots, \xi_n)| \leqslant 1$, reste dans un compact H de C. Prenons alors $A' \geqslant A$, telle que le cercle $|\zeta_1| = A'$ contienne H à son intérieur. Posons :

$$\langle E , \check{\varphi} \rangle = \int d\xi_2 \dots d\xi_n \oint \frac{\hat{\varphi}(\zeta_1 , \xi_2 , \dots , \xi_n)}{P(\zeta_1 , \xi_2 , \dots , \xi_n)} d\zeta_1 ,$$

$\hat{\varphi}$ est la transformée de Fourier de $\varphi \in \mathcal{D}$, et $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

Les intégrales par rapport aux ξ_k $(2 \leqslant k \leqslant n)$ sont prises de $-\infty$ à $+\infty$ sur l'axe reél ; l'intégrale $\oint$ par rapport à ζ_1 est prise aussi sur l'axe réel si $\xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 \geqslant A^2$. Par contre, si $\xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 < A^2$, elle est prise sur l'axe réel pour $|\xi_1| \geqslant A'$, et sur le demi-cercle $\xi_1^2 + \eta_1^2 = A'^2$, $\eta_1 \leqslant 0$ si $|\xi_1| \leqslant A'$. Ainsi, sur tout le chemin d'intégration, $|P(\zeta_1, \xi_2, \dots, \xi_n)| \geqslant 1$.

$\langle E , \check{\varphi} \rangle$ définit bien une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$: c'est à peu près évident. C'est une solution élémentaire de $P(D)$, car si $\check{\varphi} = \check{P}(D)\psi$ (si $T \in \mathcal{D}'$, $\check{T}$ est définie par $\langle \check{T} , \chi \rangle = \langle T , \check{\chi} \rangle$ pour toute $\chi \in \mathcal{D}$) ,

$$\langle E , \check{\varphi} \rangle = \int d\xi_2 \cdots d\xi_n \oint \hat{\psi}(\zeta_1 , \xi_2 , \cdots , \xi_n)\, d\zeta_1 .$$

Puisque $\hat{\psi}(\zeta)$ est une fonction entière de $\zeta_1 , \cdots , \zeta_n$, cette dernière intégrale est égale à $\int \hat{\psi}(\xi)d\xi = \psi(0)$. Ensuite il nous faut établir que E est indéfiniment différentiable dans le complémentaire de l'origine. Posons

$$M = \sqrt{A^2 + A'^2} \quad \text{et :} \quad \langle E_1 , \check{\varphi} \rangle = \int_{|\xi| \geqslant M} \frac{\hat{\varphi}(\xi)}{P(\xi)} d\xi \quad ;$$

$$\langle E_2 , \check{\varphi} \rangle = \oint_{|\zeta| \leqslant M} \frac{\hat{\varphi}(\zeta)}{P(\zeta)} d\zeta .$$

Dans la deuxième intégrale, $\zeta = (\zeta_1 , \xi_2 , \cdots , \xi_n)$ et le chemin d'intégration est pris, dans $C \times R^{n-1}$, comme il a été dit. Il est d'ailleurs contenu dans un compact, et $E_2 = \oint e^{2i\pi \langle x , \zeta \rangle} P(\zeta)^{-1} d\zeta$ est une fonction analytique entière de x . En particulier, si $u \in \mathcal{E}' \cap L^2$, $P^{(p)}(D)E_2 * u$ est localement L^2 , quel que soit p .

Reste à étudier E_1 . Mais auparavent montrons que $P^{(p)}(D)E_1 * u$ appartient à L^2 . Car si $\varphi \in \mathcal{D}$, on a :

$$\langle P^{(p)}(D)E_1 * u , \varphi \rangle = \langle P^{(p)}(D)E_1 , \check{u} * \check{\varphi} \rangle = \int_{|\xi| \geqslant M} \frac{P^{(p)}(\xi)}{P(\xi)} \hat{u}(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi .$$

Ceci signifie qu'en tant que distribution, $P^{(p)}(D)E_1 * u$ est égale à la fonction, nulle pour $|x| < M$, et qui coincide avec $\frac{P^{(p)}(x)}{P(x)} \hat{u}(x)$ pour $|x| \geqslant M$. Or, puisque $|P(x)| > 1$ si $|x| \geqslant M$, et d'après la propriété 4 de la proposition 1, $P^{-1}(x)P^{(p)}(x)$ est borné pour $|x| \geqslant M$. Comme $\hat{u} \in L^2$, on a bien le résultat annoncé. Ainsi $P^{(p)}(D)E * u$ est localement $-L^2$. Or, du fait que E est indéfiniment différentiable dans $\complement \{0\}$, et par suite que (HE') est valable, découlera que toute solution élémentaire de $P(D)$ possède aussi le propriété qui vient d'être établie.

Notons y et η deux vecteurs quelconques, non orthogonaux, de R^n , et $\langle D , y \rangle \delta$ la transformée de Fourier (par rapport à ξ) de $\langle \xi , y \rangle$. Prouver que, E_1 est indéfiniment différentiable dans $\complement\{0\}$ équivaut à prouver que, quels que soient y , η et l'entier k , on peut trouver un entier h tel que $F = \langle y , x \rangle^h \langle D , \eta \rangle^k E_1$ est une fonction continue sur R^n . Moyennant une rotation dans R^n , on se ramène au cas où y_1 est la seule composante non nulle de y (nous pouvons d'ailleurs supposer $y_1 = 1$) .

Nous noterons $Q(\xi)$ le polynôme obtenu à partir de $P(\xi)$ par cette rotation ; on a évidemment $|Q(\xi)| \geqslant 1$ pour $|\xi| \geqslant M$. $\hat{\varphi}(\xi)$ devient une certaine fonction $\hat{\psi}(\xi)$ qui est la transformée de Fourier d'une $\psi \in \mathcal{D}_x$. Au total nous pouvons écrire :

$$\langle F, \check{\varphi} \rangle = (2i\pi)^{-h} \int_{|\xi| \geqslant M} \frac{\langle \xi, \eta \rangle^k}{Q(\xi)} \left(\frac{\partial^h}{\partial \xi_1^h} \hat{\psi}(\xi) \right) d\xi .$$

En intégrant par parties h fois successives, on obtient d'abord une intégrale sur le fermé $|\xi| \geqslant M$:

$$\langle F_1, \check{\varphi} \rangle = (-2i\pi)^{-h} \int_{|\xi| \geqslant M} \hat{\psi}(\xi) \frac{\partial^h}{\partial \xi_1^h} \left(\frac{\langle \xi, \eta \rangle^k}{Q(\xi)} \right) d\xi ,$$

et une somme finie d'intégrales sur la sphère $|\xi| = M$:

$$\langle F_2, \check{\varphi} \rangle = (2i\pi)^{-h} \sum_{\ell=0}^{k-1} e_\ell \int_{|\xi| = M} \left[\frac{\partial^\ell}{\partial \xi_1^\ell} \left(\frac{\langle \xi, \eta \rangle^k}{Q(\xi)} \right) \right] \left[\frac{\partial^{h-\ell-1}}{\partial \xi_1^{h-\ell-1}} \hat{\psi}(\xi) \right] d\xi$$

En effet, les termes intégrés s'annulent tous à l'infini, car $\hat{\psi} \in \mathcal{S}$; ne restent que leurs valeurs sur la sphère $|\xi| = M$, d'où les intégrales précédentes. Posons d'ailleurs $\langle \ddot{F}_1, \check{\psi} \rangle = \langle F_1, \check{\varphi} \rangle$ et de même pour F_2. Il est clair que $\ddot{F}_1$ est la transformée de Fourier de la distribution $g(\xi)$, nulle pour $|\xi| < M$ et égale à $(-2i\pi)^k \frac{\partial^h}{\partial \xi_1^h} \left(\frac{\langle \xi, \eta \rangle^k}{Q(\xi)} \right)$ dans le reste de l'espace. Grâce à un théorème de SEIDENBERG [2], on prouve que si $P(\xi)$ vérifie les conditions de la proposition 1, il existe un nombre $s > 0$ tel que :

$$|\xi|^s \left| \frac{P^{(p)}(\xi)}{P(\xi)} \right| \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad |\xi| \longrightarrow +\infty \text{ pour tout } p \neq (0, 0, \ldots, 0)$$

La même propriété est évidemment vraie pour $Q(\xi)$ à la place de $P(\xi)$. Il en résulte aussitôt qu'à tout entier ν correspond h assez élevé pour qu'on ait :

$$\left| \frac{\partial^h}{\partial \xi_1^h} \left(\frac{\langle \xi, \eta \rangle^k}{Q(\xi)} \right) \right| \leqslant |\xi|^{-\nu} \quad \text{pour} \quad |\xi| \geqslant M \quad (M > 1) .$$

En prenant ν assez grand, on pourra faire en sorte que $g(\xi) \in L^1$; alors $\ddot{F}_1$ sera une fonction continue sur R^n, et il en sera de même de $\ddot{F}_1$, qui se déduit de F_1 par une rotation sur les variables.

Quand à $\ddot{F}_2$, remarquons que c'est la transformée de Fourier d'une distribution portée par la sphère $|\xi| = M$, donc à support compact ; le théorème de Paley-Weiner veut alors que $\ddot{F}_2$ (et par suite aussi F_2) soit une fonction analytique entière de x.

Reste maintenant à prouver que le fait, pour $P(D)$, d'être complet et de type local, équivaut à posséder l'une des propriétés équivalentes de la proposition 1, ou bien à être hypo-elliptique.

<u>Si</u> $P(D)$ <u>est hypo-elliptique, il est de type local et complet.</u>

Soient donc Ω, Ω' et u comme il est dit dans l'énoncé de la condition (L'). On choisit $\varepsilon > 0$ de sorte que le voisinage fermé d'ordre ε de Ω' soit contenu dans Ω, et l'on utilise la paramètrix $F = \rho E$, où $\rho \in \mathcal{D}$ est égale à 1 sur la boule $|x| \leqslant \varepsilon_1 < \varepsilon$, et à 0 hors de la boule $|x| \leqslant \varepsilon$; E est une solution élémentaire quelconque de $P(D)$. Par hypothèse, E est indéfiniment différentiable dans $\complement\{0\}$. Si $\omega(x) = P(D)F - \delta$, on voit que $\omega \in \mathcal{D}$ et a son support dans la couronne $\varepsilon_1 \leqslant |x| \leqslant \varepsilon$. On a donc :

$$P^{(p)}(D)u = [P^{(p)}(D)F] * [P(D)u] - [P^{(p)}(D)\omega] * u .$$

La restriction à Ω' du deuxième terme du second membre appartient manifestement à $L^2(\Omega')$. Soit alors $\alpha \in \mathcal{D}$, $\alpha(x) = 1$ sur le voisinage d'ordre ε de Ω'. Un théorème classique sur la convolution énonce que, <u>sur</u> Ω' la valeur de $[P^{(p)}(D)F] * [P(D)u]$ est égale à :

$$[P^{(p)}(D)F] * [\alpha(P(D)u)] = [P^{(p)}(D)E] * [\alpha(P(D)u)] + [P^{(p)}(D)((\rho - 1)E)] * [\alpha(P(D)u)]$$

Mais le 2e terme du dernier membre est indéfiniment différentiable. Quant au premier, par hypothèse, il est localement $-L^2$ puisque $\alpha(P(D)u) \in \mathcal{E}' \cap L^2$.
Ceci montre bien que $P(D)$ est de type local. Il est complet, car il est visible qu'un polynôme $P(X)$ non complet ne peut vérifier les conditions de la proposition 1.

<u>Si</u> $P(D)$ <u>est complet et de type local, le polynôme</u> $P(X)$ <u>possède la propriété</u> 1 <u>de la proposition</u> 1.

Prenons deux ouverts relativement compacts Ω et Ω', avec $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. L'inégalité énoncée dans la condition (L'), appliquée à $u = \exp(-2i\pi\langle x, \zeta\rangle)$ $(\zeta \in C^n)$ donne, pour chaque système p de n entiers

$$|P^{(p)}(\zeta)|^2 \leqslant B_\eta (1 + |P(\zeta)|^2) \tag{5}$$

où B_η est une constante finie, dépendant de η $(\zeta = \xi + i\eta)$, mais qui est bornée si η reste dans un compact fixe de R^n. Or on démontre ceci [1] : si $P(X)$ est un polynôme complet, alors, lorsque $|\xi| \longrightarrow +\infty$, $\sum_p |P^{(p)}(\xi + i\eta)|^2$ tend vers $+\infty$, et cela uniformément par rapport à η sur chaque compact de R^n. Ce fait, joint à la majoration (5), implique bien la propriété 1 de la proposition 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER (Lars). - On the theory of general partial differential operators, Acta Math., t. 94, 1955, p. 161-248.

[2] SEIDENBERG (A.). -A new decision method for elementary algebra, Ann. of Math, t. 60, 1954, p. 365-374.

[3] Séminaire SCHWARTZ, t. 2, 1954/55.

[Juillet 1957]