Séminaire N. Bourbaki

Henri Cartan

Théorie spectrale des C-algèbres commutatives

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. nº 125, p. 273-285

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__273_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1956)

THÉORIE SPECTRALE DES C-ALGÈBRES COMMUTATIVES
(d'après L. WAELBROECK [3])

par Henri CARTAN.

Ce mémoire consiste essentiellement en une étude des fonctions analytiques d'une famille finie d'éléments de l'algèbre. Cette étude est fondée sur les théorèmes globaux de K. OKA et H. CARTAN concernant les fonctions analytiques de plusieurs variables.

1. Eléments réguliers ; spectre d'un élément.

Dans ce numéro, A désigne une C-algèbre (commutative ou non) avec élément unité (on identifiera toujours C à une sous-algèbre de A). On suppose A munie d'une topologie localement convexe, séparée, telle que la multiplication de A soit séparément continue.

Un $a \in A$ est régulier si, pour tout $\lambda \in C$ assez grand, $(a-\lambda)^{-1}$ existe et est borné (au sens des EVT (espaces vectoriels topologiques)). La relation

$$\lambda(a-\lambda)^{-1} + 1 = \lambda^{-1}a(a(a-\lambda)^{-1} - 1)$$

montre que $\lambda(a-\lambda)^{-1}$ tend vers -1 en restant borné, quand $\lambda \to \infty$.

DÉFINITION. - Le spectre $Sp(a)$ est défini comme suit : $\lambda \in C$ n'appartient pas à $Sp(a)$ si, pour tout $\mu \in C$ assez voisin de λ, $(a-\mu)^{-1}$ existe et reste borné. Le spectre $Sp(a)$ est fermé ; si a est régulier, $Sp(a)$ est compact.

PROPOSITION 1. - Si $a \in A$, $(a-\lambda)^{-1}$ est une fonction de $\lambda \in C$, définie et continue en tout point $\lambda \notin Sp(a)$; c'est une fonction holomorphe dans le complémentaire de $Sp(a)$; sur tout compact qui ne rencontre pas $Sp(a)$, elle est bornée et uniformément continue.

Démonstration facile : on écrit

$$(a-\mu)^{-1} - (a-\lambda)^{-1} = (\mu-\lambda)(a-\mu)^{-1}(a-\lambda)^{-1} \quad ;$$

si λ est fixe et si μ variable tend vers λ, $(a-\mu)^{-1}(a-\lambda)^{-1}$ reste borné, donc le second membre tend vers 0, et le quotient par $(\mu-\lambda)$ tend vers $(a-\lambda)^{-2}$.

COROLLAIRE. - Le spectre d'un élément régulier a n'est pas vide (sinon $(a-\lambda)^{-1}$ serait holomorphe et borné pour $\lambda \in C$, et tendrait vers 0 à l'infini, donc serait identiquement nul, ce qui est absurde).

PROPOSITION 2. - Pour que $\lambda \notin Sp(a)$, il faut et il suffit que $(a-\lambda)$ possède un inverse régulier.

On écrit $(a-\lambda)^{-1} - (\mu-\lambda)^{-1} = -(\mu-\lambda)^{-1}(a-\lambda)^{-1}(a-\mu)$, pour $\mu \neq \lambda$. Si $\lambda \notin Sp(a)$, $(a-\mu)^{-1}$ existe et est borné pour μ voisin de λ, donc le premier membre a un inverse borné, et $(a-\lambda)^{-1}$ est régulier. Réciproquement, si $(a-\lambda)^{-1}$ est régulier, alors $(\mu-\lambda)^{-1}((a-\lambda)^{-1} - (\mu-\lambda)^{-1})^{-1}$ reste borné pour μ voisin de λ et $\neq \lambda$, donc $(a-\mu)^{-1}$ existe et est borné, et $\lambda \notin Sp(a)$.

Soit A une algèbre dont tous les éléments sont réguliers (c'est par exemple le cas d'une algèbre normée complète) ; alors $\lambda \in Sp(a)$ exprime que $a-\lambda$ n'est pas inversible. En particulier, si A est un corps, on a $A = C$ (car si $a \in A$, $a \notin C$, $a-\lambda$ est inversible pour tout $\lambda \in C$, donc $Sp(a)$ est vide, ce qui est absurde) ; c'est une généralisation du théorème classique de Gelfand-Mazur. On notera que la continuité de a^{-1} pour $a \neq 0$ n'a pas été supposée.

REMARQUE. - Pour que tous les éléments de A soient réguliers, il suffit que a^{-1} existe et soit borné pour tout a assez voisin de 1.

2. L'intégrale de Cauchy.

Dans ce numéro, on conserve les hypothèses faites sur A au n° 1, et on suppose en outre que A est quasi-complète (i.e. : tout ensemble borné et fermé est complet). Les résultats qui suivent sont classiques, du moins pour les algèbres normées complètes.

D'abord, une définition : si K est un compact du plan complexe C, on note $\mathcal{H}(K)$ la limite inductive des algèbres $\mathcal{H}(U)$, en notant $\mathcal{H}(U)$ l'algèbre des fonctions holomorphes dans un ouvert U contenant K ; $\mathcal{H}(U)$ est munie de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de U, et $\mathcal{H}(K)$ est munie de la topologie limite inductive des $\mathcal{H}(U)$. Tous les éléments de $\mathcal{H}(K)$ sont réguliers. On notera z l'élément de $\mathcal{H}(K)$ défini par la coordonnée z de C.

THÉORÈME 1. - Soit a un élément régulier de A. Il existe un C-homomorphisme d'algèbres $\mathcal{H}(Sp(a)) \to A$, continu, qui transforme 1 dans 1, et transforme la fonction coordonnée z dans l'élément a. Un tel homomorphisme est unique, et son image est une sous-algèbre de A dont tous les éléments sont réguliers.

DÉMONSTRATION. – La formule classique de Cauchy (pour les fonctions $f(z)$ scalaires) montre que toute $f(z)$ holomorphe au voisinage du compact $sp(a)$ est limite uniforme, dans un voisinage de $Sp(a)$, de combinaisons linéaires de fonctions rationnelles dont chacune a la forme $(z-\lambda)^{-1}$ $(\lambda \notin Sp(a))$. Ceci entraîne l'unicité de l'homomorphisme cherché $\mathcal{H}(Sp(a)) \rightarrow A$, car le transformé de $(z-\lambda)^{-1}$ est nécessairement $(a-\lambda)^{-1}$.

L'existence se prouve au moyen de l'intégrale de Cauchy. Si $f(z)$ est holomorphe dans U ouvert contenant $Sp(a)$, prenons dans $U-Sp(a)$ un cycle (orienté) L, qui soit homologue, dans $C-Sp(a)$, à un cercle de grand rayon, contenant $Sp(a)$ à son intérieur, et d'orientation positive ; l'intégrale

$$(2\pi i)^{-1} \int_L (z-a)^{-1} f(z)\, dz$$

existe (A étant quasi-complet), et sa valeur ne dépend pas du choix de L ; on la note $f(a)$. On va montrer que l'application $f \rightarrow f(a)$ de $\mathcal{H}(Sp(a))$ dans A est l'homomorphisme cherché. Elle est bien continue ; montrons que si f est la constante 1, alors $f(a) = 1$, c'est-à-dire $\int_L ((z-a)^{-1}-z^{-1})dz = 0$. Or

$$(z-a)^{-1}-z^{-1} = a(1+a(z-a)^{-1})z^{-2} \quad ,$$

et l'intégrale du second membre, sur un cercle de rayon qui tend vers ∞, tend vers 0. Prenons maintenant $f(z) = z$; comme $(z-a)^{-1}z = 1+a(z-a)^{-1}$, on trouve $f(a) = a$. Prenons enfin $f(z) = (z-\lambda)^{-1}$, $\lambda \notin Sp(a)$; pour voir que $f(a) = (a-\lambda)^{-1}$, on montre que

$$(2\pi i)^{-1} \int_L (a-\lambda)(z-a)^{-1}(z-\lambda)^{-1} dz = 1 \, ,$$

ce qui est clair, car la fonction sous le signe $\int$ est égale à $(z-a)^{-1}-(z-\lambda)^{-1}$.

Prouvons maintenant que si $h = fg$, alors $h(a) = f(a)g(a)$; il suffit de le faire quand f et g sont respectivement de la forme $(z-\lambda)^{-1}$ et $(z-\mu)^{-1}$ $(\lambda, \mu \notin Sp(a))$, et on peut se borner au cas $\lambda \neq \mu$; la vérification est alors immédiate. Ceci achève de prouver que $f \rightarrow f(a)$ est un C-homomorphisme continu de l'algèbre $\mathcal{H}(Sp(a))$ dans l'algèbre A. Or tout C-homomorphisme continu d'algèbres, qui transforme 1 en 1, transforme tout élément régulier en un élément régulier ; donc ici les éléments de la forme $f(a)$ sont réguliers.

3. Cas des algèbres commutatives.

A partir de maintenant, et jusqu'à la fin de l'exposé, A désigne une C-algèbre commutative avec élément unité, munie d'une topologie localement convexe, séparée, quasi complète, et satisfaisant en outre à la condition suivante :

(Prod) Si a reste fixe et si b tend vers zéro, alors le produit ab tend vers zéro. Autrement dit : l'application bilinéaire $A \times A \longrightarrow A$ définie par la multiplication de A, est séparément continue.

PROPOSITION 1. - Sous ces hypothèses, supposons que a et b parcourent deux ensembles bornés de A ; alors le produit ab parcourt un ensemble borné.

DÉMONSTRATION. - C'est un cas particulier de la proposition suivante : soient E, F, G trois espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés ; soit $f : E \times F \to G$ une application bilinéaire, séparément continue ; si E est quasi-complet, l'image par f du produit de deux ensembles bornés $A \subset E$ et $B \subset F$ est un ensemble borné de G.

Cette proposition résulte facilement du théorème 1 du paragraphe 3 du chapitre 3 de [2], qui dit ceci : si une partie H de $\mathcal{L}(E,G)$ est bornée pour la topologie de la convergence simple, H est bornée pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties de E qui sont bornées, convexes, équilibrées et complètes. Ici, l'application f définit une application continue de F dans $\mathcal{L}(E,G)$ muni de la topologie de la convergence simple ; si $B \subset F$ est borné, l'image H de B dans $\mathcal{L}(E,G)$ est bornée pour la topologie de la convergence simple, et le théorème du libre de BOURBAKI donne alors le résultat cherché.

Soit $j \to a_j$ $(j \in J)$ une famille finie d'éléments réguliers de A ; dans l'espace C^J, soient z_j $(j \in J)$ les fonctions coordonnées. Soit $z = (z_j)$ un point de C^J tel que $z_j \notin Sp(a_j)$ pour $j \in J$; alors le produit $\prod_j (z_j - a_j)^{-1}$ est une fonction bornée et uniformément continue du point z sur tout compact contenu dans l'ensemble $(z_j \notin Sp(a_j))$. Soit alors, pour chaque j, un ouvert $U_j \supset Sp(a_j)$, et soit $f(z)$ holomorphe dans le produit des U_j ; pour chaque $j \in J$, soit L_j un cycle de $U_j - Sp(a_j)$, homologue dans $C - Sp(a_j)$ à un cercle de grand rayon contenant $Sp(a_j)$ à son intérieur. Pour faciliter l'écriture, supposons que l'ensemble d'indices J soit $[1,n]$, et prenons l'intégrale

$$(2\pi i)^{-n} \int_{L_1} \cdots \int_{L_n} (z_j - a_j)^{-1} f(z)\, dz_1 \ldots dz_n \ .$$

Sa valeur ne dépend pas du choix des L_j ; on la notera $f(a_1,\ldots,a_n)$. Si $f(z)$ est un produit $\prod_j f_j(z_j)$, $f(a_1,\ldots,a_n) = \prod_j f_j(a_j)$. En particulier si $f = 1$, on a $f(a_1,\ldots,a_n) = 1$; si $f(z) = z_j$, $f(a_1,\ldots,a_n) = a_j$; si $f = \prod_j (z_j - \lambda_j)^{-1}$, $f(a_1,\ldots,a_n) = \prod_j (z_j - a_j)^{-1}$. De là on déduit, en raisonnant comme au n° 2 :

THÉORÈME 1bis. - Soit $(a_j)_{j \in J}$ une famille finie d'éléments réguliers de A. Il existe un C-homomorphisme d'algèbres $\mathcal{H}(\prod_j \mathrm{Sp}(a_j)) \to A$, continu, qui transforme 1 en 1, et chaque fonction coordonnée z_j dans l'élément a_j . Un tel homomorphisme est unique, et son image se compose d'éléments réguliers de A .

COROLLAIRE. - L'ensemble A_r des éléments réguliers de A est une sous-algèbre de A .

4. Le spectre de Gelfand.

Soit E une C-algèbre commutative (sans topologie), avec élément unité. Un caractère est un C-homomorphisme d'algèbres $\chi : B \to C$. On notera $\mathcal{S}(B)$ l'ensemble des caractères ("spectre de Gelfand") , et $\mathcal{M}(B)$ l'ensemble des idéaux maximaux de B . L'application $\mathcal{S}(B) \to \mathcal{M}(B)$ qui à chaque χ , associe le noyau de χ , est injective, mais pas surjective en général.

A chaque $b \in B$ on associe l'application $\varphi_b : \mathcal{S}(B) \to C$ qui envoie χ dans $\chi(b)$. On définit sur $\mathcal{S}(B)$ la structure uniforme la moins fine rendant les φ_b uniformément continues ; il est immédiat que $\mathcal{S}(B)$ est complet.

On notera $S(b)$ l'image de l'application $\varphi_b : \mathcal{S}(B) \to C$. Supposons que, pour chaque $b \in B$, $S(b)$ soit un ensemble borné du plan complexe ; alors $\mathcal{S}(B)$ est précompact, donc compact, et chaque $S(b)$ est compact.

Soit alors $j \to b_j$ $(j \in J)$ une famille finie d'éléments de B ; on notera $S(b_j)$, ou simplement $S(J)$ si aucune confusion n'en résulte, le compact de C^J, image de l'application $\varphi_J : \chi \to (\chi(b_j))_{j \in J}$ de $\mathcal{S}(B)$ dans C^J . Si $J' \supset J$, la composée de $\varphi_{J'} : \mathcal{S}(B) \to C^{J'}$ et de la projection canonique de $C^{J'}$ sur C^J est l'application φ_J. En particulier, la projection $C^{J'} \to C^J$ applique $S(J')$ sur $S(J)$.

5. Enoncé des résultats fondamentaux.

Appliquons les notions précédentes à la sous-algèbre $B = A_r$ des éléments réguliers de l'algèbre A du n° 3 ; aucune topologie n'est considérée sur A_r. Si $a \in A_r$, on a $S(a) \subset Sp(a)$, car si $\lambda \notin S(a)$, $a - \lambda$ ne possède pas d'inverse dans A_r. Donc $S(a)$ est borné ; ainsi $S(a)$ est compact, et le spectre de Gelfand $\mathfrak{S}(A_r)$ est compact.

Nous donnerons plus loin une démonstration abrégée des théorèmes qui vont suivre :

THÉORÈME 2. - L'application $\mathfrak{S}(A_r) \longrightarrow \mathfrak{M}(A_r)$ est bijective. Par suite, pour toute famille finie d'éléments $a_j \in A_r$, le compact $S(a_j)$ se compose de l'ensemble des systèmes (λ_j) tels que les éléments $a_j - \lambda_j$ engendrent dans A_r un idéal $\neq A_r$; en particulier, $S(a) = Sp(a)$ pour tout $a \in A_r$.

Pour chaque famille finie $(a_j)_{j \in J}$ d'éléments de A_r, considérons l'algèbre topologique $\mathcal{H}(S(J))$; si $J' \supset J$, $\mathcal{H}(S(J))$ s'envoie continûment et biunivoquement dans $\mathcal{H}(S(J'))$. On notera $\mathcal{H}(\mathfrak{S}(A_r))$ la limite inductive de ces algèbres ; ses éléments s'appelleront les fonctions holomorphes sur le spectre $\mathfrak{S}(A_r)$. Soit d'autre part $\mathcal{C}(\mathfrak{S}(A_r))$ l'algèbre de toutes les fonctions (numériques complexes) continues sur le compact $\mathfrak{S}(A_r)$. On définit un homomorphisme naturel

$$\mathcal{H}(\mathfrak{S}(A_r)) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathfrak{S}(A_r))$$

de la manière suivante : si $f \in \mathcal{H}(S(J))$, l'application composée $f \circ \varphi_J : \mathfrak{S}(A_r) \longrightarrow C$ est l'élément de $\mathcal{C}(\mathfrak{S}(A_r))$ qu'on associe à f ; on le notera $\tilde{f}$.

Etant donné un $\chi \in \mathfrak{S}(A_r)$, l'application $f \longrightarrow \tilde{f}(\chi)$ est un caractère continu de l'algèbre $\mathcal{H}(\mathfrak{S}(A_r))$.

THÉORÈME 3. - Désignons par B l'algèbre $\mathcal{H}(\mathfrak{S}(A_r))$ des fonctions holomorphes sur le spectre de Gelfand. Tous les éléments de B sont réguliers, et l'application $\mathfrak{S}(B) \longrightarrow \mathfrak{M}(B)$ est bijective. De plus, l'application qui, à chaque caractère χ de A_r, associe le caractère $f \longrightarrow \tilde{f}(\chi)$ de l'algèbre B, est une bijection de $\mathfrak{S}(A_r)$ sur $\mathfrak{S}(B)$.

COROLLAIRE. - Les caractères de $\mathcal{H}(\mathfrak{S}(A_r))$ sont continus, et le radical de $\mathcal{H}(\mathfrak{S}(A_r))$ se compose des f telles que la fonction associée $\tilde{f}$ soit identiquement nulle.

NOTATION. - Pour chaque $a \in A_r$, la fonction coordonnée sur le compact $S(a) \subset C$ définit un élément de $\mathcal{H}(\mathfrak{S}(A_r))$, qu'on notera z_a.

THÉORÈME 4. - Il existe un C-homomorphisme d'algèbres $\alpha : \mathcal{H}(\mathfrak{S}(A_r)) \longrightarrow A$, continu, qui transforme 1 dans 1, et chaque z_a dans l'élément a correspondant. Un tel homomorphisme est unique ; il applique $\mathcal{H}(\mathfrak{S}(A_r)) = B$ sur A_r, et l'application $\mathfrak{S}(A_r) \longrightarrow \mathfrak{S}(B)$ définie par α n'est autre que la bijection du théorème 3 ; autrement dit :

$$\tilde{f}(\chi) = \chi(\alpha(f)) \quad \text{pour} \quad \chi \in \mathfrak{S}(A_r) \quad \text{et} \quad f \in \mathcal{H}(\mathfrak{S}(A_r)) \,. \tag{1}$$

Introduisons la notation suivante : soit une famille finie $(a_j)_{j \in J}$ d'éléments de A_r, et soit f une fonction holomorphe au voisinage du compact $S(J)$. Identifions f à son image dans $\mathcal{H}(\mathfrak{S}(A_r))$; alors l'élément $\alpha(f) \in A_r$ sera noté $f(a_j)$; lorsque $J = [1,n]$, on écrira aussi $S(a_1,\dots,a_n)$ au lieu de $S(J)$, et $f(a_1,\dots,a_n)$ au lieu de $f(a_j)$.

Avec ces notations, la relation (1) s'explicite comme suit :

$$\tilde{f}(\chi(a_1),\dots,\chi(a_n)) = \chi(f(a_1,\dots,a_n)) \quad \text{pour tout} \quad \chi \in \mathfrak{S}(A_r). \tag{2}$$

COROLLAIRE du théorème 4. - Si $f_1,\dots,f_n \in \mathcal{H}(\mathfrak{S}(A_r))$, l'ensemble des systèmes de valeurs prises par les f_j sur $\mathfrak{S}(A_r)$ n'est autre que le compact $S(a_1,\dots,a_n)$, en notant a_j l'élément $\alpha(f_j)$. En particulier, si $f_1,\dots,f_n$ sont holomorphes au voisinage de $S(b_1,\dots,b_p)$, l'application $(f_1,\dots,f_n)$ de $S(b_1,\dots,b_p)$ dans C^n a exactement pour image le compact $S(a_1,\dots,a_n)$, en posant $a_j = f_j(b_1,\dots,b_p)$.

THÉORÈME 5 (théorème des fonctions composées). - Avec les notations du corollaire précédent, soit g holomorphe au voisinage du compact $S(a_1,\dots,a_n)$, et soit h la fonction composée $g(f_1,\dots,f_n)$, qui est holomorphe au voisinage du compact $S(b_1,\dots,b_p)$. On a

$$h(b_1,\dots,b_p) = g(f_1(b_1,\dots,b_p),\dots,f_n(b_1,\dots,b_p)) \,. \tag{3}$$

6. Démonstrations.

DÉMONSTRATION du théorème 2. - Pour chaque famille finie $(a_j)_{j \in J}$ d'éléments de A_r, soit D_J l'algèbre $\mathcal{H}(\prod_{j \in J} Sp(a_j))$. Si $J' \supset J$, on a une injection canonique $D_J \to D_{J'}$, ce qui permet de définir l'algèbre topologique D, limite inductive des D_J. Pour chaque $a \in A_r$, notons z_a l'élément de D, image de la fonction coordonnée sur $Sp(a)$. Le théorème 1 bis entraîne l'existence et l'unicité d'un C-homomorphisme continu d'algèbres $\phi : D \to A$, tel que $\phi(1) = 1$ et $\phi(z_a) = a$ pour tout $a \in A_r$; l'image de ϕ est évidemment A_r, qui est ainsi identifié canoniquement à une algèbre-quotient de l'algèbre D (sans topologie). Pour prouver que l'application $\mathfrak{S}(A_r) \to \mathfrak{M}(A_r)$ est surjective (donc bijective), il suffit de montrer que $\mathfrak{S}(D) \to \mathfrak{M}(D)$ l'est. On va montrer ceci: pour tout idéal $\mathfrak{I}$ de D, $\neq D$, <u>il existe un caractère continu χ de D qui s'annule sur $\mathfrak{I}$</u> (il en résultera que tout caractère de D est continu, et que tout idéal maximal de D est fermé).

$D_J \cap \mathfrak{I}$ est un idéal de D_J, $\neq D_J$; les éléments de cet idéal sont des fonctions holomorphes au voisinage de $\prod_{j \in J} Sp(a_j)$, qui ont au moins un zéro commun dans $\prod_{j \in J} Sp(a_j)$; sinon, d'après un théorème de H. Cartan, l'idéal contiendrait l'élément unité 1. Soit $\Gamma(J; \mathfrak{I})$ l'ensemble de ces zéros communs ; c'est un compact non vide. Si $J' \supset J$, la projection canonique $C^{J'} \to C^J$ applique évidemment $\Gamma(J'; \mathfrak{I})$ dans $\Gamma(J; \mathfrak{I})$. Soit $\Gamma(\mathfrak{I})$ la limite projective des compacts $\Gamma(J; \mathfrak{I})$ (cf. Appendice); un point de $\Gamma(\mathfrak{I})$ est défini par la donnée, pour chaque $a \in A_r$, d'un point $\lambda(a) \in Sp(a)$. Associons à toute $f \in D_J$ sa valeur au point $(\lambda(a_j))_{j \in J}$; on définit ainsi un caractère continu χ de la limite inductive D des D_J, et χ s'annule sur $\mathfrak{I}$. C.Q.F.D.

Incidemment, on a prouvé que le spectre $\mathfrak{S}(D)$ s'identifie au compact $\prod_{a \in A_r} Sp(a)$, limite projective des produits finis $\prod_{j \in J} Sp(a_j)$.

Introduisons la notation suivante : si $a_1, \ldots, a_n \in A_r$, et si f est holomorphe au voisinage de $\prod_{1 \leq j \leq n} Sp(a_j)$, l'élément de A_r, transformé par ϕ, $D \to A_r$ de l'image de f dans D, sera noté $f(a_1, \ldots, a_n)$. Cette notation a en fait été déjà utilisée au n° 3.

PROPOSITION 2. - <u>Avec ces notations, on a</u>

$$f(\chi(a_1),\ldots, \chi(a_n)) = \chi(f(a_1,\ldots,a_n)) .$$

C'est une conséquence immédiate de la détermination des caractères de l'algèbre D .

Recherche des caractères de A_r : ils s'identifient aux caractères de D qui s'annulent sur l'idéal $\mathfrak{N}$, noyau de $\phi : D \to A_r$. Nous noterons désormais $\Gamma(J)$ le compact $\Gamma(J;\mathfrak{N})$; la limite projective des $\Gamma(J)$ s'identifie au spectre $\mathfrak{S}(A_r)$, et le compact noté $S(J)$ au n° 4 n'est autre que l'image de $\mathfrak{S}(A_r)$ par l'application $\chi \longrightarrow (\chi(a_j))_{j\in J}$; $S(J)$ est l'intersection, pour les $J' \supset J$, des images $\Gamma(J') \longrightarrow \Gamma(J)$ (cf. Appendice).

DÉMONSTRATION du théorème 3. – Rappelons que $B = \mathcal{H}(\mathfrak{S}(A_r))$ a été définie comme la limite inductive des algèbres $\mathcal{H}(S(J))$. Comme $S(J) \subset \Gamma(J)$, on a un homomorphisme naturel, continu, de $\mathcal{H}(\Gamma(J))$ dans $\mathcal{H}(S(J))$; cette collection d'homomorphismes définit, par passage à la limite inductive, un homomorphisme continu

$$B = \mathcal{H}(\mathfrak{S}(A_r)) \longrightarrow \varinjlim_{J} \mathcal{H}(\Gamma(J)) . \tag{4}$$

Mais le fait que $S(J)$ est l'intersection, pour $J' \supset J$, des images des compacts $\Gamma(J')$, entraîne que (4) est un isomorphisme (topologique) ; en effet, on définit facilement un homomorphisme continu de $\varinjlim_{J} \mathcal{H}(\Gamma(J))$ dans $\varinjlim_{J} \mathcal{H}(S(J))$, qui est réciproque de (4). Désormais, nous identifierons donc B à la limite inductive des $\mathcal{H}(\Gamma(J))$.

Pour prouver le théorème 3, il suffit de montrer que l'application composée $\mathfrak{S}(A_r) \longrightarrow \mathfrak{S}(B) \longrightarrow \mathfrak{M}(B)$ est surjective (donc bijective) ; cette application associe à chaque caractère χ de A_r l'idéal des $f \in B$ telles que $\tilde{f}(\chi) = 0$. On a donc à montrer que, pour tout idéal $\mathfrak{J}$ de B , distinct de B , il existe un caractère χ de A_r tel que $\tilde{f}(\chi) = 0$ pour toute $f \in \mathfrak{J}$.

Pour chaque famille finie $(a_j)_{j\in J}$ d'éléments de A_r , $\mathcal{H}(\Gamma(J)) \cap \mathfrak{J}$ est un idéal de $\mathcal{H}(\Gamma(J))$; les éléments de cet idéal sont des fonctions holomorphes au voisinage du compact $\Gamma(J)$, et elles ont au moins un zéro commun dans $\Gamma(J)$, toujours d'après H. CARTAN ; en effet le compact $\Gamma(J) \subset \prod_{j\in J} Sp(a_j)$ est défini en égalant à 0 des fonctions holomorphes au voisinage de $\prod_{j\in J} Sp(a_j)$, à savoir les g telles que $g(a_j) \in A_r$ soit nul. Soit $\Lambda(J)$ l'ensemble de ces zéros communs, qui est compact non vide ; un point χ de la limite projective des

$\Lambda(J)$ sera un caractère de A_r tel que $\tilde{f}(\chi) = 0$ pour toute $f \in \mathfrak{J}$. C.Q.F.D.

DÉMONSTRATION du théorème 4. - Il résultera évidemment du :

THÉORÈME 4 <u>bis</u>. - <u>Pour toute famille finie</u> $(a_j)_{j \in J}$ <u>d'éléments de</u> A_r, <u>il existe un</u> C-<u>homomorphisme d'algèbres</u> $\beta : \mathcal{H}(\Gamma(J)) \to A$, <u>continu, qui transforme</u> 1 <u>dans</u> 1, <u>et chaque fonction coordonnée</u> z_{a_j} <u>dans l'élément</u> a_j. <u>Un tel homomorphisme est unique ; et pour toute</u> $f \in \mathcal{H}(\Gamma(J))$, <u>on a</u>

$$(5) \qquad f(\chi(a_j)) = \chi(\beta(f)) \qquad \text{quel que soit } \chi \in \mathfrak{S}(A_r).$$

En effet, le compact $\Gamma(J)$ peut être défini, dans $\prod_{j \in J} Sp(a_j)$, par un nombre <u>fini</u> d'équations $g_k(z_j) = 0$, les g_k étant holomorphes au voisinage de $\prod_{j \in J} Sp(a_j)$ et telles que $g_k(a_j) = 0$. A chaque fonction $F(y_k, z_j)$, holomorphe par rapport aux deux séries de variables y_k et z_j dans un voisinage du produit

$$(P) \qquad y_k = 0 \;, \qquad z_j \in Sp(a_j) \;,$$

associons la fonction composée $F(g_k(z_j), z_j) \in \mathcal{H}(\Gamma(J))$. Ceci définit un C-homomorphisme d'algèbres $\gamma : \mathcal{H}(P) \to \mathcal{H}(\Gamma(J))$; d'après CARTAN-OKA, γ est surjectif, et son noyau est l'idéal $\mathcal{J}$ engendré par les fonctions $y_k - g_k(z_j)$. De plus, γ est une application ouverte, c'est-à-dire définit un isomorphisme de l'algèbre quotient $\mathcal{H}(P)/\mathcal{J}$ sur l'algèbre $\mathcal{H}(\Gamma(J))$ (isomorphisme d'algèbres topologiques) : en effet, γ est limite inductive d'homomorphismes surjectifs d'espaces de Fréchet, à chacun desquels on applique le théorème de Banach.

Par ailleurs, on définit un homomorphisme continu d'algèbres

$$\delta : \mathcal{H}(P) \to A$$

en associant à $F(y_k, z_j)$ l'élément $F(0, a_j)$ de A, défini par le théorème 1 <u>bis</u>. Comme δ s'annule sur l'idéal $\mathcal{J}$, puisque $g_k(a_j) = 0$, δ définit, par passage au quotient, un homomorphisme continu

$$\beta : \mathcal{H}(\Gamma(J)) \to A \;,$$

qui satisfait aux conditions de l'énoncé. Réciproquement, soit β' un homomorphisme satisfaisant aux conditions de l'énoncé ; le composé

$$\mathcal{H}(P) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{H}(\Gamma(J)) \xrightarrow{\beta'} A$$

envoie 1 dans 1, y_k dans 0, et z_j dans a_j ; d'après l'unicité affirmée au théorème 1 bis, ce composé est δ , et par suite $\beta = \beta'$.

Pour achever la démonstration du théorème 4 bis, il reste seulement à prouver la relation (5). Or toute $f \in \mathcal{H}(\Gamma(J))$ s'écrit $F(g_k(z_j),z_j)$, et $\chi(\beta(f)) = \chi(F(0,a_j))$, ce qui, d'après la proposition 2, est égal à $F(0,\chi(a_j))$; or $0 = \chi(g_k(a_j)) = g_k(\chi(a_j))$; donc $F(0,\chi(a_j)) = F(g_k(\chi(a_j)),\chi(a_j)) =$ $= f(\chi(a_j))$.

DÉMONSTRATION du théorème 5. - Supposons d'abord g holomorphe au voisinage du compact $\Gamma(J) = \Gamma(a_1,\dots,a_n)$. L'application $g \longrightarrow h(b_1,\dots,b_p)$ est un C-homomorphisme continu d'algèbres $\mathcal{H}(\Gamma(a_1,\dots,a_n)) \longrightarrow A$ (on suppose les f_j données une fois pour toutes) ; il transforme 1 dans 1, et chaque fonction coordonnée z_{a_j} dans a_j . D'après le théorème 4 bis, c'est l'application β ; autrement dit, g est transformé dans $g(a_1,\dots,a_n)$, d'où la relation (3) du théorème 5.

Cette relation est donc établie quand $g \in \mathcal{H}(\Gamma(a_1,\dots,a_n))$. Passons au cas général où $g \in \mathcal{H}(S(a_1,\dots,a_n))$. Il existe des éléments $a_{n+1},\dots,a_{n+m} \in A_r$ tels que l'image de g dans $\mathcal{H}(\mathcal{S}(a_r))$ provienne d'un élément $g' \in \mathcal{H}(\Gamma(a_1,\dots,a_{n+m}))$; soient f'_j les images des f_j dans $\mathcal{H}(S(b_1,\dots,b_p,a_{n+1},\dots,a_{n+m}))$; alors la fonction composée $h' = g'(f'_1,\dots,f'_n, z_{a_{n+1}},\dots,z_{a_{n+m}}) \in \mathcal{H}(S(b_1,\dots,b_p,a_{n+1},\dots,$ $\dots,a_{n+m}))$ est l'image canonique de $h \in \mathcal{H}(S(b_1,\dots,b_p))$. Donc

$$h(b_1,\dots,b_p) = h'(b_1,\dots,b_p,a_{n+1},\dots,a_{n+m}) ,$$

qui, on vient de le voir, est égal à

$$g'(f'_1(b_1,\dots,a_{n+m}),\dots,f'_n(b_1,\dots,a_{n+m}),a_{n+1},\dots,a_{n+m}) =$$

$$= g'(a_1,\dots,a_n,a_{n+1},\dots,a_{n+m}) = g(a_1,\dots,a_n) ,$$

ce qui établit le théorème 5 dans le cas général.

7. Compléments.

Nous allons voir que l'algèbre $\mathcal{H}(\mathcal{S}(A_r))$ des fonctions holomorphes sur le spectre $\mathcal{S}(A_r)$ n'est autre que l'algèbre des sections d'un faisceau d'algèbres

$\mathcal{O}(\mathfrak{S}(A_r))$ sur l'espace compact $\mathfrak{S}(A_r)$. Pour chaque famille finie $(a_j)_{j \in J}$ d'éléments de A_r, soit $\mathcal{O}(S(J))$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes aux points du compact $S(J)$ (il s'agit de fonctions holomorphes de l'espace ambiant C^J). Ainsi $\mathcal{H}(S(J))$ n'est autre que l'algèbre des sections de ce faisceau $\mathcal{O}(S(J))$.

L'application $\mathfrak{S}(A_r) \longrightarrow S(J)$ définit un faisceau sur (A_r), image réciproque de $\mathcal{O}(S(J))$; notons-le $\mathcal{O}(\mathfrak{S}(A_r);J)$. Si $J' \supset J$, on a un homomorphisme du faisceau $\mathcal{O}(\mathfrak{S}(A_r);J)$ dans le faisceau $\mathcal{O}(\mathfrak{S}(A_r);J')$. Par définition, le faisceau $\mathcal{O}(\mathfrak{S}(A_r))$ sera la limite inductive des faisceaux $\mathcal{O}(\mathfrak{S}(A_r);J)$; on l'appellera le <u>faisceau des germes de fonctions holomorphes sur le spectre</u> $\mathfrak{S}(A_r)$.

En vertu de la compacité de $\mathfrak{S}(A_r)$, toute section de $\mathcal{O}(\mathfrak{S}(A_r))$ provient d'une section d'un faisceau $\mathcal{O}(\mathfrak{S}(A_r);J)$ pour une famille finie $(a_j)_{j \in J}$ convenable. Mais il ne faut pas croire que toute section de $\mathcal{O}(\mathfrak{S}(A_r);J)$ soit l'image d'une section de $\mathcal{O}(S(J))$, autrement dit soit l'image d'une fonction holomorphe au voisinage du compact $S(J)$. Cela tient à ce qu'un même point $(z_j)_{j \in J}$ de $S(J)$ peut être l'image de points distincts du spectre $\mathfrak{S}(A_r)$, et que les éléments de fonctions associés à ces points peuvent être des éléments de fonctions distincts au point (z_j). Ainsi, on peut dire que l'algèbre des sections de $\mathcal{O}(\mathfrak{S}(A_r);J)$ est une algèbre de fonctions holomorphes <u>non uniformes</u> sur le compact $S(J)$; on la notera $\mathcal{H}(S(J))$.

Cependant, grâce à la compacité de $\mathfrak{S}(A_r)$, chaque section du faisceau $\mathcal{O}(\mathfrak{S}(A_r))$ est l'image réciproque d'une section d'un faisceau $\mathcal{O}(S(J))$ pour une famille finie convenable $(a_j)_{j \in J}$. Autrement dit, l'algèbre des sections de $\mathcal{O}(\mathfrak{S}(A_r))$ s'identifie à l'algèbre $\mathcal{H}(\mathfrak{S}(A_r))$, dont nous avons défini (théorème 4) un homomorphisme canonique sur A_r. Celui-ci induit donc, pour toute famille finie $(a_j)_{j \in J}$ d'éléments de A_r, un homomorphisme de l'algèbre $\mathcal{H}(S(J))$ dans A_r ; ainsi, l'on sait définir $f(a_1,\dots,a_n) \in A_r$ pour $a_1,\dots,a_n \in A_r$ et pour certaines fonctions $f(z_1,\dots,z_n)$ <u>non uniformes</u> sur le compact $S(a_1,\dots,a_n)$.

Ce dernier résultat généralise, en les précisant, ceux récemment publiés par ARENS et CALDERON [1].

APPENDICE

Limites projectives d'espaces compacts.

Nous rappelons ici quelques notions classiques.

LEMME. - Soit I un ensemble filtrant croissant ; on suppose qu'on a associé à chaque $i \in I$ un espace compact non vide K_i, et, à chaque couple (i,j) tel que $i \leqslant j$, une application continue φ_{ij}, $K_j \to K_i$ de manière que, pour $i \leqslant j \leqslant k$, on ait $\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} = \varphi_{ik}$. Alors il existe une famille de points $(x_i)_{i \in I}$ tels que $x_i \in K_i$ pour tout i et $\varphi_{ij}(x_j) = x_i$ pour $i \leqslant j$.

(Démonstration : dans le produit des K_i, qui est compact, on considère le sous-ensemble $F(k)$ des systèmes $(x_i)_{i \in I}$ tels que $\varphi_{ij}(x_j) = x_i$ pour tout cpuple (i,j) tel que $i \leqslant j \leqslant k$. L'ensemble $F(k)$ est fermé non vide, donc l'intersection des $F(k)$ n'est pas vide).

Conséquence : pour chaque $i \in I$, soit S_i l'intersection, quand j varie $\geqslant i$, des images des applications $\varphi_{ij} : K_j \to K_i$. Alors S_i est un compact non vide ; en outre, φ_{ij} applique S_j sur S_i. (En effet, soit donné $x_i \in S_i$, et soit, pour chaque $j \geqslant i$, K'_j l'image réciproque $\varphi_{ij}^{-1}(x_i)$; on applique le lemme aux K'_j, $j \geqslant i$).

L'ensemble K des systèmes $(x_i)_{i \in I}$ tels que $\varphi_{ij}(x_j) = x_i$ pour $i \leqslant j$, est un compact non vide, qu'on appelle la limite projective des K_i suivant les φ_{ij}. La projection canonique du produit des K_i sur le i-ième facteur K_i induit une application continue φ_i de K dans K_i, et on a $\varphi_{ij} \circ \varphi_j = \varphi_i$ pour $i \leqslant j$. Alors S_i n'est autre que l'image de l'application $\varphi_i : K \to K_i$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARENS (R.) and CALDERON (A.P.). - Analytic functions of several Banach algebra elements, Ann. of Math., t. 62, 1955, p. 204-216.

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Les structures fondamentales de l'analyse, Livre 5 : Espaces vectoriels topologiques, chapitres 3 à 5. - Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind. n° 1229 ; Eléments de Mathématique, 18), chapitre 3, p. 21.

[3] WAELBRŒCK (L.). - Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 33, 1954, p. 147-186.

[Juillet 1957]