JEAN-PAUL BENZÉCRI

Théorie des capacités

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. n° 120, p. 217-227

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__217_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1955)

THÉORIE DES CAPACITÉS

par Jean-Paul BENZÉCRI

(d'après G. CHOQUET [1])

1. Potentiel, capacité.

Soit dans un espace R^n $F_{M'} = m \times m' \frac{\overrightarrow{MM'}}{|MM'|^n}$ la force exercée sur la masse m' placée en M' par la masse m , placée en M : cette force dérive d'un potentiel, harmonique en dehors de M , qui est :

$$V(M') = \frac{m}{MM'^{n-2}} \; (n > 2) \qquad V(M') = - m \operatorname{Log}(MM') \; (n = 2)$$

Si, au lieu d'une masse ponctuelle unique, on considère une distribution de masses définie par une mesure, le potentiel sera :

$$V(M') = \int \frac{d\mu_M}{MM'^{n-2}} \qquad \text{ou} \qquad V(M') = - \int \operatorname{Log}(MM') \, d\mu_M$$

Si l'on considère des charges placées non plus dans l'espace illimité, mais dans une enceinte dont la frontière, supposée régulière, est maintenue au potentiel nul, le potentiel créé par une distribution sera :

$$V(M') = \int G(MM') \, d\mu_M$$

où G est le noyeau de Green du domaine, nul à la frontière. Pour tout domaine au dimension n , et pour certains domaines dits Greeniens en dimension 2 , existe un noyau qui, considéré comme fonction de M' , voisin de M , est équivalent à :

$$\frac{1}{MM'^{n-2}} \; (n > 2) \qquad - \operatorname{Log} MM' \; (n = 2)$$

et de plus est harmonique pour M' distinct de M et tend vers 0 quand M'' tend vers un point de la frontière, n'appartenant pas à un ensemble de points singuliers, qui est "rare". Enfin, l'on a défini des potentiels généralisés, dont les noyaux ne sont pas harmoniques.

Physiquement, la capacité d'un conducteur (sa capacité relative, s'il est placé dans une enceinte) est la charge que prend ce conducteur porté au potentiel 1 , 0 étant par convention le potentiel de l'infini ou de la frontière.

DÉFINITION 1. - On appelle capacité f d'un compact K , la limite supérieure des masses des mesures portées par K qui créent un potentiel au plus égal à 1 dans tout l'espace, ou dans tout le domaine considéré. Résumons quelques propriétés essentielles dans le :

SCHOLIE 1. - Il existe une distribution positive unique, correspondant à cette limite supérieure : c'est la distribution d'équilibre, de charge la capacité f ; elle crée le potentiel d'équilibre h, égal à 1 sur K, sauf aux points d'un ensemble qu'on peut enfermer dans un compact de capacité arbitrairement petite : h est dit égal à 1 quasi-partout sur K. La capacité est continue à droite (on dit à droite comme on écrit à droite la relation d'inclusion $K \subset O$) : à tout compact K et tout nombre e, on peut faire correspondre un voisinage ouvert O de K tel que :

$$K' \subset O \quad \text{entraîne} \quad F(K') < f(K) + e$$

Si le potentiel d'une mesure de support K est positif quasi-partout sur K, alors la mesure est positive, et son potentiel aussi.

PROPOSITION 1. - La capacité et le potentiel d'équilibre sont des fonctions croissantes de K.

Pour la capacité f, cela résulte de la définition, pour les potentiels h l'on a :

$$h(K \cup K') = 1 \quad \text{quasi-partout sur} \quad K \cup K'$$
$$h(K \cup K') - h(K) \quad \text{positif quasi-partout sur} \quad K \cup K'$$

donc en désignant par μ les distributions d'équilibre, la distribution $\mu(K \cup K') - \mu(K)$, qui a sur son support $K \cup K'$ un potentiel positif quasi-partout, est positive, ce qui démontre :

$$h(K \cup K') - h(K) \quad \text{positif partout.}$$

Afin d'établir pour la capacité f et le potentiel h de nouvelles inégalités, étudions les

2. Différences itérées.

Soit f uhe application d'un semi-groupe abélien S, d'opération notée $\&$, dans un groupe abélien G, noté additivement ; posons :

$$V(X ; A) f = f(X) - f(X \& A)$$

et définissons par récurrence la différence itérée n° :

$$V_{n+1}(X ; A_1 , A_2 , \dots , A_n , A_{n+1})f =$$
$$= V_n(X ; A_1 , \dots , A_n)f - V_n(X\&A_{n+1} ; A_1 , \dots , A_n)f$$

L'on vérifie d'après cette formule de récurrence, que V est une fonction symétrique du groupe des A et de plus :

FORMULE 1. :

$$V_n(X ; A_1, \ldots, A, A_n \& a)f - V(X ; A_1, \ldots, A_n)f = V(X \& A_n ; A_1, \ldots, A, a)f$$

Une fonction pour laquelle les différences itérées sont négatives jusqu'à l'ordre n, est dite alternée d'ordre n : si S est le semi-groupe additif des entiers positifs, f une fonction alternée d'ordre n à valeurs réelles positives, alors les n premières dérivées de f sont alternativement positives et négatives ; une application alternée d'ordre infini est dite analytique : S. BERNSTEIN a démontré que pour l'exemple ci-dessus, f est alors analytique. Si l'on considère le semi-groupe $\mathcal{K}$ des parties compactes d'un domaine Γ muni de l'opération $\cup$, la capacité f et le potentiel d'équilibre h sont des applications dans les groupes respectivement, des réels et des fonctions réelles sur Γ.

PROPOSITION 2. – h est une application analytique ; plus précisément

a. $0 \leqslant V'(X ; A, \ldots, A) \leqslant 1$ où $V' = -V$

V' est nul quasi-partout sur X

b. V est une fonction croissante de X, décroissante des A.

Pour a., procédons par récurrence : si $n = 1$, l'on a la proposition 1, supposons a. vérifié jusqu'à l'ordre n :

$$V'_{n+1}(X ; A_1, \ldots, A_n)h = V'_n(X ; A_1, \ldots, A_n)h - V'(X \cup A_{n+1} ; A_1, \ldots, A_n)h$$

Remarquons que les Vh obtenus en combinant linéairement les potentiels d'équilibre d'ensembles du type $X \cup A_1 \cup A_2 \cup A_i \ldots$ sont les potentiels des combinaisons linéaires correspondantes des mesures d'équilibre de ces ensembles. Les V'_n du second membre sont potentiels de mesures portées par $X \cup (\bigcup_1^{n+1} A_i)$; le premier V'_n est nul quasi-partout sur X, positif sur A_{n+1} ; le second est nul quasi-partout sur $X \cup A_{n+1}$ donc V'_{n+1} est quasi-partout nul sur X et quasi-partout positif sur A_{n+1} ; par raison de symétrie, V' est quasi-partout positif sur le support $X \cup (\cup A_i)$ de la mesure qui l'engendre : d'après le scholie, cette mesure est positive, et V'_{n+1} aussi. De plus V'_{n+1}, inférieur à V'_n, est inférieur à 1.

b. que V_n soit fonction décroissante d'un A_i tel que A_n résulte de la formule 1 ; que V_n soit fonction croissante de X, résulte de la positivité de V'_{n+1}, établie dans a..

COROLLAIRE 1. - La capacité f est une fonctionnelle analytique. En effet, $V'_n(X\ ;\ A_1\ ,\ \ldots\ ,\ A_n)\ f$ est la charge ou masse de la mesure positive engendrant le potentiel positif $V'_n(X\ ;\ A_1\ ,\ \ldots\ ,\ A_n)h$. [1]
Les propriétés $V_1 < 0$, $V_2 < 0$ peuvent s'exprimer dans le

SCHOLIE 2. - La capacité d'un compact est une fonctionnelle positive, croissante nulle pour la partie nulle, continue à droite ; de plus, si k est contenu dans K , la capacité du grand compact s'accroît au plus autant que celle du petit par adjonction d'un même troisième. Du fait que f est alternée d'ordre 2 , l'on peut déduire la

FORMULE 2. - Si les a sont contenus dans les A correspondants,

$$f(\cup A_i) - f(\cup a_i) \leqslant \sum[f(A_i) - f(a_i)] \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

en effet :

$$f(A_1 \cup \ldots \cup A_p \cup a_{p+1} \cup a_n) - f(A_1 \cup \ldots a_p \cup a_{p+1} \cup \ldots a_n) \leqslant f(A_p) - f(a_p)$$

d'où la formule, par addition de n inégalités semblables. Dans le paragraphe qui vient, nous désignerons par capacité une fonctionnelle sur les compacts d'un domaine possédant les propriétés décrites par le scholie 2 .

3. Capacitabilité.

Une construction analogue à celle de la théorie de la mesure permet de définir la capacité intérieure, puis la capacité extérieure.

DÉFINITION 2. - On appelle capacité intérieure f d'un ensemble quelconque A , la limite supérieure des capacités des compacts contenus dans A .

DÉFINITION 3. - On appelle capacité extérieure d'un ensemble A , la limite inférieure des capacités intérieures des ouverts contenant A .

DÉFINITION 4. - Un ensemble est dit capacitable, si sa capacité intérieure et sa capacité extérieure sont égales. Il résulte des définitions que les ouverts sont capacitables ; il résulte de la continuité à droite de f que les compacts sont capacitables. Démontrons le

---

[1]. G. CHOQUET a démontré que les inégalités $0 < V'_n$ étaient, pour les capacités considérées classiquement, les plus restrictives, au sens suivant : soient les A , n compacts ; l'on peut former, à partir des compacts A , par réunion, N compacts. Entre leurs N capacités, les relations $V'_n < 0$ imposent des inégalités qui, dans l'espace à N dimensions, définissent un cône convexe : il est possible de choisir les A pour que le point de coordonnées des N capacités des N compacts que l'on peut former à partir des A , soit sur une demi-droite quelconque intérieure à ce cône.

LEMME 1. – Soient $K \subset O_1 \cup O_2$; K compact, et les O ouverts : alors, on peut déterminer K_1 , K_2 tels que :

$$K_1 \cup K_2 = K \; ; \; K_1 \subset O_1 \; ; \; K_2 \subset O_2$$

D'abord l'on détermine les O' tels que :

$$(K - O_1) \subset O'_2 \subset O_2$$

$$(K - O_2) \subset O'_1 \subset O_1 \; ; \qquad O'_1 \cap O'_2 = \emptyset$$

et il suffit de prendre : $K_i = K - O'_i$

LEMME 2. – Soit $K \subset \bigcup O_i$, où i parcourt un ensemble fini ou dénombrable d'indices, alors on peut déterminer des K_i tels que :

$$\bigcup K_i = K \; ; \qquad K_i \subset O_i$$

L'on détermine d'abord K_1 et K'_2 , tels que :

$$K_1 \subset O_1 \; ; \; K_2 \subset \bigcup_{i \neq 1} O_i \; ; \; K_1 \cup K_2 = K$$

et ensuite les autres K_i , de proche en proche.

La proposition qui suit permet d'étendre à f les inégalités du type $V_n < 0$, où n'intervient qu'une famille finie d'ensembles, et leurs réunions : il suffit de substituer aux ensembles quelconques A_i des compacts convenables K_i , pour que les unions des A , et les unions correspondantes des K diffèrent en capacité aussi peu que l'on veut.

PROPOSITION 3. – Soient a , A , b , B des ensembles vérifiant les relations d'inclusion : $a \subset A$; $B \subset b$, mais à cela près, quelconques : alors

$$f^*(AB) - f^*(a \cup b) < f^*(A) - f^*(a) + f^*(B) - f^*(b)$$

En effet, l'on peut déterminer des voisinages $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ de A , B tels que :

$$f^*(\mathcal{A}) - f^*(A) \; , \; f^*(\mathcal{B}) - f^*(B) \; , \; f^*(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) - f^*(A \cup B) \; ,$$

soient tous trois aussi petits que l'on veut ; on déterminerait de même pour les a , b des α , β assujettis de plus à être respectivement dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, en sorte qu'il suffit de démontrer la proposition en supposant A , B , a , b ouverts. L'on peut déterminer des compacts k , k' contenus respectivement dans a , b et tels que :

$$f^*(a) - f(k) \; , \; f^*(b) - f(k') \; , \; f^*(a \cup b) - f(k \cup k')$$

soient arbitrairement petits : pour cela, l'on détermine d'abord un kk' "provisoire" convenable, que l'on décompose d'après le lemme 1 en deux compacts, contenus l'un dans a, l'autre dans b : si ces compacts ne sont pas assez proches de a et b, on les augmente, et on obtient ainsi les k, k' cherchés. De même on détermine K, K' contenus dans A et B, contenant k et k' et tels que :

$$f^*(A) - f^*(K)\ ,\ f^*(B) - f(K')\ ,\ f^*(A \cup B) - f(K \cup K')$$

soient arbitrairement petits : la proposition résulte alors de son énoncé compact, la formule 2.

COROLLAIRE. - Soient a_i en nombre fini contenus chacun dans un A_i :

$$f^*(\cup A_i) - f^*(\cup a_i) < \sum [f^*(A_i) - f^*(a_i)]$$

PROPOSITION 4. - Soit une suite croissante dénombrable d'ensembles de terme général A_i ; A la réunion, alors :

$$\sup f^*(A_i) = f^*(A)$$

Choisissons d'abord des voisinages O_i des A_i et O de A, tels que, $\mathcal{E}_i$ étant le terme d'une série de somme $\mathcal{E}_i$, l'on ait :

$$f^*(O_i) - f^*(A_i) < \mathcal{E}_i\ ,\ f^*(O) - f^*(A) < \mathcal{E}\ ,\ \bigcup_1^{\infty} O_i = O$$

L'on déterminera d'abord un O provisoire, soit O', puis les O_i comme sous-ensembles de O' et O comme réunion des O_i'. Soit K un compact contenu dans O, tel que :

$$f^*(O) - f(K) < \mathcal{E}$$

le compact K peut être recouvert à l'aide d'un nombre fini de O_i, soit

$$K \subset \bigcup_1^N O_i\ ,\ f(K) < f^*(\bigcup_1^N O_i)$$

Or, d'après la proposition 3 :

$$f^*(\bigcup_1^N O_i) - f^*(\bigcup_1^N A_i) < \sum_1^N (f^*(O_i) - f^*(A_i)) < \sum \mathcal{E}_i < \mathcal{E}$$

d'où enfin :

$$f^*(O) < f^*(A_N) + 2\ \mathcal{E}$$

ce qui établit la proposition.

PROPOSITION 5. - Soit C_i le terme général d'une suite dénombrable décroissante de compacts ; C , l'intersection de tous ces compacts :

$$f(C) = \inf f(C_i)$$

En effet, du fait de la continuité à droite, il existe un voisinage O de C , tel que :

$$C \subset K \subset O \text{ entraîne } f(K) < f(C) + \varepsilon$$

D'autre part, l'intersection des compacts $D_i = C_i - O$, est vide ; donc à partir d'un certain i , C_i est dans O et

$$f(C_i) < f(C) + \varepsilon$$

ce qui établit la proposition.

THÉORÈME 1. - Tout $K_{\sigma\delta}$, intersection dénombrable de réunions dénombrables de compacts, est capacitable.

L'on peut supposer que chaque K^i_σ est réunion croissante de compacts K^i_n . Dans l'intersection $K_{\sigma\delta} = \bigcap_1^\infty K^i$, substituons à K^1 , K^1_n : l'on obtient une suite décroissante d'ensembles :

$$B^1_n = K^1_n \left(\bigcap_{i \neq 1} K^i\right)$$

d'après la proposition 4 , $\sup f^*(B^1_n) = f^*(K_{\sigma\delta})$, l'on peut donc substituer à K^1 , $K^1_{n_1}$ de sorte que la capacité extérieure soit modifiée aussi peu que l'on veut. L'on aura remplacé $K_{\sigma\delta}$ par B^1 tel que :

$$f(K_{\sigma\delta}) - \varepsilon < f(B^1)$$

De même, l'on substituera successivement à chaque K^i un $K^i_{n_i}$ de sorte que si

$$K^1_{n_1} \cap K^2_{n_2} \cap \dots \cap K^i_{n_i} \cap \left(\bigcap_{i+1}^\infty K^i\right) = B^i$$

$$f^*(K_{\sigma\delta}) - \varepsilon < f^*(B^i)$$

Considérons maintenant la suite décroissante de compacts C^i :

$$C^i = K^1_{n_1} \cap \dots \cap K^i_{n_i} \; ; \; \bigcap_1^\infty C^i = C \subset K_{\sigma\delta}$$

d'après la proposition 5 , il existe j tel que :

$$f(C^j) < f(C) + \varepsilon$$

d'autre part :

$$f^*(B^j) < f(C^j) \ , \quad \text{d'où :} \quad f^*(K_{\sigma-\delta}) - \varepsilon < f(C) < f_*(K_{\sigma-\delta}) + \varepsilon$$

ce qui établit le théorème.

G. CHOQUET donne des ensembles non capacitables H, contenus à l'intérieur d'un compact, tel que la sphère S ; il est possible alors de construire deux ensembles capacitables, dont l'intersection soit non-capacitable à l'ensemble formé de H et de S qui lui sert de cage de Faraday est capacitable : sa capacité est celle de S ; si S' est une sphère plus grande que S, $S' \cap (S \cup H) = H$, n'est pas capacitable.

4. Capacité induite sur un produit.

THÉORÈME 2. - Soient E et G deux espaces séparés, f une capacité sur E : soit f' la capacité de la projection sur E d'un compact de EG :

a. f' est une capacité

b. La capacité intérieure f'_* d'un ouvert de EG est égale à la capacité f_* de sa projection sur E

c. La capacité extérieure f^* d'un ensemble, est égale à la capacité extérieure f'' de sa projection

d. L'on n'a pas nécessairement $f'_* = f'_*$ proj , mais la projection de tout ensemble f'-capacitable est f-capacitable et a la même capacité.

a. signifie que f'_* vérifie les mêmes inégalités que f_* et est continue à droite.

b. $f'_*(O) < f_*(\mathrm{pr}\ O)$ est trivial ; montrons $f_*(\mathrm{pr}\ O) < f'_*(O)$; soit K un compact contenu dans $\mathrm{pr}\ O$: il faut le relever suivant un compact contenu dans O. Pour cela associons à tout point x de K, un point (x, y) de O et un voisinage $W(x)$ dont l'intersection $V(x)$ avec K soit compacte (on suppose que dans K tout point a une base fermée de voisinages) et $V(x).y$ soit contenu dans O : alors, il existe un nombre fini de compacts $V(x).y$ dont les projections $V(x)$ recouvrent K : leur réunion est le relevé cherché.

c. est trivial ;

pour d. nous donnerons seulement le contre-exemple : soit $G = E$, mais muni de la topologie discrète ; soit A une partie de la diagonale de EG : tout compact contenu dans A est discret, donc fini ; pour les capacités usuelles, sa capacité sera nulle, pourtant la projection de A peut être une partie quelconque de E.

THÉORÈME 3. – L'image contenue h d'un $K_{\sigma\delta}$ d'un G dans un compact E, est capacitable pour toute capacité f sur E. Il suffit de montrer que le gramme Γ de l'application est capacitable pour f' dans EG ; l'on a :

$$\Gamma = \bar{\Gamma} \cap (E.K_{\sigma\delta})$$

parce que h est une application continue. Or la fermeture $\bar{\Gamma}$ de Γ est compacte, et $E.K_{\sigma\delta}$ est un $K_{\sigma\delta}$: le théorème 3 résulte des théorèmes 1 et 2. Nous pouvons maintenant énoncer le très important corollaire ci-après.

COROLLAIRE. – Tout ensemble analytique, tout ensemble Borélien d'un compact E est capacitable.

En effet, rappelons la définition d'un ensemble analytique : c'est l'image continue d'un espace polonais P, c'est-à-dire métrique, localement compact, contenant une suite dénombrable partout dense a_n. P peut être plongé dans le compact I^N, où I est l'intervalle 0, 1 et N l'ensemble dénombrable que parcourt n : il suffit de supposer la distance < 1, et d'associer à tout point p de P, le point de I^N ayant pour coordonnées les distances pa_n : parce que la suite a_n est partout dense, la correspondance est biunivoque, de plus la projection P^J de P sur I^J, où J est le segment 1, j de N, est un K_σ, comme on le voit en considérant P comme réunion dénombrable de compacts. Or on a

$$P' = \bigcap_J P^J.I^{N-J} = P = \text{ un } K_{\sigma\delta}$$

où J parcourt l'ensemble des segments finis de N du type 1, j et $P^J I^{N-J}$ désigne l'ensemble des points de I^N se projetant sur I^J dans P^J. Pour tout point p' de P', on construira une suite de points p_J ayant même projection que p' sur P^J : parce que a_n est dense, et que P est localement compact, la suite p_J converge vers un point de P, qui n'est autre que a'. Les ensembles analytiques du compact E forment un corps borélien, qui contient en particulier les boréliens usuels. Enfin, les résultats ci-dessus s'appliquent aux mesures, qui sont des capacités particulières.

5. Représentations intégrales.

Pour une représentation alternée particulière d'un semi-groupe S dans un groupe G (S réels positifs, G réels), S. BERNSTEIN a démontré qu'elle était une fonction analytique représentable par :

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-tx} d\mu_t$$

Pour la mesure harmonique, on a d'après Kac : la mesure harmonique associée à un point O d'une partie G d'un domaine de frontière Γ, est la probabilité pour qu'une trajectoire de mouvement brownien issue de O rencontre G avant Γ. On a d'autre part le

THÉORÈME de Krein-Milman. - Dans un espace localement convexe, séparé E, toute partie convexe compacte A est l'enveloppe fermée de l'ensemble de ses points extrémaux.

Tout point de A est limite de barycentres de systèmes de masses portés par l'ensemble des points extrémaux : si l'ensemble des points extrémaux est compact, ces systèmes de masses définissent par passage à la limite une mesure unique, ou une classe de mesures dont le centre de gravité soit un point quelconque de A. Ce théorème s'étend aux cônes à condition de remplacer la définition de points extrémaux : points intérieurs à aucun segment contenu dans A, par : points intérieurs à aucun segment contenu dans C, ne passant pas par le sommet, et considérer l'ensemble compact des éléments extrémaux d'une section plane transverse du cône convexe. Sur le cône des capacités positives alternées, G. CHOQUET démontre :

1° Tout élément extrémal peut être défini ainsi : $f = 0$ sur les complémentaires des parties d'un filtre $\mathcal{F}$; puisque f est continu à droite et si E est compact, le filtre est le filtre des voisinages d'un compact T ; l'on a $f = 1$ pour les parties coupant T, 0 pour les autres.

2° A tout compact T de E correspond un filtre $\mathcal{F}$ et une capacité f_1 qui est extrémale.

3° Pour E compact, l'ensemble des capacités qui prennent leurs valeurs entre 0 et 1 engendre tout l'ensemble puisque toute capacité est bornée ; or cet ensemble, muni de la topologie vague est compact (TIKHONOV) et l'on a (KREIN-MILMAN) :

THÉORÈME 4. - Toute capacité sur E compact admet une représentation :

$$f(X) = \int_{\mathcal{K}} f_T(X)\, d\mu_T$$, où $\mathcal{K}$ désigne l'ensemble des parties compactes de E.

En effet, soit f une capacité alternée d'ordre 2, l'on a :

$$f(a \cup x) - f(a) < f(x)$$

$$[f(a \cup x) - f(a)] + [f(x) + f(a) - f(a \cup x)] = f(x)$$

C'est une décomposition de la capacité f en somme de deux fonctionnelles positives, qui sont aussi des capacités ; si f est extrémale, on a donc :

$$f(a \cup x) - f(a) = \lambda_a f(x) \qquad \lambda_a \leqslant 1$$

si $f(a)$ est nul :

$$f(a \cup x) = \lambda_a f(x) \quad \text{, et comme : } f(x) < f(a \cup x)$$

$$f(a \cup x) = f(x)$$

Si $f(a)$ n'est pas nul l'on montre pour $x = a$ que $\lambda_a = 0$; $f(a \cup x) = f(a)$ il en résulte que si $f(b)$ n'est pas nul : $f(a) = f(b) = f(a \cup b)$ en sorte que f ne prend que deux valeurs, mettons 0 et 1 , d'où 1° .

Réciproquement, f définie par un filtre est bien extrémale : supposons $f = g + h$:

$f(a) = g(a) + h(a)$; $f(b) = g(b) + h(b)$; $f(a \cup b) = g(a \cup b) + h(a \cup b)$

de $g(a) < g(a \cup b)$, $g(b) < g(a \cup b)$ et des inégalités semblables pour h , il résulte que si $f(a) = f(b) = 1$

$$g(a) = g(b) = g(a \cup b) \ ; \quad h(a) = h(b) = h(a \cup b)$$

en sorte que h et g sont constants sur les ensembles pour lesquels $f = 1$; sur les parties où f est nul, g et h positifs , dont la somme est nulle, sont aussi nuls. Et ceci établit que g et h sont proportionnels à f qui est donc indécomposable, extrémal.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (Gustave). - Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier, t. 5, 1953-54, p. 131-137.

[2] CHOQUET (Gustave). - Existence des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 243, 1956, p. 699-702.

[3] CHOQUET (Gustave). - Existence des représentations intégrales dans les cônes convexes, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 243, 1956, p. 736-737.

[4] CHOQUET (Gustave). - Unicité des représentations intégrales au moyen de points extrémaux dans les cônes convexes réticulés, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 243, 1956, p. 555-557.

Un document secret de N. BOURBAKI et une page de H. CARTAN m'ont été précieux.