Jacques Tits

Sous-algèbres des algèbres de Lie semi-simples

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. n° 119, p. 197-214

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__197_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1955)

SOUS-ALGÈBRES DES ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES

par Jacques TITS

[d'après V. MOROZOV, A. MALČEV, E. DYNKIN et F. KARPELEVITCH]

Toutes les algèbres considérées sont de Lie, sur le corps des nombres complexes.

Les auteurs précités ont déterminé :

- toutes les sous-algèbres maximales
- toutes les sous-algèbres semi-simples

des algèbres semi-simples. La description complète de ces sous-algèbres comporte inévitablement des énumérations assez longues, qu'on ne trouvera pas ici. Le but de cet exposé est de donner les énoncés (et éventuellement les démonstrations) de quelques théorèmes généraux obtenus, ainsi que des indications sur les méthodes suivies et les notions utilisées.

I. Sous-algèbres régulières.

1. Définition.

Soit G une algèbre semi-simple. Une sous-algèbre G' de G est dite <u>régulière</u> s'il existe dans G une sous-algèbre de Cartan H telle que G' soit engendrée linéairement par une sous-algèbre H' de H et un certain nombre de vecteurs propres e_α, relatifs à H. Soient Σ l'ensemble des racines de G (définies à partir de H) et Σ' l'ensemble des racines α telles que $e_\alpha \in G'$; H' et Σ' jouissent des propriétés suivantes :

(1.1) Si $\alpha, \beta \in \Sigma'$ et $\alpha + \beta \in \Sigma$, alors $\alpha + \beta \in \Sigma'$;

plus généralement,

(1.1') Si $\alpha_i \in \Sigma'$ et $\alpha = \sum_i \alpha_i \in \Sigma$, alors $\alpha \in \Sigma'$;

(1.2) $\Sigma' \cap (-\Sigma') \subseteq H'$ (rappelons que les racines peuvent être considérées comme des éléments de l'espace vectoriel H, celui-ci étant identifié à son dual par l'intermédiaire de la forme bilinéaire de Killing).

Réciproquement, si une partie Σ' de Σ et une sous-algèbre H' de H satisfont aux conditions (1.1) et (1.2), H' et les e_α $(\alpha \in \Sigma')$ engendrent linéairement une sous-algèbre régulière de G .

G' est semi-simple si et seulement si $\Sigma' = -\Sigma'$, et si H' est engendrée linéairement par Σ' . Si G' est maximale, $H' = H$.

2. Sous-algèbres régulières maximales non semi-simples (MOROZOV [10] , KARPELEVITCH [8]).

Conservons les notations du n° 1 et posons $\Sigma'_- = \Sigma' \cap (-\Sigma')$ et $\Sigma'_+ = \Sigma' \cap \complement\, \Sigma'_-$.

LEMME 2.1. - Si G' est une sous-algèbre régulière maximale non semi-simple de G , $\Sigma' \cup (-\Sigma') = \Sigma$.

Il résulte des hypothèses que $\Sigma' \neq -\Sigma'$, $H' = H$, et Σ' n'est pas contenu dans un autre sous-ensemble propre de Σ satisfaisant à la condition (1.1). Supposons qu'il existe une racine γ n'appartenant ni à Σ' ni à $-\Sigma'$. Les ensembles formés respectivement par toutes les racines de la forme $\sum \alpha_i + k\gamma$ $(\alpha_i \in \Sigma'$, k entier $\geqslant 0)$ et par toutes les racines de la forme $\sum \alpha_i - m\gamma$ $(\alpha_i \in \Sigma'$, m entier $\geqslant 0)$ contiennent strictement Σ' et satisfont à la condition (1.1) ; ils sont donc confondus avec Σ . Soit $\beta \in \Sigma'_+$. On peut écrire $-\beta = \sum \alpha_i + k\gamma = \sum \alpha'_i - m\gamma$ $(\alpha_i , \alpha'_i \in \Sigma'$; k , $m > 0)$, d'où par un calcul immédiat

$$-\beta = m.(\sum \alpha_i) + k.(\sum \alpha'_i) + (k + m - 1)\beta ,$$

et $-\beta$ appartiendrait à Σ' contrairement à l'hypothèse faite. Le lemme est ainsi démontré.

Nous chercherons à présent toutes les sous-algèbres régulières G' telles que $H' = H$ et $\Sigma' \cup (-\Sigma') = \Sigma$.

Les racines appartenant à Σ'_+ ne peuvent satisfaire à une relation non identique de la forme $\sum k_i \alpha_i = 0$, à coefficients k_i rationnels non négatifs, sinon elles satisferaient aussi à une relation du même type mais à coefficients entiers non négatifs, ce qui est impossible en vertu de (1.1') et de la définition de Σ'_+ . On peut donc introduire sur l'espace vectoriel des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des racines de G une relation d'ordre total, compatible avec sa structure d'espace vectoriel, et telle que les racines appartenant à Σ'_+ soient toutes positives ; toutes les racines positives appartiennent alors à Σ' en vertu de l'hypothèse $\Sigma' \cup (-\Sigma') = \Sigma$. Soient Π

le système de racines simples défini à partir de cette relation d'ordre (cf. [3] ou [11]), et $\Pi_{\pm} = \Pi \cap \Sigma'_{\pm}$. En vertu de (1.1'), une racine négative $\alpha = -\sum k_i \alpha_i$ ($k_i > 0$, $\alpha_i \in \Pi$) appartient à Σ' si et seulement si toutes les racines α_i appartiennent à Π_- (pour montrer que la condition est nécessaire, il suffit de remarquer que $-\alpha_p = \alpha + \sum_{i \neq p} k_i \alpha_i + (k_p - 1)\alpha_p$).

Réciproquement, soit Π_- une partie quelconque de Π . L'ensemble $\Sigma(\Pi_-)$, constitué par toutes les racines positives et par les racines négatives de la forme $-\sum k_i \alpha_i$ ($k_i > 0$, $\alpha_i \in \Pi_-$) , satisfait à la condition (1.1) et définit donc, avec $H' = H$, une sous-algèbre $G' = G(\Pi_-)$ de G . On peut montrer, sans grande difficulté, que les algèbres $G(\Pi_-)$ et $G(\Pi'_-)$, correspondant à des parties différentes Π_- et Π'_- d'un même système de racines simples, ne sont jamais conguguées. Tenant compte du fait que tous les systèmes de racines simples d'une algèbre semi-simple sont conjugués entre eux, nous pouvons alors énoncer la proposition suivante :

Π étant un système de racines simples donné, toute sous-algèbre fégulière G' telle que $H' = H$ et $\Sigma' \cup (-\Sigma') = \Sigma$ est conjuguée à une et une seule sous-algèbre de la forme $G(\Pi_-)$, avec $\Pi_- \subset \Pi$.

D'autre part, il est clair que si $\Pi'_- \subset \Pi_-$, $G(\Pi'_-) \subset G(\Pi_-)$, donc

THÉORÈME 2.2. - Toute sous-algèbre régulière maximale non semi-simple est conjuguée à une et une seule sous-algèbre $G(\Pi_\alpha)$, où Π_α s'obtient en retirant une seule racine α de Π . On montre aisément que les sous-algèbres $G(\Pi_\alpha)$ ainsi définies sont effectivement des sous-algèbres maximales de G .

3. Sous-algèbres régulières semi-simples (DYNKIN [6])

Σ_0 étant une partie quelconque de Σ , on désignera par $\Sigma(\Sigma_0)$ l'ensemble des éléments de Σ qui sont combinaisons linéaires à coefficients entiers d'éléments de Σ_0 .

Reprenons les notations du n° 1 et supposons maintenant que G' soit semi-simple. Alors, H' est une sous-algèbre de Cartan de G' et Σ' est le système des racines de G' par rapport à cette sous-algèbre. Soit $\Pi' \subset \Sigma'$ un système de racines simples de G' . En vertu de (1.1'), $\Sigma' = \Sigma(\Pi')$. En particulier, il résulte de la définition des systèmes de racines simples que

(3.1) Si $\alpha, \beta \in \Pi'$, alors $\alpha - \beta \notin \Pi'$.

Réciproquement, si Π' est un ensemble de racines de G linéairement indépendantes et satisfaisant à la condition (3.1), l'espace vectoriel engendré par les éléments de Π' et les vecteurs propres e_α $(\alpha \in \Sigma(\Pi'))$ est une sous-algèbre semi-simple $G^s(\Pi')$ de G, dont Π' est un système de racines simples.

Une partie Π' de Σ sera appelée un P-système si les racines qui la composent sont linéairement indépendantes et si la condition (3.1) est remplie.

THÉORÈME 3.2. - Toute sous-algèbre régulière semi-simple de G est conjuguée à une sous-algèbre $G^s(\Pi')$ correspondant à un P-système Π'. Deux sous-algèbres de ce type $G^s(\Pi'_1)$ et $G^s(\Pi'_2)$ sont conjuguées si et seulement si il existe un élément du groupe de Weyl de G (cf. par exemple [11]) qui applique Π'_1 sur Π'_2.

La première partie de l'énoncé n'est que la conclusion des remarques qui précèdent. La seconde partie est une conséquence immédiate du fait que le groupe de Weyl est le groupe induit sur H par les automorphismes intérieurs de G qui laissent H invariant, et du lemme suivant :

LEMME 3.3. - Etant données dans G deux sous-algèbres de Cartan H_1 et H_2, il existe toujours un automorphisme intérieur de G qui applique H_1 sur H_2 et qui laisse invariants tous les éléments de $H_1 \cap H_2$.

En effet, le normalisateur de $H_1 \cap H_2$ dans G est la somme directe d'une algèbre abélienne A et d'une algèbre semi-simple G'. Il s'ensuit immédiatement que H_i $(i = 1, 2)$, qui est contenu dans ce normalisateur, est la somme directe de A et d'une sous-algèbre de Cartan H'_i de G'. Les sous-algèbres de Cartan H'_1 et H'_2 sont conjuguées par un automorphisme intérieur de G', donc aussi par un automorphisme intérieur de G laissant invariants tous les points de A.

C.Q.F.D.

Nous nous proposons à présent de déterminer tous les P-systèmes contenus dans un système donné Σ de racines de G. Il nous suffira d'ailleurs de rechercher les P-systèmes formés de r racines, r désignant le rang de G. Un raisonnement par induction montre, en effet, que tout P-système est contenu dans un P-système de r racines, et réciproquement, toute partie d'un P-système est évidemment un P-système.

Quelques remarques préliminaires seront nécessaires.

En vertu des propriétés générales des racines, tout ensemble $\Pi' \subset \Sigma$ de racines, linéairement indépendantes ou non, satisfaisant à la condition (3.1), jouit aussi de la propriété suivante :

(3.1') Si $\alpha, \beta \in \Pi'$, $2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$ est un entier ≤ 0.

Nous appellerons, en abrégé, système (3.1'), tout système de vecteurs d'un espace euclidien qui jouit de cette propriété, et nous dirons qu'un tel système est décomposable s'il est la réunion de deux systèmes orthogonaux, non vides.

La recherche de tous les systèmes (3.1') est un problème de géométrie élémentaire, généralisant celui auquel on est conduit dans la classification des algèbres semi-simples. La méthode de Dynkin, basée sur l'emploi de schémas appropriés (cf. [3] ou [11]), s'applique aussi au problème général, et conduit aux résultats suivants :

1° Les systèmes (3.1') indécomposables de vecteurs linéairement indépendants sont uniquement les systèmes de vecteurs semblables (au sens de la géométrie élémentaire) aux systèmes de racines simples des algèbres simples.

2° Etant donné un système (3.1') indécomposable de vecteurs linéairement indépendants, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, il existe une et une seule combinaison linéaire $\alpha = \sum k_i \alpha_i$, à coefficients k_i entiers, telle que le système $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha\}$ satisfasse aussi à la condition (3.1') ; ce dernier système sera nommé l'extension du système des α_i. Lorsque les α_i sont les racines simples d'une algèbre simple G, α est la racine minimum de G par rapport à toute relation d'ordre pour laquelle les α_i sont positifs ; en effet, le système formé par les α_i et par la racine minimum satisfait à la condition (3.1), et est donc un système (3.1').

3° Les seuls systèmes (3.1') indécomposables sont ceux formés de vecteurs linéairement indépendants et leurs extensions. Tout système (3.1') est la réunion de systèmes indécomposables, orthogonaux deux à deux, appelés ses composantes.

Revenons au problème de la détermination des P-systèmes de r racines de G (r = rang de G), et commençons par faire la remarque suivante : si Π est un P-système, il en est de même de l'ensemble Π' obtenu à partir de Π en remplaçant l'une de ses composantes, soit Π_0, par son extension, et en retirant de l'ensemble obtenu une racine quelconque appartenant à Π_0 ; on donnera le nom d'opération élémentaire à l'opération ainsi définie, qui permet de déduire de tout P-système Π, d'autres P-systèmes Π' formés d'un même nombre de racines.

THÉORÈME 3.4. - *Tout P-système de r racines peut être obtenu au moyen d'un nombre fini d'opérations élémentaires à partir d'un système de racines simples de G .*

DÉMONSTRATION. - Soit Π un P-système de r racines. Si $\Sigma(\Pi) = \Sigma$, Π est un système de racines simples de G et le théorème est démontré. Nous procéderons alors par induction en supposant le théorème démontré pour tout P-système Π' tel que $\Sigma(\Pi) \subset \Sigma(\Pi')$ (l'induction est permise car Σ n'a qu'un nombre fini d'éléments). Introduisons dans l'espace des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des racines, une relation d'ordre telle que les éléments de Π soient positifs et désignons par α la plus petite racine de G n'appartenant pas à $\Sigma(\Pi)$. Le système $\Pi \cup \alpha$ satisfait à la condition (3.1') et peut donc (cf. 3°) être décomposé en un P-système Π_1' (éventuellement vide, ou décomposable), et un système indécomposable, orthogonal au précédent, qui est l'extension d'un P-système Π_2' . $\Pi' = \Pi_1' \cup \Pi_2'$ est un P-système, et il résulte de la façon dont il a été défini que Π s'obtient à partir de Π' par une opération élémentaire. D'autre part, on a $\Sigma(\Pi) \subset \Sigma(\Pi')$, l'inclusion stricte ayant lieu car α appartient à Π' et non à $\Sigma(\Pi)$; par conséquent, en vertu de l'hypothèse de récurrence, Π' peut être obtenu à partir d'un système de racines simples de G au moyen d'un nombre fini d'opérations élémentaires, et il en est de même de Π ,

C.Q.F.D.

Ayant déterminé toutes les sous-algèbres semi-simples régulières de G , il nous reste à déterminer parmi elles les sous-algèbres maximales. Des théorèmes 3.2 et 3.4 , on déduit immédiatement le

THÉORÈME 3.5. - *Π étant un système de racines simples donné, de G , toute sous-algèbre régulière maximale semi-simple de G est conjuguée à une sous-algèbre de la forme $G^s(\Pi')$ où Π' est l'un des r P-systèmes obtenus à partir de Π au moyen d'une seule opération élémentaire.*

La réciproque n'est pas vraie. De façon précise, si Π' est obtenu à partir de Π au moyen d'une seule opération élémentaire, et si $G^s(\Pi')$ n'est pas confondue avec G , $G^s(\Pi')$ est une sous-algèbre maximale de G sauf dans les cas suivants : $G \cong F_4$, $G^s(\Pi') \cong A_1 \times A_3$; $G \cong E_7$, $G^s(\Pi') \cong A_1 \times A_3 \times A_3$; $G \cong E_8$, $G^s(\Pi') \cong A_1 \times A_7$ ou $A_1 \times A_2 \times A_5$ ou encore $A_3 \times D_5$; (Ces cas d'exception ne sont pas mentionnés dans [6]).

4. S-sous-algèbres (DYNKIN [6]).

Une S-sous-algèbre d'une algèbre semi-simple G , est une sous-algèbre non contenue dans une sous-algèbre propre régulière de G . Lorsque G est l'algèbre de Lie du groupe linéaire spécial (algèbre des endomorphismes de trace nulle d'un espace vectoriel), les S-sous-algèbres sont les sous-algèbres irréductibles. Les S-sous-algèbres apparaissent donc comme des généralisations des algèbres linéaires irréductibles ; le théorème suivant, démontré dans [6] , généralise un théorème classique de E. Cartan.

THÉORÈME 4.1. - Toute S-sous-algèbre d'une algèbre semi-simple est elle-même semi-simple.

COROLLAIRE 4.2. - Toute sous-algèbre maximale non semi-simple d'une algèbre semi-simple est régulière (MOROZOV [10]).

(En fait, la démonstration du théorème 4.1 donnée dans [6] s'appuie sur le théorème de Morozov).

COROLLAIRE 4.3. (généralisation du lemme de Schur). - Dans une algèbre semi-simple, le seul élément permutable avec tous les éléments d'une S-sous-algèbre donnée quelconque est l'élément nul.

En vertu du corollaire 4.2 , les résultats du n° 2 donnent la solution complète du problème de la détermination des sous-algèbres maximales non semi-simples des algèbres semi-simples.

II. Homomorphismes équivalents et homomorphismes L-équivalents (DYNKIN [6] , MALČEV [9])

5. Définitions, généralités.

Deux homomorphismes f_1 et f_2 d'une algèbre G' dans une algèbre G seront dits équivalents s'il existe un automorphisme intérieur g de G tel que $f_2 = g \circ f_1$; on écrira alors $f_1 \approx f_2$.

Le problème de la classification, à un automorphisme intérieur près, des sous-algèbres semi-simples d'une algèbre semi-simple donnée G , est cas particulier du problème de la classification, à une équivalence près, des homomorphismes des divers types d'algèbres semi-simples existantes, dans G . Ce problème est résolu lorsque $G = A_n$ (représentations linéaires), ce qui suggère une méthode pour obtenir, dans le cas général (G quelconque), des invariants d'un homomorphisme $f : G' \to G$; il suffit pour cela de donner les invariants (par exemple les systèmes de poids dominants) des représentations linéaires $\varphi \circ f$ de G', obtenues en composant f avec les diverses représentations linéaires φ de G. Deux homomorphismes f_1 et f_2 de G' dans G seront dits <u>L-équivalents</u> si tous leurs invariants obtenus de cette façon sont les mêmes, c'est-à-dire si $\varphi \circ f_1 \approx \varphi \circ f_2$, quelle que soit la représentation linéaire φ de G ; on écrira alors $f_1 \overset{L}{\approx} f_2$.

<u>A moins que le contraire ne soit spécifié ou évident, toutes les algèbres et sous-algèbres considérées dans la suite seront supposées semi-simples.</u>

6. Conditions nécessaires et suffisantes de L-équivalence.

LEMME 6.1. - <u>Etant donnés un homomorphisme $f : G' \to G$ et une sous-algèbre de Cartan H' de G', il existe une sous-algèbre de Cartan H de G telle que</u> $f(H') \subseteq H$.

DÉMONSTRATION. - Soit χ la représentation adjointe de G. En appliquant la théorie de Cartan à la représentation $\chi \circ f$ de l'algèbre semi-simple G', on voit que les diviseurs élémentaires de tous les éléments de l'algèbre linéaire $\chi(f(H')) = (\chi \circ f)(H')$ sont simples. Or, d'après un théorème de Gantmacher, tout élément a de G tel que $\chi(a)$ n'ait que des diviseurs élémentaires simples est contenu dans une sous-algèbre de Cartan, et il en est de même, par induction, de toute sous-algèbre abélienne dont tous les éléments jouissent de cette propriété.

C.Q.F.D.

THÉORÈME 6.2. - <u>Deux homomorphismes f_1 et f_2 de G' dans G sont L-équivalents si et seulement si leurs restrictions $f_{1H'}$ et $f_{2H'}$ à une sous-algèbre de Cartan donnée quelconque H' de G' sont équivalentes.</u>

1° <u>La condition est suffisante</u>. - En effet, soit $f_{1H'} \approx f_{2H'}$. En remplaçant éventuellement f_2 par un homomorphisme équivalent, nous pouvons supposer, sans nuire à la généralité, que $f_{1H'} = f_{2H'}$. Soient H une sous-algèbre de Cartan de G contenant $f_1(H') = f_2(H')$, φ une représentation linéaire quelconque de G, et Φ le système des poids de φ définis à partir de H (chaque poids étant compté avec une multiplicité égale au nombre de vecteurs linéairement indépendants qui lui appartiennent). Le système des poids de la représentation $\varphi \circ f_i$, de G', définis à partir de la sous-algèbre H', est l'image de Φ par l'application $f^*_{1H'}$ du dual de H sur le dual de H', induite par $f_{1H'}$. Mais on a $f^*_{1H'} = f^*_{2H'}$. Par conséquent, les représentations $\varphi \circ f_1$ et $\varphi \circ f_2$ ont les mêmes poids (avec les mêmes multiplicités), et sont donc équivalentes.

C.Q.F.D.

2° La condition est nécessaire. - En effet, soient f_1 et f_2 deux homomorphismes quelconques de G' dans G. En remplaçant eventuellement f_2 par un homomorphisme équivalent, nous pouvons supposer, sans nuire à la généralité, que $f_1(H')$ et $f_2(H')$ sont contenues dans une même sous-algèbre de Cartan H de G. Soit $H_r \subset H$ $(H'_r \subset H')$ l'espace des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des racines de G (de G'). Introduisons dans H'_r une relation d'ordre total $>$, et dans H_r deux relations d'ordre total $>_i$ $(i = 1, 2)$, relations compatibles avec les structures d'espaces vectoriels de H'_r et H_r, et choisies de telle façon que pour tout x, $y \in H_r$, l'inégalité $f^*_i(x) > f^*_i(y)$ entraîne l'inégalité $x >_i y$ (les f^*_i sont définis comme au 1° ; pour donner un sens aux relations écrites, il faut identifier H et H' avec leurs duals respectifs par l'intermédiaire des formes bilinéaires de Killing). En remplaçant éventuellement à nouveau f_2 par un homomorphisme équivalent, on peut supposer que les relations $>_1$ et $>_2$ définissent le même système de racines simples de G, soit Π, x et y étant deux éléments quelconques de H_r, on écrira $x \gg y$ si $x - y$ est une combinaison linéaire à coefficients non négatifs de racines simples $\in \Pi$; lorsqu'il en est ainsi, on a aussi $x >_1 y$ et $x >_2 y$.

Soit φ une représentation linéaire quelconque de G. Nous dirons qu'un poids donné λ de φ est spécial (par rapport à Π) si tout autre poids Π' de φ satisfait à l'une des deux relations $\lambda \gg \lambda'$ ou $\lambda' \gg \lambda$.

Lorsqu'il en est ainsi, λ occupe le même rang dans l'ensemble des poids de φ, qu'on ordonne ceux-ci par rapport à $>_1$ ou par rapport à $>_2$; en particulier, si $\varphi \circ f_1 \approx \varphi \circ f_2$, on doit avoir $f^*_{1H'}(\lambda) = f^*_{2H'}(\lambda)$. Pour achever la démonstration, il suffit à présent de remarquer que le poids dominant d'une représentation irréductible est toujours spécial, et de se rappeler que l'ensemble des poids dominants de toutes les représentation irréductibles de G engendre linéairement H ; il en résulte que si $\varphi \circ f_1 \approx \varphi \circ f_2$ quel que soit φ, on a $f^*_{1H'} = f^*_{2H'}$, d'où $f_{1H'} = f_{2H'}$.

C.Q.F.D.

La démonstration précédente montre encore que

Si $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ est une famille de représentations de G telle que :
(6.3) les poids spéciaux (par rapport à un système de racines simples donné quelconque) des φ_i, pris dans leur ensemble, engendrent linéairement H, alors, deux homomorphismes f_1 et f_2 d'une même algèbre G' dans G sont L-équivalentes si et seulement si $\varphi_i \circ f_1 \approx \varphi_i \circ f_2$ pour tout i.

On peut voir que si $G \cong A_n$, B_n, C_n, G_2, F_4 ou E_6, la représentation (ou, pour $G \cong A_n$, F_4 ou E_6, l'une des deux représentations) irréductible non triviale de dimension minimum de G, soit ω, jouit à elle seule de la propriété (6.3), c'est-à-dire que, dans ces cas, la condition $\omega \circ f_1 \approx \omega \circ f_2$ est nécessaire et suffisante pour que f_1 et f_2 soient L-équivalents. Pour les autres algèbres simples, il existe des familles de deux représentations jouissant de la propriété (6.3).

7. Equivalence et L-équivalence.

Deux homomorphismes équivalents f_1 et f_2 d'une même algèbre G' dans une algèbre G sont évidemment toujours L-équivalents. Il peut arriver que la réciproque soit vraie ; c'est le cas notamment

(7.1) lorsque $G = A_n$ (évidemment !), B_n ou C_n ;

(7.2) lorsque G est une algèbre exceptionnelle, $f_1(G')$ étant une S-sous-algèbre de G, exception faite des cas où $G' = A_2$ ou G_2 et $G = E_6$.

Dans le cas (7.1), cela résulte du théorème 7.3 ci-dessous ; dans le cas (7.2), on peut, comme fait DYNKIN, le démontrer par un calcul direct quand on connaît, à une L-équivalence près, toutes les S-sous-algèbres des algèbres exceptionnelles (cf. IV).

THÉORÈME 7.3. - Soient f_1 et f_2 deux homomorphismes d'une algèbre quelconque G', semi-simple ou non, dans une algèbre $G = B_n$, C_n ou D_n, et soit ω la représentation linéaire naturelle (de dimension minimum) de G. Alors, si $\omega \circ f_1 \approx \omega \circ f_2$, il existe un automorphisme γ de G tel que $f_2 = \gamma \circ f_1$.

DÉMONSTRATION. - Soient V un espace vectoriel, $(\, , \,) : V \times V \to C$ une forme bilinéaire symétrique ou antisymétrique non dégénérée, G l'algèbre des endomorphismes s de V tels que $(su, v) + (u, sv) = 0$ $(u, v \in V)$, et ω la représentation identique de G dans l'algèbre de tous les endomorphismes de V. t étant un endomorphisme quelconque de V, on notera t' l'endomorphisme adjoint, défini par $(tu, v) = (u, t'v)$ $(u, v \in V)$. Par hypothèse, il existe un automorphisme a de V tel que $f_2(g) = af_1(g)a^{-1}$ pour tout $g \in G'$. On a, pour tout $s \in f_1(G')$, $s + s' = 0$ et $asa^{-1} + (asa^{-1})' = 0$, d'où $a'as = sa'a$.

L'automorphisme autoadjoint $a'a$ de V possède (au moins) une racine carrée autoadjointe b permutable avec tous les endomorphismes de V qui permutent avec $a'a$, donc en particulier, avec tous les éléments de $f_1(G')$. Posons alors $c = ab^{-1}$ et $\gamma(t) = ctc^{-1}$ pour tout endomorphisme t de V. On a

$$(cu, cv) = (ab^{-1}u, ab^{-1}v) = (b^{-1}a'ab^{-1}u, v) = (u, v) \quad (u, v \in V)$$

et

$$\gamma(f_1(g)) = ab^{-1}f_1(g)ba^{-1} = af_1(g)a^{-1} = f_2(g) \quad (g \in G'),$$

c'est-à-dire que $\gamma(G) = G$ et que $\gamma \circ f_1 = f_2$.

C.Q.F.D.

Signalons encore que deux homomorphismes f_1 et f_2 d'une même algèbre G' dans $G = D_n$ peuvent être L-équivalentes sans être équivalentes. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $f_2 = \gamma \circ f_1$, γ étant un automorphisme extérieur de G, que les composantes irréductibles de la représentation $\omega \circ f_1$ soient toutes de dimension paire, et que 0 figure parmi les poids de cette représentation.

III. Sous-algèbres semi-simples des algèbres classiques (MALČEV [9], DYNKIN [5])

8. Préliminaires.

Deux représentations linéaires f et f' d'une même algèbre G dans des espaces vectoriels V et V' sont dits contragrédientes s'il existe un isomorphisme $\varphi : V' \to V^*$ de V' sur le dual de V, tel qu'on ait, pour tout $g \in G$, $v \in V$ et $v' \in V'$, $\varphi(v')(f(g)v) = \varphi(f'(g)(v'))(v)$.

Une représentation linéaire f de G dans V est dite orthogonale (symplectique) s'il existe une forme bilinéaire symétrique (antisymétrique) non dégénérée $(,) : V \times V \to C$ telle que $(f(g)u, v) + (u, f(g)v) = 0$ pour tout $g \in G$; elle est en outre orthogonalement (symplectiquement) irréductible si elle n'est pas la somme directe de deux représentations orthogonales (symplectiques).

Les propositions suivantes se démontrent sans difficulté.

8.1. - Toute représentation orthogonale ou symplectique est autocontragrédiente. Toute représentation autocontragrédiente irréductible est orthogonale ou symplectique ; elle ne peut être les deux à la fois..

8.2. - La somme directe de deux représentations contragrédientes est orthogonale et symplectique.

8.3. - Toute representation orthogonale (symplectique) orthogonalement (symplectiquement) irréductible, est irréductible, ou est somme directe de deux représentations irréductibles contragrédientes.

8.4. - Soient G_i des algèbres quelconques, en nombre fini, G leur somme directe, f_i une représentation irréductible de G_i et f la représentation de G, produit tensoriel des f_i. f est orthogonale (symplectique) si et seulement si les f_i sont toutes orthogonales ou symplectiques et s'il y a, parmi elles, un nombre pair (impair) de représentations symplectiques.

8.5. - Soient f_i et f'_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ des représentations d'une même algèbre G. Si f_i et f'_i sont contragrédientes pour tout i, il en est de même des représentations $f_1 \quad f_2 \quad \ldots \quad f_n$ et $f'_2 \quad \ldots \quad f'_n$.

9. Représentations orthogonales et symplectiques des algèbres semi-simples.

Le problème envisagé ici (détermination et classification des sous-algèbres semi-simples des algèbres classiques) est résolu pour les algèbres A_n par la théorie des représentations linéaires des algèbres semi-simples (E. CARTAN [2]). Pour les autres algèbres, il se ramène, en vertu des résultats du n° 7, à la recherche de toutes les représentations orthogonales et symplectiques des algèbres semi-simples, ou encore, en tenant compte des propositions 8.1 à 8.5, aux deux problèmes suivants :

(a) A quelle condition deux représentations irréductibles données d'une algèbre simple donnée sont-elles contragrédientes ?

(b) A quelle condition une représentation irréductible donnée d'une algèbre simple donnée est-elle orthogonale ? symplectique ?

Avant de répondre à ces questions, nous ferons quelques rappels.

Soient G une algèbre simple, H une sous-algèbre de Cartan de G, $\Pi \subset H$ un système de racines simples de G et H_r l'espace vectoriel des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des éléments de Π. Toute représentation irréductible φ de G est déterminée, à une équivalence près, par son poids dominant (= poids maximum) $\lambda \in H_r$. Pour qu'un point λ de H_r soit poids dominant d'une représentation irréductible φ de G , il faut et il suffit que les nombres $\lambda_\alpha = 2(\lambda, \alpha)/(\alpha, \alpha)$ $(\alpha \in \Pi)$ soient tous des entiers non négatifs. Les λ_α seront appelés les entiers caractéristiques de φ .

Revenons aux problèmes (a) et (b) posés plus haut.

(a) Si deux représentations données f et f' de G sont contragrédientes, les poids de f' sont les poids de f changés de signe ; en particulier, le poids dominant de f' est le poids minimum de f changé de signe. En utilisant la méthode donnée par E. CARTAN [2] pour déterminer tous les poids d'une représentation irréductible à partir du poids dominant, on arrive alors aux conclusions suivantes :

THÉORÈME 9.1. - Soit G une algèbre simple. Si $G \neq A_n$, D_{2n+1} et E_6 , toutes les représentations irréductibles de G sont autocontragrédientes. Si $G = A_n$, D_{2n+1} ou E_6 , la représentation d'entiers caractéristiques λ_α a pour contragrédiente la représentation d'entiers caractéristiques $\lambda'_\alpha = \lambda_{\sigma(\alpha)}$, où σ désigne la permutation d'ordre 2 des racines simples de G qui conserve le schéma de Dynkin correspondant.

(b) Les vecteurs propres e_α et $e_{-\alpha}$ $(\alpha \in \Pi)$ seront supposés normalisés de telle façon que $(e_\alpha , e_{-\alpha}) = 1$. Soient P l'hyperplan de l'espace affine H_r , déterminé par les $\alpha \in \Pi$, $\bar{\omega} = \sum p_\alpha \alpha$ le pied de la perpendiculaire abaissée de 0 sur P , et H' le sous-espace à une dimension de l'espace vectoriel H qui contient $\bar{\omega}$. Posons $e_{\bar{\omega}} = \sum u_\alpha e_\alpha$ et $e_{-\bar{\omega}} = \sum u_{-\alpha} e_{-\alpha}$, les u étant choisis de telle façon que $u_\alpha u_{-\alpha} = p_\alpha$ (les notations introduites ne peuvent engendrer de confusion car $\bar{\omega}$ n'est pas une racine de G). On a

$$[\bar{\omega} , e_{\pm\bar{\omega}}] = \pm (\bar{\omega}, \bar{\omega}) e_{\pm\bar{\omega}} \quad \text{et} \quad [e_{\bar{\omega}} , e_{-\bar{\omega}}] = (\bar{\omega} , \bar{\omega}) \bar{\omega} ,$$

c'est-à-dire que $\bar{\omega}$, $e_{\bar{\omega}}$ et $e_{-\bar{\omega}}$ engendrent linéairement une algèbre G' , isomorphe à A_1 . Nous désignerons par f l'application identique de G' dans G .

Soit φ une représentation autocontragrédiente de G . Les poids de la représentation $\varphi \circ f$ de G' sont les images des poids de φ par l'application $f^*_{H'}$, définie comme au n° 6 , qui n'est autre que la projection orthogonale de H sur H' . Soient λ le poids dominant de φ et $\lambda' = f^*_{H'}(\lambda) = k(\lambda)\bar{\omega}$, avec $k(\lambda) = (\lambda, \bar{\omega})/(\bar{\omega}, \bar{\omega})$, sa projection sur H' , qui est un poids de $\varphi \circ f$. Tous les poids de φ , à l'exception de λ , sont de la forme

$$\lambda - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \quad (\alpha_i \in \Pi, \quad n > 0) \quad ;$$

par conséquent, tous les poids de $\varphi \circ f$, à l'exception de λ' , sont de la forme $\lambda' - n\bar{\omega}$ $(n > 0)$. Par ailleurs, on sait que, pour tout entier positif d , l'algèbre A_1 possède une et une seule représentation irréductible de dimension d dont les poids, au nombre de d , forment une progression arithmétique dont les termes extrêmes sont égaux et opposés et dont la raison est la racine de A_1 ; cette représentation est orthogonale ou symplectique selon que d est impair ou pair. On voit donc que $\varphi \circ f$ possède une composante irréductible φ_0 de dimension $2k(\lambda) + 1$, toutes ses autres composantes étant de dimension moindre. Si φ est orthogonale, il est de même de $\varphi \circ f$, donc aussi de φ_0 (cf. 8.3), et $k(\lambda)$ est entier ; si, au contraire, φ est symplectique, $k(\lambda)$ est demi-entier.

Il reste à résoudre un problème élémentaire de géométrie analytique : le calcul de $k(\lambda)$ connaissant la configuration euclidienne des racines simples de G et, par exemple, les entiers caractéristiques λ_α de φ . On trouve que $k(\lambda) = \frac{1}{2} \sum k_\alpha \lambda_\alpha$, où les k_α sont des entiers déterminés par le système d'équation

$$(9.2) \qquad 1 = \sum_\alpha k_\alpha (\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha) \quad (\alpha, \beta \in \Pi) .$$

L'hypothèse suivant laquelle G est simple n'ayant pas été utilisée, nous pouvons finalement énoncer le

THÉORÈME 9.3. - Soient G une algèbre semi-simple et Π un système de racines simples de G . Une représentation irréductible d'entiers caractéristiques λ_α $(\alpha \in \Pi)$, de G , est orthogonale (symplectique) si et seulement si elle est autocontragrédiente et si la somme $\sum k_\alpha \lambda_\alpha$ est paire (impaire), les k_α étant les entiers définis par les équations (9.2).

10. Sous-algèbres maximales semi-simples des algèbres classiques.

On représentera par O_n $(= B_{(n-1)/2}$ ou $D_{n/2})$ l'algèbre de Lie du groupe orthogonal à n variables.

Nous nous intéresserons, dans ce numéro, aux représentations linéaires f , d'une algèbre semi-simple G dans un espace vectoriel V , qui jouissent de la propriété suivante :

(10.1) $f(G)$ est une sous-algèbre maximale de l'algèbre de tous les endomorphismes de trace nulle de V ou, éventuellement, de l'algèbre de tous les endomorphismes s satisfaisant à une relation de la forme $(su , v) + (u , sv) = 0$, $(u , v \in V)$, où $(\, , \,)$ est une forme bilinéaire symétrique antisymétrique non dégénérée, donnée dans V.

Les deux propositions suivantes sont faciles à démontrer :

Si une algèbre semi-simple G possède une représentation réductible f jouissant de la propriété (10.1), $G = O_m \times O_n$ $(m , n > 2)$ ou $G = C_m \times C_n$, et f est la somme directe des représentations naturelles des deux facteurs simples de G, ou bien $G = O_n$ $(n > 2)$ et f est la somme directe de la représentation naturelle de G et de la représentation triviale de G dans un espace à 1 dimension.

Si une algèbre semi-simple mais non simple G possède une représentation irréductible f jouissant de la propriété (10.1), $G = A_1 \times A_1 \times A_1$, $A_m \times A_n$ $(m , n \geqslant 1)$, $O_m \times O_n$ $(m , n \geqslant 3$ et $\neq 4)$, $O_m \times C_n$ $(m \geqslant 3$ et $\neq 4$, $n \geqslant 1)$ ou $C_m \times C_n$ $(m , n \geqslant 1)$, et f est le produit tensoriel des représentations naturelles des trois ou des deux facteurs simples de G.

Il reste à déterminer les représentations irréductibles d'algèbres simples jouissant de la propriété (10.1). Pour y arriver, DYNKIN recherche, plus généralement, quelles sont, pour toutes les algèbres simples G et toutes les représentations irréductibles f de G, les sous-algèbres G' de G telles que la restriction de f à G' soit elle-même irréductible. Ses résultats montrent que l'existence de telles sous-algèbres est une circonstance exceptionnelle, et que

Mises à part certaines exceptions (réparties en quatre classes dépendant d'un paramètre entier et 14 (!) cas isolés) toutes les représentations irréductibles d'algèbres simples jouissent de la propriété (10.1).

IV. Sous-algèbres semi-simples des algèbres exceptionnelles.

11. Nous indiquerons encore, dans les grandes lignes, le principe de la méthode imaginée par DYNKIN [6] pour déterminer toutes les sous-algèbres semi-simples des algèbres exceptionnelles. Cette méthode repose essentiellement sur la considération des sous-algèbres tridimensionnelles isomorphes à A_1, que nous

appellerons, pour simplifier, 3-sous-algèbres.

1° Détermination de toutes les 3-sous-algèbres d'une algèbre exceptionnelle donnée G .

Soient G' une 3-sous-algèbre de G , H' une sous-algèbre de Cartan de G' , $\pm\bar{\omega} \in H'$ les racines de G' , H une sous-algèbre de Cartan de G contenant H' et $\Pi \subset H$ un système de racines simples de G choisi de telle façon que $(\alpha, \bar{\omega}) \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in \Pi$.

D'après un théorème de MALČEV [9] , G' est déterminée à un automorphisme intérieur de G conservant $\bar{\omega}$ près, par la donnée de $\bar{\omega}$. Ainsi, la détermination des 3-sous-algèbres de G revient essentiellement à la détermination des vecteurs $\bar{\omega} \in H$ qui sont racines de 3-sous-algèbres. Sans entrer ici dans les détails de cette recherche, nous démontrerons un lemme qui permet de ne considérer qu'un nombre fini de vecteurs $\bar{\omega} \in H$.

LEMME 11.1. - Pour tout $\alpha \in \Pi$, $(\alpha, \bar{\omega})/(\bar{\omega}, \bar{\omega}) = 0$, $\frac{1}{2}$ ou 1 .

DÉMONSTRATION. - Nous savons (cf. n° 9 (b)) que le poids des représentations linéaires de G se projette orthogonalement sur H' suivant des poids de représentations linéaires de G' , c'est-à-dire suivant des multiples entiers ou demi-entiers de $\bar{\omega}$. En particulier, si σ est une racine quelconque de G (c'est-à-dire, par définition, un poids de la représentation adjointe de G) l'expression $2(\sigma, \bar{\omega})/(\bar{\omega}, \bar{\omega})$ est un nombre entier.

Désignons à présent par Π_1 (resp. Π_2) l'ensemble de tous les $\alpha \in \Pi$ tels que $(\alpha, \bar{\omega})/(\bar{\omega}, \bar{\omega}) \leqslant 1$ (resp. > 1). On peut montrer (c'est le résultat d'un calcul élémentaire) que $\bar{\omega}$ est combinaison linéaire des racines de G dont la projection sur H' est $\bar{\omega}$ lui-même ; on doit donc avoir $\bar{\omega} = \sum p_\alpha \alpha$ ($p_\alpha \geqslant 0$, $\alpha \in \Pi_1$) . Mais alors, si $\beta \in \Pi_2$, on a $(\beta, \bar{\omega}) = \sum p_\alpha (\alpha, \beta) \leqslant 0$; or, par hypothèse, $(\beta, \bar{\omega}) \geqslant 0$; par conséquent $(\beta, \bar{\omega}) = 0$, et $\beta \in \Pi_1$, ce qui est absurde. Il en résulte que Π_2 est vide, c'est-à-dire que $\Pi = \Pi_1$, ce qui démontre le lemme.

2° Détermination de tous les homomorphismes d'une algèbre simple donnée G' dans une algèbre exceptionnelle donnée G .

Nous supposerons connues toutes les 3-sous-algèbres de G . Choisissons dans G' une 3-sous-algèbre G'_0 , qui sera fixée une fois pour toute et soit $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ une famille de représentations linéaires de G telle que tout homomorphisme $f : G' \to G$ soit défini, à une L-équivalence près, par la donnée des représentations $\Psi_i = \varphi_i \circ f$ de G' (cf. n° 6). Nous désignerons par d_i la dimension de la représentation φ_i .

$f : G' \to G$ étant un homomorphisme quelconque, la 3-sous-algèbre de G , $G_0 = f(G'_0)$, et les représentations Ψ_i définies plus haut, satisfont aux relations

$$(11.2.i) \qquad (\Psi_i)_{G'_0} = (\varphi_i)_{G_0} \ ,$$

où $(\Psi_i)_{G'_0}$ et $(\varphi_i)_{G_0}$ désignent respectivement les restrictions de Ψ_i et φ_i à G'_0 et à G_0 . Ceci suggère le procédé suivant pour rechercher tous les homomorphismes $f : G' \to G$, à une équivalence près :

On commence par passer en revue toutes les 3-sous-algèbres G_0 de G et toutes les représentations linéaires (réductibles ou non) Ψ_1 de dimension d_1 de G' , afin de déterminer les couples $(G_0 ; \Psi_1)$ qui satisfont à la relation (11.2.1). On recommence ensuite l'opération avec les représentations Ψ_2 de dimension d_2 , en ne considérant plus toutefois que les 3-sous-algèbres G_0 retenues après la première opération. Et ainsi de suite. Ayant déterminé de cette façon toutes les familles $(G_0 ; \Psi_1 , \Psi_2 , \ldots , \Psi_n)$ satisfaisant aux relations (11.2.i), il reste à chercher, pour chacune d'elles, quels sont les homomorphismes $f : G' \to G$ pour lesquels $\varphi_i \circ f = \Psi_i$, ce qui se fait par un calcul direct : on détermine tout d'abord la restriction $f_{H'}$ de f à une sous-algèbre de Cartan H' de G' , problème possédant au plus une solution, à un automorphisme intérieur de G près, en vertu de la dernière proposition du n° 6 ; on cherche ensuite à étendre $f_{H'}$ à l'algèbre G' toute entière, ce qui conduit à la résolution d'un système d'équations.

Dans la pratique, le nombre de cas à considérer est énorme et il est nécessaire de le limiter par l'usage de lemmes judicieux. Ce nombre peut aussi être réduit par un choix convenable de G'_0 et des φ_i . En particulier, DYNKIN prend :

- pour G'_0 la 3-sous-algébre déjà utilisée dans la démonstration du théorème 9.3 (cf. n° 9 (b)) ;
- pour φ_1 , la représentation adjointe de G . Dans ce cas, Ψ_1 a une composante irréductible équivalente à la représentation adjointe de G' (si f n'est pas trivial) ; en outre, si $f(G')$ est une S-sous-algèbre de G (et on peut de borner à considérer ce cas-là puisque les sous-algèbres régulières sont déjà connues (cf. I) Ψ_1 ne contient pas de composante irréductible triviale en vertu

du corollaire 4.3.

3° Détermination des sous-algèbres semi-simples d'une algèbre exceptionnelle donnée G .

Elle est basée sur la remarque banale suivante : toute sous-algèbre (resp. S-sous-algèbre) maximale semi-simple de G est un idéal du normalisateur d'une sous-algèbre (resp. d'une S-sous-algèbre) simple de G .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (A.) et de SIEBENTHAL (J.). - Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos, Comment. Math. Helvet., t. 23, 1949/50, p. 200-221.

[2] CARTAN (Elie). - Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, Bull. Soc. math. France, t. 41, 1913, p. 55-96 ; et Oeuvres complètes, t. 1, part. 1, p. 355-398. - Paris, Gauthier-Villars, 1952.

[3] DYNKIN (E.B.). - La structure des algèbres de Lie semi-simples [en russe] , Uspekhi Mat. Nauk, t. 2, 1947, p. 59-127 ; et Amer. math. Soc., Trans. n° 17.

[4] DYNKIN (E.B.). - Quelques propriétés de systèmes de poids de représentations linéaires des groupes de Lie semi-simples [en russe] , Doklady Akad. Nauk SSSR, N.S., t. 71, 1950, p. 221-224.

[5] DYNKIN (E.B.). - Sous-groupes maximaux des groupes classiques [en russe] , Trudy Moskov Mat. Obšč., t. 1, 1952, p. 39-166 ; et Amer. math. Soc. Transl., Series 2, t. 6, 1957, p. 111-244.

[6] DYNKIN (E.B.). - Sous-algèbres semi-simples des algèbres de Lie semi-simples [en russe] , Mat. Sbornik, N.S., t. 30 (72), 1952, p. 349-462 ; et Amer. math. Soc. Transl., Series 2, t. 6, p. 245-378.

[7] GANTMACHER (F.). - Canonical representation of automorphisms of a complex semisimple Lie group, Mat. Sbornik, N.S., t. 5 (47), 1939, p. 101-146.

[8] KARPELEVITCH (F.I.). - Sur les sous-algèbres maximales non semi-simples des algèbres de Lie semi-simples [en russe] , Doklady Akad. Nauk SSSR, N.S., t. 76, 1951, p. 775-778.

[9] MALČEV (A.I.). - Sur les sous-groupes semi-simples des groupes de Lie [en russe] , Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., t. 8, 1944, p. 143-174 ; et Amer. math. Soc., Transl. n° 33.

[10] MOROZOV (V.V.). - Sur les sous-groupes maximaux non semi-simples des groupes simples, Dissertation Univ. Kazan, 1943.

[11] - Séminaire Sophus Lie : Théorie des algèbres de Lie, Topologie des groupes de Lie, t. 1, 1954/55.

[12] de SIEBENTHAL (J.). - Sur certains sous-groupes de rang 1 des groupes de Lie clos, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 230, 1950, p. 910-912.

[13] de SIEBENTHAL (J.). - Sur les sous-groupes fermés connexes d'un groupe de Lie clos, Comment. Math. Helvet., t. 25, 1951, p. 210-256.

Le présent exposé est essentiellement fondé sur [5] , [6] , [8] et [9] . Certains résultats sont obtenus par d'autres méthodes dans [1] , [12] et [13] .