PIERRE CARTIER

Effacement dans la cohomologie des algèbres de Lie

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. n° 116, p. 161-167

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__161_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1955)

EFFACEMENT DANS LA COHOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE LIE

par Pierre CARTIER.

INTRODUCTION. - Le résultat principal des travaux exposés ici est le théorème 6 qui généralise un résultat antérieur de IWASAWA disant que toute extension d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ par un idéal abélien, peut être rendue inessentielle en augmentant l'idéal abélien, la dimension restant finie. Le théorème 6 a été trouvé indépendamment par HOCHSCHILD et KOSZUL (cf. [2] et [5]) par des méthodes absolument différentes mais s'appuyant toutes deux sur les résultats de HOCHSCHILD et SERRE [3] concernant la suite spectrale des extensions d'algèbres de Lie. La méthode que je vais exposer est une troisième méthode qui n'utilise pas la suite spectrale et qui conduit aussi au théorème d'Ado.

1. Algèbres de Lie graduées.

La notion usuelle d'algèbre de Lie se laisse généraliser comme suit en notion d'algèbre de Lie graduée.

Une telle algèbre A est une algèbre non associative sur l'anneau commutatif K dont le produit se désigne par $[a,b]$, graduée par des sous-espaces A_p avec $[A_p, A_q] \subset A_{p+q}$ et qui vérifie les identités génériques suivantes :

1) $[b,a] = (-1)^{\alpha\beta+1}[a,b]$

2) $(-1)^{\alpha\gamma}[a,[b,c]] + (-1)^{\beta\alpha}[b,[c,a]] + (-1)^{\gamma\beta}[c,[a,b]] = 0$

("Jacobi") (α est le degré de l'élément homogène a, i.e. $a \in A_\alpha$, etc.)

REMARQUE. - Une telle algèbre n'est pas en général une algèbre de Lie au sens usuel, par exemple, le carré d'un élément de degré impair peut être $\neq 0$.

EXEMPLES. - Algèbre de Lie au sens usuel, tous les degrés étant nuls ; A algèbre associative graduée et $[a,b] = ab + (-1)^{\alpha\beta+1} ba$; $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie usuelle, B algèbre associative graduée anticommutative, $A = B \otimes \mathfrak{g}$ avec $[b \otimes g , b' \otimes g'] = bb' \otimes [g,g']$; par exemple B sera l'algèbre des formes différentielles sur une variété, exemple important dans la théorie des connexions ; produit de Whitehead en homotopie.

On se ramène dans tous les cas au deuxième exemple en définissant l'algèbre enveloppante universelle de A comme l'algèbre $U(A)$ quotient de l'algèbre tensorielle du module A par l'idéal bilatère engendré par les éléments $ab + (-1)^{\alpha\beta+1} ba - [a,b]$. Comme A est plongée dans son algèbre tensorielle, on en déduit une application θ de A dans $U(A)$; si K est un corps (1), θ est biunivoque en vertu d'un théorème analogue au théorème de Birkhoff-Witt. Nous donnons ici une variante du théorème de Birkhoff-Witt suffisante pour nos besoins et plus facile à démontrer.

THÉORÈME 1. - *Soit* A *une algèbre de Lie graduée somme d'une famille* $A_1, \ldots, A_n$ *de sous-algèbres avec* $A_i \cap A_j = (0)$ *pour* $i \neq j$ (*mais* $[A_i, A_j] \neq (0)$ *en général*) ; *soit* f_i *l'homomorphisme canonique de* $U(A_i)$ *dans* $U(A)$ *prolongeant l'injection de* A_i *dans* A. *Alors l'application* $\psi : u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \longrightarrow f_1(u_1) \ldots f_n(u_n)$ *est une bijection de* $U(A_1) \otimes \ldots \otimes U(A_n)$ *sur* $U(A)$; *en particulier* $U(A_i)$ *s'identifie à une sous-algèbre de* $U(A)$.

On identifiera d'habitude les espaces en question par ψ.

Le théorème 1 se démontre en construisant une représentation linéaire de $U(A)$ dans $U(A_1) \otimes \ldots \otimes U(A_n)$ telle que ψ soit un $U(A)$-homomorphisme dans le $U(A)$-module à gauche $U(A)$.

On dira généralement A-module pour $U(A)$-module. Toute dérivation gauche de A (i.e. soit dérivation, soit antidérivation selon la parité des degrés) se prolonge de manière unique en une dérivation gauche de $U(A)$. Enfin soit $U^*(A)$ le dual du module $U(A)$; l'application diagonale $a \to (a,a)$ de A dans $A \times A$ se prolonge en un homomorphisme de $U(A)$ dans $U(A) \otimes U(A)$ d'où, par dualité, une application bilinéaire de $U^*(A) \times U^*(A)$ dans $U^*(A)$ qui transforme $U^*(A)$ en une algèbre associative graduée anticommutative. Cette algèbre admet pour unité la forme linéaire ε définie comme le seul homomorphisme non nul de $U(A)$ sur K qui s'annule sur $\theta(A)$.

Finissons ce paragraphe en traitant des A-modules nilpotents, i.e. tels que pour un entier n assez grand, on ait $A^n . M = (0)$.

LEMME 1. - *Soient* A *une algèbre de Lie graduée*, I *un idéal et* S *une sous-algèbre tels que* $A = I + S$, $I \cap S = (0)$. *On suppose que le* A-*module* M, *de dimension finie sur le* corps *de base* K, *est nilpotent considéré comme* S-*module et comme* I-*module, par restriction des opérateurs. Alors* M *est un* A-*module nilpotent.*

(1) de caractérisitque différente de 2 et 3.

($(0) = M_r \subset M_{r-1} \ldots \subset M_0 = M$ suite de Jordan-Hölder du A-module M . Alors $N_i = M_i/M_{i+1}$ est A-simple, mais $I.N_i$ est sous-A-module et $I^n N_i = (0)$ donc $I.N_i = (0)$ et N_i est S-module simple ; mais $S^m N_i = (0)$ d'où $S.N_i = (0)$ puis $A.M_i \subset M_{i+1}$, donc $A^r.M = (0)$, C.Q.F.D.).

Par la même démonstration, on voit que si M est un A-module, nilpotent pour un idéal I , I est dans le radical de l'algèbre associative d'opérateurs de M engendrée par A .

2. Cohomologie des algèbres de Lie.

On suppose pour simplifier que K est un corps de caractéristique $\neq 2$. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur K , $U = U(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante et C un U-module libre gradué par des sous-U-modules C_p et muni d'une différentielle d de carré nul abaissant les degrés de 1 unité et commutant aux opérateurs de U . On suppose de plus C acyclique [2]. On peut alors, pour tout $\mathfrak{g}$-module M , définir le groupe $C^p(\mathfrak{g},M)$ comme le groupe des $\mathfrak{g}$-homomorphismes de C_p dans M et munir par transposition $C^*(\mathfrak{g},M) = \sum_{p \geq 0} C^p(\mathfrak{g},M)$ d'une différentielle δ ; le groupe d'homologie de $C^*(\mathfrak{g},M)$ pour δ ne dépend pas à un isomorphisme près du choix de C et s'appelle le groupe de cohomologie $H(\mathfrak{g},M)$ de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M ([1], chap. 13).

Nous allons construire un complexe C particulier qui redonne la définition usuelle de la cohomologie de $\mathfrak{g}$. Soit A une algèbre associative graduée ayant pour base $\{1,s\}$ avec $1 \in A_0$, $s \in A_1$, $1.s = s.1 = s$, $s^2 = 0$; on définit une antidérivation de degré -1 par $d.1 = 0$, $d.s = 1$. On forme ensuite l'algèbre de Lie graduée $\tilde{\mathfrak{g}} = A \otimes \mathfrak{g}$ qu'on munit de l'antidérivation $d \otimes I$. On prend alors pour $C(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\tilde{\mathfrak{g}}$ à laquelle on prolonge d de manière canonique. Faisant usage de la décomposition $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + (s \otimes \mathfrak{g})$ en somme directe et du théorème 1 , on montre $C(\mathfrak{g}) \simeq U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda(\mathfrak{g})$ car $s \otimes \mathfrak{g}$ est de carré nul et son algèbre enveloppante s'identifie donc à l'algèbre extérieure $\Lambda(\mathfrak{g})$. On en déduit alors facilement que toute K-base de $\Lambda^p(\mathfrak{g})$ est une $U(\mathfrak{g})$-base de $C^p(\mathfrak{g})$ (N.B.- $U(\mathfrak{g})$ est une sous-algèbre de $C(\mathfrak{g})$ donc $C(\mathfrak{g})$ est un module sur $U(\mathfrak{g})$ à gauche de manière évidente).

Reste à montrer que $C(\mathfrak{g})$ est acyclique : pour cela, on considère une base $\{e_i\}$ de $\mathfrak{g}$ et la décomposition $\tilde{\mathfrak{g}} = \sum \tilde{\mathfrak{g}}_i$, $\tilde{\mathfrak{g}}_i$ étant la sous-algèbre de

---

(2) c'est-à-dire $C_p = (0)$ pour $p < 0$, le noyau de d dans C_0 est de dimension 1 sur K et annulé par $\mathfrak{g}$, le noyau de d dans C_{p+1} est égal à $d(C_p)$ pour $p \geq 0$.

$\tilde{\mathfrak{g}}$ de base e_i et $s \otimes e_i$. Faisant encore une fois usage du théorème 1, on voit que $C(\mathfrak{g}) \simeq \bigotimes_{i=1}^{n} C(\mathfrak{g}_i)$; or $C(\mathfrak{g}_i)$ a pour base $u_n = e_i^n$, $v_n = u_n \cdot (s \otimes e_i)$ et l'on a $du_n = 0$, $dv_n = u_{n+1}$, donc u_o est le seul cocycle non cohomologue à 0 et $C(\mathfrak{g}_i)$ est acyclique. On passe de là au cas de $C(\mathfrak{g})$ par le théorème de Künneth.

Utilisant l'isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules $C(\mathfrak{g}) \simeq U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda(\mathfrak{g})$, on peut alors identifier $C^p(\mathfrak{g}, M)$ à l'espace des applications p-linéaires alternées de $\mathfrak{g}$ dans M, et un calcul facile montre alors l'identité de δ et de l'opérateur différentiel usuel.

Si K est le corps des nombres réels et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G, on peut définir un isomorphisme d'algèbres différentielles de $C(\mathfrak{g})$ sur l'algèbre (pour le produit de composition) des courants de G nuls dans le complémentaire de l'élément neutre e, par les formules $\langle X, f \rangle = (\theta(X)f)(e)$ $\langle s \otimes X, \omega \rangle = (i(X)\omega)(e)$ (f fonction de classe C^∞ et ω forme différentielle de degré 1 de classe C^∞). Le dual de $C(\mathfrak{g})$ s'identifie alors à l'algèbre des formes différentielles extérieures de classe C^∞ modulo celles qui ont toutes leurs dérivées nulles en e. Cet isomorphisme est aussi un isomorphisme d'algèbres si l'on munit $C^*(\mathfrak{g}) = U^*(\tilde{\mathfrak{g}})$ du produit introduit ci-dessus.

3. Le lemme fondamental.

On utilisera d'abord le lemme suivant dont la démonstration est élémentaire.

LEMME 2. - Soient U une algèbre associative à un nombre fini de générateurs, I et J deux idéaux bilatères de U de codimension finie. Alors I est un idéal bilatère de type fini et IJ est de codimension finie.

La situation sera dans ce paragraphe la suivante : A algèbre de Lie graduée, N idéal de A, U algèbre enveloppante de A (elle est de dimension infinie en général). Si M est un A-module, M_n désignera la réunion des sous-A-modules de M, nilpotents pour N et de rang fini sur le corps K ; les éléments de M_n, qui est un A-module, seront appelés les éléments de caractère nilpotent (pour N) de M. Ceci s'applique au cas de U^* (dual de U) muni de la représentation linéaire de A transposée de la représentation régulière. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $h \in U_n^*$ pour la représentation régulière transposée gauche (resp. droite, ou bilatère).

2) h est nulle sur un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) de U de codimension finie qui contient une certaine puissance N^s de N.

3) $h(u) = u_{ij}$ où $u \to \| u_{ij} \|$ est une représentation matricielle de A nilpotente pour N.

On démontre que les opérateurs de U^* associés aux éléments de A sont des dérivations gauches, ce dont il découle que U^*_n est une sous-algèbre de U^*.

THÉORÈME 2. - Soit $A = S + I$ comme au lemme 1 ; on suppose que $N \supset [I,S]$, que $N = (N \cap S) + (N \cap I)$ et que N est une algèbre nilpotente (i.e. il existe $p > 0$ tel que le crochet de p éléments de N soit nul). Alors U^*_n est isomorphe au produit tensoriel de l'algèbre des formes linéaires sur $U(S)$ de caractère nilpotent pour $N \cap S$ et de l'algèbre analogue pour I et l'idéal $N \cap I$.

On sait que $U(A) \simeq U(S) \otimes U(I)$ (théorème 1), d'où $U^*(S) \otimes U^*(I) \subset U^*(A)$. Or si $u \to \| h_{ij}(u) \|$ est une représentation matricielle de U, on a $h_{ij}(u_1 u_2) = \sum_k h_{ik}(u_1)\, h_{kj}(u_2)$ pour $u_1 \in U(S)$ et $u_2 \in U(I)$, d'où facilement $h_{ij} = \sum_k h_{ik} \otimes h_{kj}$ et l'inclusion $U^*_n(A) \subset U^*_n(S) \otimes U^*_n(I)$.

Par ailleurs si on prolonge une représentation matricielle de S par 0 sur l'idéal I, on obtient une représentation matricielle de A, et on a $h_{ij}(u_1 u_2) = h_{ij}(u_1)\, \varepsilon(u_2)$ avec les mêmes notations que plus haut, d'où l'inclusion $U^*_n(S) \otimes \varepsilon \subset U^*_n(A)$. Comme $U^*_n(A)$ est une sous-algèbre de U^*, de l'inclusion $\varepsilon \otimes U^*_n(I) \subset U^*_n(A)$ résultera $U^*_n(S) \otimes U^*_n(I) \subset U^*_n(A)$ d'où le théorème.

Soient h une forme linéaire sur $U(I)$ nulle sur l'idéal bilatère C de codimension finie, R/C le radical de l'algèbre associative $U(I)/C$. Comme le radical est un idéal nilpotent, on a $R^s \subset C$ pour s assez grand, et (lemme 2) R^s est de codimension finie. Donc $\varepsilon \otimes h$ est nulle sur les idéaux $U^+(S) \otimes U(I)$ et $U(S) \otimes C$ et par suite sur $D = U^+(S) \otimes U(I) + K \otimes R^s$ (3). Comme $U^+(S) \otimes U(I)$ est égal à $SU(A)$, c'est un idéal à droite de $U(A)$: $U(A)$ est somme directe de $SU(A)$ et $U(I)$, et l'on peut identifier $U(A)/SU(A)$ à $U(I)$ et $V = U(A)/D$ à $U(I)/R^s$ (qui est de dimension finie). La représentation linéaire droite de A dans $U(I)$ obtenue par identification de $U(I)$ avec $U(A)/SU(A)$ s'obtient ainsi : $u * i = ui$ si $i \in I$, et $u * s = \pm D_s u$, D_s étant la dérivation gauche de $U(I)$ prolongeant $i \to [s,i]$ ($s \in S$ homogène). Du fait que $h \in U^*_n(I)$ on déduit par la remarque suivant le lemme 1 que $[S,I] \subset N \subset I \subset R$ donc D_s envoie $U(I)$ dans R donc a fortiori laisse R stable ainsi que R^s. De là résulte évidem-

(3) $U^+(S)$ est le noyau de $\varepsilon : U(S) \to K$.

ment que D est un idéal à droite de codimension finie de $U(A)$ et que $\varepsilon \otimes h$ est nulle sur D.

V est une algèbre dont les D_s sont des dérivations gauches, donc (par Leibniz) les éléments de V annulés par une puissance de $D_{N \cap S}$ forment une sous-algèbre qui contient évidemment 1 et aussi I parce que $D_{N \cap S} I \subset N$ et que N est une algèbre de Lie graduée nilpotente. Il en résulte, comme $U(I)$ est engendrée par I, que V est un module nilpotent pour $N \cap S$; mais il est aussi nilpotent pour $N \cap I$ car $U(I)(N \cap I)^s \subset R^s$, donc (lemme 1) V est un module nilpotent pour N, cę qui implique que D contient une puissance convenable de N et montre que $\varepsilon \otimes h \in U_n^*(A)$ par la caractérisation 2) de U_n^*. C.Q.F.D.

4. Effacement dans la cohomologie.

Soit M un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie sur K, et N un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie contenant M. L'application identique de M dans N détermine pour tout p un homomorphisme f_p^N de $H^p(\mathfrak{g},M)$ dans $H^p(\mathfrak{g},N)$. Une classe de cohomologie $c \in H^p(\mathfrak{g},M)$ sera dite effaçable, s'il existe un module N de dimension finie sur K tel que $f_p^N(c) = 0$.

$C^p(\mathfrak{g},M)$ est l'ensemble des $U(\mathfrak{g})$-homomorphismes de C_p dans M donc se plonge dans l'ensemble $D^p(\mathfrak{g},M)$ des applications linéaires quelconques de C_p dans M ; $D^p(\mathfrak{g},M)$ est isomorphe à $C_p(\mathfrak{g})^* \otimes M$ donc c'est un $\mathfrak{g}$-module et on peut montrer que si M est nilpotent pour un idéal $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$, l'image de $C^p(\mathfrak{g},M)$ dans $D^p(\mathfrak{g},M)$ se compose d'éléments de caractère nilpotent pour $\mathfrak{n}$. $D^p(\mathfrak{g},M)_n$ étant muni par transposition d'une différentielle qui induit la différentielle de $C^*(\mathfrak{g},M)$, on en déduit un homomorphisme ψ de $H(\mathfrak{g},M)$ dans l'homologie de $D(\mathfrak{g},M)_n \simeq C^*(\mathfrak{g})_n \otimes M$. On a alors le théorème suivant (cf. théorème 2 de [5]).

THÉORÈME 3.- Les classes de cohomologie qui sont effaçables par un module nilpotent pour $\mathfrak{n}$, sont les classes annulées par ψ.

Pour déterminer les classes de cohomologie effaçables, on est donc ramené à déterminer la cohomologie de $C^*(\mathfrak{g})_n$; ceci se fait par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$, en utilisant les théorèmes de structure des algèbres de Lie, le théorème 2 (comme procédé de récurrence) et les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 4. - Si $\mathfrak{g}$ est de dimension 1, $C^*(\mathfrak{g})_n$ est acyclique (théorème 4 de [5]).

THÉORÈME 5. - Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple et $\mathfrak{n} = 0$, Ψ est une bijection de $H(\mathfrak{g}, K)$ sur l'homologie de $'C^*(\mathfrak{g})_n$.

Ce dernier théorème est une conséquence facile de la complète réductibilité des représentations linéaires de dimension finie de $\mathfrak{g}$.

Finalement, nous obtenons le résultat principal que nous avions en vue :

THÉORÈME 6. - Pour qu'une classe de cohomologie de degré p soit effaçable, il faut et il suffit qu'elle soit annulée par l'opération de restriction $H^p(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow H^p(\mathfrak{p}, M)$ pour une sous-algèbre semi-simple maximale de (Théorème 1 de [2]).

COROLLAIRE. - Toute classe de cohomologie de degré 1 ou 2 est effaçable.

En effet, si $\mathfrak{g}$ est semi-simple $H^1(\mathfrak{g}, M) = H^2(\mathfrak{g}, M) = 0$.

Le cas $p = 1$ est d'ailleurs trivial, tandis que le cas $p = 2$ est le théorème d'Iwasawa.

HOCHSCHILD a déduit de là des résultats sur la finitude de la dimension des "kernel" qu'il a introduit dans l'interprétation du 3e groupe de cohomologie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series n° 19).

[2] HOCHSCHILD (G.). - Cohomology classes of finite type and finite dimensional kernels for Lie algebras, Amer. J. Math., t. 76, 1954, p. 763-778.

[3] HOCHSCHILD (G.) and SERRE (J.-P.). - Cohomology of Lie algebras, Ann. of Math., t. 57, 1952, p. 591-603.

[4] IWASAWA (Kenkichi). - On the representation of Lie algebras, Japan. J. Math., t. 19, 1948, p. 405-426.

[5] KOSZUL (J.-L.). - Sur les modules de représentation des algèbres de Lie résolubles, Amer. J. Math., t. 76, 1954, p. 535-554.

[Juillet 1957]