HENRI CARTAN

Sur un mémoire inédit de H. Grauert : « Zur Theorie der analytisch vollständigen Räume »

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. n° 115, p. 149-159

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__149_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1955)

SUR UN MÉMOIRE INÉDIT DE H. GRAUERT: ZUR THEORIE DER ANALYTISCH VOLLSTÄNDIGEN RÄUME ([1])

par Henri CARTAN

Ce mémoire apporte des compléments intéressants à la théorie des variétés de Stein et à celle des "domaines étalés" dans C^n. L'auteur se place dans le cadre général des espaces analytiques, c'est-à-dire des variétés analytiques-complexes pouvant admettre des singularités algébroïdes "internes". Avant d'énoncer les deux principaux théorèmes de Grauert, il est bon de préciser quelques notions.

1. Espaces analytiques.

Dans un ouvert U de l'espace numérique complexe C^n, un sous-ensemble $V \subset U$ est un sous-ensemble analytique s'il est fermé dans U et si, au voisinage de chaque point $x \in V$, V est défini par l'annulation de fonctions holomorphes en x. Soit $\mathcal{H}_x(U)$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes au point x (dans l'espace ambiant) ; pour $x \in V$, soit $\mathcal{H}_x(V)$ l'anneau-quotient $\mathcal{H}_x(U)/\mathcal{J}_x(V)$, $\mathcal{J}_x(V)$ désignant l'idéal des germes identiquement nuls sur V (au voisinage de x). L'anneau $\mathcal{H}_x(V)$ s'identifie à l'anneau des germes de fonctions sur V, induits par les germes holomorphes de l'espace ambiant au moint x. $\mathcal{H}_x(V)$ est un anneau local. Pour que V soit irréductible au point x, il faut et il suffit que $\mathcal{H}_x(V)$ soit un anneau d'intégrité. Dans tous les cas, $\mathcal{H}_x(V)$ est noethérien, et la collection des $\mathcal{H}_x(V)$, pour $x \in V$, forme un faisceau d'anneaux sur V, sous-faisceau du faisceau des germes de fonctions continues (complexes).

D'une manière générale, appelons espace annelé un espace topologique muni de la donnée d'un sous-faisceau $\mathcal{O}$ du faisceau des germes de fonctions continues (complexes). Tout ouvert d'un espace annelé est un espace annelé (avec le faisceau induit). Si V est un sous-ensemble analytique d'un ouvert $U \subset C^n$, la structure annelée de V sera toujours définie par le faisceau des $\mathcal{H}_x(V)$.

Un isomorphisme d'un espace annelé $(X, \mathcal{O}(X))$ sur un espace annelé $(X', \mathcal{O}(X'))$ est un homéomorphisme $f : X \to X'$ tel que, pour tout $x \in X$, l'application $\varphi \to \varphi \circ f$ soit un isomorphisme de l'anneau $\mathcal{O}_{f(x)}(X')$ sur l'anneau $\mathcal{O}_x(X)$. Plus généralement, une application continue $f : X \to X'$ sera appelée homomorphisme si $\varphi \to \varphi \circ f$ applique $\mathcal{O}_{f(x)}(X')$ dans $\mathcal{O}_x(X)$.

([1]) Le mémoire de GRAUERT a paru ensuite sous un titre un peu différent [6].

DÉFINITION. - On appelle espace analytique un espace annelé $(X, \mathcal{O})$ tel que :

1) la topologie de X soit séparée ;

2) chaque point de X appartienne à un ouvert W qui, comme espace annelé, soit isomorphe à un sous-ensemble analytique d'un ouvert d'un espace C^n. (Ce sous-ensemble analytique est, en quelque sorte, une "carte locale" de W). Pour $x \in X$, les éléments de $\mathcal{O}_x$ s'appellent les germes holomorphes au point x ; les sections du faisceau $\mathcal{O}$ s'appellent les fonctions holomorphes dans X.

Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace analytique ; il est dit irréductible au point $x \in X$ si $\mathcal{O}_x$ est un anneau d'intégrité ; il est dit normal au point x si $\mathcal{O}_x$ est un anneau d'intégrité intégralement clos ; le point $x \in X$ est dit régulier, ou simple, si x possède un voisinage ouvert U isomorphe à un ouvert d'un C^k (pour cela, il faut et il suffit que l'anneau $\mathcal{O}_x$ soit isomorphe à l'anneau des séries convergentes à k variables). Une variété analytique (au sens classique) n'est pas autre chose qu'un espace analytique dont tous les points sont simples.

Une application analytique d'un espace analytique $(X, \mathcal{O}(X))$ dans un espace analytique $(X'(\mathcal{O}(X'))$ est une application continue $f : X \to X'$ qui est un homomorphisme pour les structures d'espaces annelés.

Soit X un espace analytique ; on a la notion évidente de sous-ensemble analytique de X : sous-ensemble fermé défini, au voisinage de chacun de ses points x, par l'annulation d'un nombre fini de germes holomorphes en x. Un sous-ensemble analytique possède une structure d'espace analytique (considérer les germes induits). On démontre que l'ensemble des points non simples de X est un sous-ensemble analytique, dont le complémentaire (ouvert) est partout dense ; il en est de même de l'ensemble des points où X n'est pas normal.

Un espace analytique X est irréductible (globalement) s'il n'est pas la réunion de deux sous-espaces analytiques, tous deux distincts de X. Alors l'ensemble des points simples de X est connexe, et réciproquement.

2. Applications analytiques d'un espace analytique dans C^k.

Une application analytique $f : X \to C^k$ est définie par la donnée de k fonctions holomorphes $f_1, \dots, f_k$. On dit que f est non dégénérée en un point $a \in X$ si a est point isolé de $f^{-1}(f(a))$; autrement dit, si $f_1, \dots, f_k$ prennent, en tout point x assez voisin de a et $\neq a$, un système de valeurs distinct de $(f_1(a), \dots, f_k(a))$.

LEMME 1. - Si l'application analytique $(f_1, \dots, f_k)$ est non dégénérée au point

$a \in X$, et si K désigne un voisinage compact de a , il existe un voisinage ouvert U de a , et un nombre $\varepsilon > 0$, jouissant de la propriété suivante : pour tout système de fonctions holomorphes $g_1 , \dots , g_k$ telles que

$$\sup_{x \in K} |g_i(x) - f_i(x)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant k ,$$

l'application $(g_1 , \dots , g_k)$ est non dégénérée en chaque point $x \in U$. (En particulier, l'application $(f_1 , \dots , f_k)$ est non dégénérée en tout point de U) .

La démonstration du lemme 1 , un peu technique, ne présente pas de difficulté essentielle.

LEMME 2. - Si X est de dimension p au point a (i.e. : si X est une variété de dimension complexe p en tout point simple assez voisin de a), et si

$$f = (f_1 , \dots , f_k)$$

est une application analytique $X \to C^k$, non dégénérée au point a , alors $k \geqslant p$, et il existe p fonctions, combinaisons linéaires de $f_1 , \dots , f_k$, qui définissent une application non dégénérée en a . De plus, il existe un voisinage ouvert U de x tel que l'image $f(U)$ soit un <u>sous-ensemble analytique</u> d'un ouvert de C^k .

Cela résulte de la théorie locale, classique, des sous-ensembles analytiques d'un ouvert de C^n .

Nous pouvons maintenant énoncer le premier théorème de Grauert :

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> X <u>un espace analytique irréductible. Supposons que, pour tout</u> $a \in X$, <u>existe une application analytique de</u> X <u>dans un</u> C^k (k <u>variable avec</u> a), <u>non dégénérée au point</u> a . <u>Alors</u> :

(a) X <u>est réunion dénombrable de compacts</u> ;

(b) <u>si</u> p <u>désigne la dimension de</u> X , <u>il existe une application analytique</u> $g : X \to C^p$ <u>qui n'est dégénérée en aucun point de</u> X .

DÉMONSTRATION de (a). - Choisissons un point $a \in X$, et soit $f : X \to C^k$ une application analytique non dégénérée au point a . Si f n'était dégénérée en aucun point de X , l'assertion (a) serait une conséquence du lemme suivant (de pure topologie) :

LEMME 3. - Soit X un espace topologique séparé, connexe, localement connexe, dont chaque point possède un voisinage compact métrisable ; soit Y un espace topologique séparé, dont la topologie possède une base dénombrable d'ouverts ; et soit $f : X \to Y$

une application continue telle que l'image réciproque de chaque point de Y soit discrète. Alors X est réunion d'une famille dénombrable de compacts métrisables.

(Ce lemme généralise le "théorème de Poincaré-Volterra").

Revenons à notre application analytique f. L'ensemble W des points de X en lesquels f est dégénérée est un sous-ensemble analytique (voir [1], et un article de R. REMMERT ([7], Satz. 12, p. 428) ; comme X est irréductible, la réunion V des points non simples de X et de l'ensemble W est un sous-ensemble analytique de dimension complexe $\leqslant p - 1$ en chacun de ses points (p désignant la dimension de X). D'après le lemme 3, $X - V$ est réunion d'une suite croissante d'ouverts Y_n relativement compacts. Soit X_n la réunion des ouverts U de X, contenant Y_n, et tels que la convergence uniforme (sur tout compact de Y_n) de fonctions holomorphes dans U entraîne leur convergence uniforme sur tout compact de U ; il est immédiat que l'ouvert X_n jouit de la même propriété que les U dont il est la réunion. On voit facilement que la réunion de la suite croissante des X_n est X tout entier. Pour prouver (a), on va montrer que chaque X_n est réunion dénombrable de compacts.

Prenons dans $Y = X - V$ une forme différentielle de degré maximum dont l'unique coefficient (avec des coordonnées locales réelles) soit > 0 ; une telle forme existe puisque Y est une variété différentiable, réunion dénombrable de compacts. Soit μ la mesure > 0 définie par cette forme. Soit H_n l'espace de Hilbert des fonctions holomorphes <u>dans</u> X_n, et de carré sommable pour μ dans Y_n ; cet espace est bien <u>complet</u>, car il est classique que la convergence au sens de H_n entraîne la convergence uniforme sur tout compact de Y_n, donc la convergence uniforme sur tout compact de X_n (d'après la définition de X_n). Soit (g_i) une base orthonormale de H_n ; elle est <u>dénombrable</u> : en effet, si y est un point simple de Y_n, l'ensemble des g_i telles $|g_i(y)| \geqslant \varepsilon > 0$ fixe est fini, sinon il existerait une combinaison linéaire infinie de telles g_i qui convergerait au sens de H_n sans converger au point y, ce qui est absurde. Prenons une suite dénombrable de points simples de Y_n, dense dans Y_n (donc dans X_n) ; les g_i, sauf un ensemble dénombrable, sont toutes nulles en tous ces points, donc identiquement nulles dans X_n, et ceci prouve bien que la base (g_i) est dénombrable.

Il s'ensuit aussitôt qu'il existe un ensemble dénombrable F_n d'éléments de H_n, dense dans H_n. Soit alors $x \in X_n$; par hypothèse, il existe un système fini $\{f_1, \dots, f_k\}$ de fonctions holomorphes <u>dans</u> X, tel que l'application $X \to C^k$ qu'elles définissent soit non dégénérée en x. Or $f_1, \dots, f_k$ induisent dans X_n des éléments de l'espace vectoriel H_n (car elles sont bornées dans Y_n, dont la mesure pour μ est finie) ; donc $f_1, \dots, f_k$ sont limites uniformes, au voisinage du point x, d'éléments de F_n. D'après le lemme 1, il existe donc des éléments de F_n, en nombre k, qui définissent une application analytique $X_n \to C^k$ non dégénérée au point x. Ainsi l'ensemble de toutes les fonctions de F_n définit une application continue h de X_n dans l'espace Y, produit d'une famille dénombrable d'espaces isomorphes à C ; et l'image réciproque h^{-1} de tout point de Y est discrète. D'après le lemme 3, l'espace X_n est réunion dénombrable de compacts. Ainsi, l'assertion (a) de l'énoncé est démontrée.

REMARQUE. - Soit V un sous-ensemble analytique d'un espace irréductible X ; $X - V$ est donc partout dense dans X. Si $X - V$ est réunion dénombrable de compacts, X ne l'est pas nécessairement. Contre-exemple (analogue à un contre-exemple dû à PRÜFER) : X est quotient de $C^2 \times R$ (où la droite numérique R est munie de la topologie discrète) par la relation d'équivalence

$$(x, y, t) \sim (x', y', t') \quad \text{si} \quad y = y' \quad \text{et} \quad (x - x')y = t - t' .$$

Le quotient X est une variété analytique (de dimension complexe 2) ; soit V l'ensemble $y = 0$; $X - V$ est isomorphe à $C \times C^*$; cependant X est réunion d'une famille non dénombrable d'espaces isomorphes à C.

DÉMONSTRATION de (b) : soit G l'espace vectoriel de toutes les fonctions holomorphes dans X, muni de la convergence uniforme sur les compacts de X. C'est un espace métrisable et complet, auquel s'applique donc le classique théorème de Baire : toute intersection dénombrable d'ouverts partout denses est partout dense. Soit G^p l'espace des systèmes de p éléments de G (p désignant la dimension de X) ; le théorème de Baire s'applique aussi à G^p.

A chaque point $x \in X$, attachons une suite $(f_1, \dots, f_k)$ d'éléments de G, tels que l'application $f : X \to C^k$ définie par $f_1, \dots, f_k$ soit non dégénérée au point x (ce qui est possible, d'après l'hypothèse faite dans l'énoncé du théorème). Soit $U(x)$ un voisinage ouvert de x tel que f soit non dégénérée dans $U(x)$ (i.e. : ne soit dégénérée en aucun point de $U(x)$), voisinage qui existe d'après le lemme 1. Soit $K(x)$ un voisinage compact de x, contenu dans $U(x)$. On se propose de montrer que l'ensemble des systèmes $(g_1, \dots, g_p) \in G^p$ tels que l'application $X \to C^p$ définie par ce système soit non dégénérée dans $K(x)$, est un ouvert partout dense de G^p. Comme l'espace X peut être recouvert par une famille dénombrable de compacts tels que $K(x)$, le théorème de Baire entraînera l'assertion (b) de l'énoncé.

Il reste donc à montrer que :

1) l'ensemble des systèmes $(g_1 , \dots , g_p) \in G^p$ qui définissent une application non dégénérée de $K(x)$ dans C^p est ouvert dans G^p ;

2) cet ensemble est dense dans G^p . Or l'assertion 1) résulte facilement du lemme 1 . La démonstration de 2) est moins immédiate, et va nous occuper désormais.

Soient $g_1 , \dots , g_p$ des éléments arbitrairement donnés de G ; les fonctions $f_1 , \dots , f_k$ (introduites ci-dessus) et $g_1 , \dots , g_p$ définissent une application analytique $h : X \to C^{k+p}$, non dégénérée dans $U(x)$. Soient $y_1 , \dots , y_k$, $z_1 , \dots , z_p$ les coordonnées dans l'espace des valeurs de l'application h . On cherche p combinaisons linéaires $t_1 , \dots , t_p$ de $y_1 , \dots y_k$, $z_1 , \dots , z_p$, arbitrairement voisines de $z_1 , \dots , z_p$, et jouissant de la propriété suivante : pour tout système de constantes $c_1 , \dots , c_p$, le k-plan P de C^{k+p} défini par $t_1 = c_1 , \dots , t_p = c_p$ ne rencontre le compact $h(K(x)) = A$ qu'en des points qui sont <u>isolés</u> dans $P \cap A'$, A' désignant l'image, par h , d'un voisinage compact $K'(x)$ de $K(x)$ contenu dans $U(x)$. Or, d'après l lemme 2 , $K'(x)$ est recouvert par un nombre fini d'ouverts dont chacun est appliqué, par h , sur un sous-ensemble analytique d'un ouvert de C^{k+p} , et de dimension p . On est finalement ramené à prouver le lemme suivant :

LEMME 4. - Soit W un sous-ensemble analytique de dimension p , dans un ouvert de C^{k+p} ; et soit K un compact de W . Considérons l'ensemble E des directions des k-plans P dont l'intersection avec W contient au moins un point de K , non isolé dans $P \cap W$. Alors E est un ensemble <u>rare</u> (i.e. : sans point intérieur) de la grassmannienne $G_{p,k}$ des k-plans.

Ce lemme est d'ailleurs loin d'être évident. On observe d'abord que l'ensemble des couples formés d'un point $a \in W$ et d'un élément $b \in G_{p,k}$ tels que le k-plan de direction b , passant par a , coupe W suivant un ensemble n'admettant pas le point a comme point isolé, est un <u>sous-ensemble analytique</u> du produit $W \times G_{p,k}$. Puis on doit montrer que la partie compacte de cet ensemble analytique située dans $K \times G_{p,k}$ a une image rare dans $G_{p,k}$; et, pour cela, utiliser des résultats récents de R. REMMERT [7] .

3. <u>Variétés de Stein et leurs généralisations</u>.

Rappelons la définition d'une variété de Stein. C'est une variété analytique complexe X satisfaisant à quatre conditions :

(i) X est réunion dénombrable de compacts ;

(ii) quels que soient $x \in X$ et $x' \in X$, $x \neq x'$, il existe une f holomorphe dans X , telle que $f(x) \neq f(x')$;

(iii) pour chaque point x , il existe un système de fonctions holomorphes dans X, qui soit un système de coordonnées locales au point x ;

(iv) X est holomorphiquement convexe.

Rappelons ce que signifie "holomorphiquement convexe" : pour tout compact $K \subset X$, l'ensemble $\tilde{K}$ des $x \in X$ tels que $|f(x)| \leq \sup_{y \in K} |f(y)|$ pour toute f holomorphe dans X, est un ensemble compact.

Une condition équivalente à (iv) est celle-ci : pour tout ensemble défini discret S de points de X, il existe une f holomorphe dans X et non bornée sur S.

REMARQUE. - Si une variété connexe X de dimension p satisfait à (iii), elle satisfait à (i) (en vertu du théorème 1), et il existe une application analytique $X \to C^p$ qui n'est dégénérée en aucun point de X (toujours en vertu du théorème 1). Ainsi, une telle variété analytique X se réalise comme "domaine riemannien" au-dessus de C^p.

Rappelons d'autre part ([2], [4]) que, pour tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ sur une variété de Stein X, la cohomologie $H^q(X, \mathcal{F})$ est nulle pour tout $q \geqslant 1$. Réciproquement d'ailleurs, soit X une variété analytique satisfaisant à (i), et telle que $H^q(X, \mathcal{J}) = 0$ pour tout faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{J}$; alors X est une variété de Stein ([2], paragraphe 9). En effet, l'hypothèse cohomologique entraîne la propriété suivante, plus forte que la conjonction de (ii), (iii) et (iv) : si S est un sous-ensemble discret de X, et si on se donne en chaque point de S un développement limité, il existe une fonction holomorphe dans X et admettant tous ces développements limités.

On peut, avec GRAUERT, généraliser la notion de variété de Stein.

DÉFINITION. - Un espace analytique (au sens du paragraphe 1 ci-dessus) sera dit holomorphiquement complet s'il satisfait à (i), (ii), (iii') et (iv), où (iii') désigne la condition suivante :

(iii') pour chaque point $x \in X$, il existe un système fini de fonctions f_i holomorphes dans X, nulles en x, tel que tout élément de l'anneau $\mathcal{O}_x$ (anneau des germes holomorphes en x) s'exprime comme fonction holomorphe des f_i (on dit alors que les f_i engendrent analytiquement $\mathcal{O}_x$).

Cette condition exprime que les f_i définissent une réalisation de X, au voisinage de x, comme sous-ensemble analytique dans un espace numérique. Il est évident que tout sous-espace analytique d'un espace holomorphiquement complet est holomorphiquement complet.

Il est facile de voir que toute la théorie des faisceaux analytiques cohérents s'étend au cas général des espaces analytiques holomorphiquement complets ; ses conséquences sont donc encore valables (problème de Cousin, fonctions induites, etc.). D'autre part, si un espace analytique X satisfait à (i), et si $H^q(X, \mathcal{J}) = 0$ pour tout faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{J}$, alors X satisfait à (ii), (iii') et (iv) : même raisonnement que dans le cas classique.

Dans la deuxième partie de son mémoire, GRAUERT montre qu'il est possible de remplacer les conditions (i), (ii), (iii'), (iv) par des conditions en apparence plus faibles. D'une façon précise :

THÉORÈME 2. - Soit X un espace analytique, irréductible. Supposons que, pour tout $a \in X$, il existe une application analytique de X dans un C^k, non dégénérée au point a. Si de plus X est holomorphiquement convexe (condition (iv)), alors X est holomorphiquement complet.

Ce théorème est nouveau, même dans le cas où X est une vraie variété analytique (auquel cas le théorème 2 affirme que X est une variété de Stein).

DÉMONSTRATION : le théorème 1 entraîne déjà que X satisfait à la condition (i). Il reste à prouver que X satisfait à (ii) et (iii'). Or (iv) entraîne que X est réunion d'une suite croissante d'ouverts X_i, relativement compacts, dont chacun est défini, dans un voisinage convenable de son adhérence, par un système fini d'inégalités $|h_\alpha(x)| < 1$, les h_α étant holomorphes dans tout X (un tel X_i s'appelle un polyèdre analytique de X). Supposons prouvé que chaque X_i satisfait à (ii) et (iii'), donc est holomorphiquement complet ; alors il est classique que toute fonction holomorphe dans X_i est limite uniforme, sur tout compact de X_i, de fonctions holomorphes dans X entier. Dans ces conditions, on peut prouver que X satisfait à (ii) et (iii') : pour (ii), c'est évident, par approximation des fonctions holomorphes dans X_i ; et pour (iii'), cela résulte aussitôt du lemme suivant :

LEMME 5. - Soit x un point d'un espace analytique X, et soit un système fini de fonctions f_i holomorphes dans X, nulles en x, et telles que les f_i engendrent analytiquement l'anneau $\mathcal{O}_x$. Alors tout système de fonctions g_i, holomorphes dans X, nulles en x, et suffisamment voisines des f_i (pour la convergence compacte), engendre analytiquement l'anneau $\mathcal{O}_x$.

(En effet, le problème étant de nature locale, on peut supposer X réalisé comme sous-ensemble analytique d'un ouvert U d'un espace C^k, U étant un ouvert de Stein. Alors toute fonction holomorphe (de l'espace X) est induite sur X par une fonction holomorphe dans U : c'est un théorème global. L'application linéaire qui associe à toute fonction holomorphe dans U sa trace sur X est un homomorphisme d'espaces de Fréchet, d'après le théorème classique de Banach. Autrement dit, si les f_i sont induites par des F_i holomorphes dans U , les g_i (supposées voisines des f_i) sont induites par des G_i voisines des F_i (au sens de la convergence uniforme sur les compacts de U). En particulier, les dérivées des G_i , au point x , sont voisines des dérivées des F_i . Or on peut supposer que les F_i sont justement les coordonnées de l'espace ambiant C^k , la réalisation de X étant faite par les f_i ; alors le jacobien des G_i est $\neq 0$ au voisinage du point considéré, donc les F_i s'expriment, au voisinage de ce point, comme fonctions holomorphes des G_i ; par suite, sur X , au voisinage de x , les f_i s'expriment comme fonctions holomorphes des g_i . Et ceci démontre le lemme 5).

Ainsi, revenant à la démonstration du théorème 2 , il suffit de prouver que si un ouvert X' de X , relativement compact, est défini par un nombre fini d'inégalités $|h_\alpha(x)| < 1$ (les h_α étant holomorphes dans tout X), X' satisfait à (ii) et (iii'). Soit r le nombre des h_α ; dans un espace C^r (coordonnées z_α) , soit V l'ensemble $|z_\alpha| < 1$. D'autre part, d'après l'hypothèse de l'énoncé du théorème 2 , nous avons une application analytique φ de X' dans un C^s , telle que l'image réciproque de tout point de C^s soit discrète.

Considérons alors l'application de X' dans $V \times C^s$, définie par $x \to (h_\alpha(x), \varphi(x))$. Elle est propre (i.e. : l'image réciproque de tout compact est compacte), et l'image réciproque de tout point est discrète, donc finie. De plus, $V \times C^s$ est une variété de Stein. La démonstration du théorème 2 sera achevée si on prouve l'énoncé suivant (dans lequel nous changeons un peu les notations) :

LEMME 6. - Soit X un espace analytique. Soit $f : X \to Y$ une application analytique propre de X dans une variété de Stein Y , telle que l'image réciproque de tout point de Y soit finie. Alors X est holomorphiquement complet.

DÉMONSTRATION abrégée du lemme 6. - Les hypothèses impliquent que X satisfait à (i) et à (iv). Il reste à prouver que X satisfait à (ii) et (iii'). Il suffit de le prouver pour tout X' , image réciproque d'un ouvert de Stein Y' , relativement compact, de Y . On peut supposer Y' réalisé comme sous-variété analytique (sans singularité) d'un polydisque d'un espace numérique. Par hypothèse, chaque point de Y possède un voisinage ouvert de Stein, dont l'image réciproque dans X est un ouvert, holomorphiquement complet. On est alors facilement ramené à un problème d'élémentaire que voici :

Soit Y' un ouvert de Stein de Y , relativement compact ; soit X' son image réciproque dans X ; soit g une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{Y'}$, telle que l'ensemble X'_1 des points de X' où $\mathcal{R}e(g(f(x))) < 1$ et l'ensemble X'_2 des points de X' où $\mathcal{R}e(g(f(x))) > -1$ soient tous deux holomorphiquement complets. Il s'agit de conclure que X' est holomorphiquement complet. Pour cela, il suffira de prouver que toute fonction holomorphe dans X'_1 (resp. dans X'_2) est limite, uniformément sur tout compact, de fonctions holomorphes dans X' . Or cela résulte d'un théorème difficile démontré par CKA [3] (et quelques autres) : si K_1 et K_2 sont des compacts contenus respectivement dans X'_1 et X'_2 , toute φ holomorphe dans $X'_1 \cap X'_2$ est, dans un voisinage de $K_1 \cap K_2$, la différence d'une φ_1 holomorphe au voisinage de K_1 et d'une φ_2 holomorphe au voisinage de K_2 ; de plus, si $|\varphi(x)| \leq 1$ au voisinage de $K_1 \cap K_2$, on peut s'arranger pour que

$$\sup_{x \in K_1} |\varphi_1(x)| \quad \text{et} \quad \sup_{x \in K_2} |\varphi_2(x)|$$

soient plus petits qu'un nombre fixe, indépendant de φ .

Ainsi serait achevée la démonstration du lemme 6 , et par suite celle du théorème 2.

REMARQUE 1. - Le lemme 6 généralise un résultat de SERRE : tout revêtement fini d'une variété de Stein est une variété de Stein. Il paraîtrait que l'on sait démontrer qu'un revêtement quelconque d'une variété de Stein est une variété de Stein [8].

REMARQUE 2. - Le théorème 2 signifie, en somme, que si un espace analytique est étalé dans C^p comme "domaine riemannien" (avec ramifications) et s'il est holomorphiquement convexe, il est holomorphiquement complet.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CARTAN (Henri). - Détermination des points exceptionnels d'un système de p fonctions analytiques de n variables complexes, Bull. Sc. math., Série 2, t. 57, 1933, p. 333-334.

[2] CARTAN (Henri). - Variétés analytiques complexes et cohomologie, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables [1953. Bruxelles]. - Liège, Thone et Paris, Masson, 1953, p. 41-55.

[3] OKA (Kyoshi). - Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX, Domaines finis sans point critique intérieur, Jap. J. Math., t. 23, 1953, p. 97-155.

[4] SERRE (Jean-Pierre). - Cohomologie et fonctions de variables complexes, Séminaire Bourbaki, t. 5, 1952/53.

[5] SERRE (Jean-Pierre). - La suite spectrale attachée à une application continue, Séminaire Cartan, 2e éd., t. 3, 1950/51, Exposé 21, prop. 3.

ADDITIF

[6] GRAUERT (H.). - Charakterisierung der holomorph-vollständigen komplexen Räume, Math. Annalen, t. 129, 1955, p. 233-259.

[7] REMMERT (Reinhold). - Projektionen analytischer Mengen, Math. Annalen, t. 130, 1955/56, p. 410-441.

[8] STEIN (Karl). - Überlagerungen holomorph-vollständiger komplexer Räume, Arch. f. Math., t. 7, 1956, p. 354-361.

[Juin 1957]