SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ANDRÉ BLANCHARD

Le plongement des variétés de Hodge dans des espaces projectifs complexes

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. n° 114, p. 141-147

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__141_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1955)

LE PLONGEMENT DES VARIÉTÉS DE HODGE DANS DES ESPACES PROJECTIFS COMPLEXES

par André BLANCHARD

(d'après K. KODAIRA [8])

1. Fibrés.

Faute d'appellation traditionnelle en français, on dira "un fibré", dans tout cet exposé, pour "un espace fibré analytique complexe de fibre C associé à un espace fibré analytique complexe principal de fibre C^* , le groupe C^* opérant dans C au moyen de la multiplication" (anglais : complex line bundle).

Si U_j est un recouvrement de Stein d'une variété V , un fibré sur V peut se décrire au moyen des espaces $U_j \times C$ en identifiant le point (z , y_j) de $U_j \times C$ avec le point (z , y_k) de $U_k \times C$, z étant un point de $U_j \cap U_k$, lorsque $y_k/y_j = f_{jk}$, $f_{jk}(z)$ étant une fonction holomorphe inversible définie dans $U_j \cap U_k$. (Les f_{jk} de Kodaira sont les inverses de ceux-ci).

Rappelons que si D est un diviseur défini par des fonctions f_j , définies dans U_j , on fait correspondre à D le fibré défini par les fonctions $f_{jk} = f_k/f_j$; les sections de ce fibré sont alors les systèmes de fonctions holomorphes φ_j telles que $\varphi_k/\varphi_j = f_k/f_j$, il est alors clair que φ_j/f_j est une fonction méromorphe sur V qui n'a pas plus de pôles que les fonctions $1/f_j$: autrement dit les sections du fibré correspondant à un diviseur D s'interprètent comme les fonctions méromorphes au-dessus de $-D$.

Le fibré canonique sur une variété V à n dimensions complexes est le fibré dont les germes de sections sont les germes de formes holomorphes de type $(n , 0)$; on voit que si U_j admet le système de coordonnées locales $z_{r,j}$, le fibré canonique peut être défini par $f_{jk} = (J_{jk})^{-1}$, J_{jk} étant le jacobien $d(z_{r,k})/d(z_{r,j})$. Les fibrés sur une variété V forment un groupe qui sera noté additivement.

Supposons (jusqu'à la fin de l'exposé) que V soit compacte kählérienne, un fibré F a une classe caractéristique $c(F)$ dans $H^2(V , Z)$ qui détermine une classe caractéristique réelle $c_R(F)$ dans $H^2(V , R)$. On admettra le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Pour qu'une classe entière de degré 2 soit classe caractéristique d'un fibré, il faut et il suffit que la classe réelle correspondante soit représentée par une forme différentielle de type $(1\ ,\ 1)$, [9] , voir aussi [6] .

On dit qu'un fibré est ample si sa classe caractéristique réelle est représentée par au moins une forme positive de type $(1\ ,\ 1)$ (donc une forme de Hodge) . Il est facile de voir que si D est un diviseur ample sur une variété projective, le fibré correspondant est ample (le vérifier pour un hyperplan de $P_n(C)$), notre but actuel est de montrer une sorte de réciproque à cette proposition.

$\Omega(F)$ désignera le faisceau des germes de sections du fibré F . On admettra encore le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — $H^p(V\ ,\ \Omega(F)) = 0$ pour q supérieur à 1 , si $F - K$ est ample, [7] , voir aussi [1] et [10] .

2. Application dans un espace projectif complexe définie par un fibré. Éclatements.

Soit un fibré F , l'espace Γ_0 des sections de F est un espace vectoriel de dimension finie [5] , soit d . Considérons une base de Γ_0 , c'est si l'on veut un ensemble de fonctions holomorphes φ_{sj} définie dans U_j , avec $\varphi_{sk}/\varphi_{sj} = f_{jk}$ (s va de 1 à d) donc, si on considère pour un j donné les d fonctions φ_{sj} comme coordonnées homogènes dans l'espace projectif à $d - 1$ dimensions, on a ainsi une application de V qui ne dépend pas de la carte locale U_j : c'est en général une application méromorphe, mais si, au-dessus de tout point de V , il existe une section non nulle en ce point, l'application ainsi définie est régulière ; de plus si, parmi les sections qui s'annulent en un point p , on peut en trouver de telles que φ_j admette en ce point des dérivées partielles du premier ordre données arbitrairement, l'application correspondant à F est de rang égal à n au point p de V_n . On est donc amené à considérer l'espace des sections qui s'annulent en un point p ainsi que les dérivations en p , ceci conduit à étudier certains espaces fibrés définis à partir de F sur la variété V dont on fait éclater le point p .

Éclatements (quadratic transformations). — Soit p un point appartenant à une seule carte U_p , sur laquelle on a des coordonnées z_r nulles en p . S étant un espace projectif complexe à $n - 1$ dimensions défini par des coordonnées homogènes t_r , on considère dans $U_p \times S$ la variété W d'équations $t_r z_s - t_s z_r = 0$ W est une variété sans singularités qu'on peut recouvrir en effet par n cartes locales U_{pk} dans lesquelles on a respectivement les systèmes de coordonnées :

$$(t_1/t_k\ ,\ t_2/t_k\ ,\ \dots\ ,\ t_{k-1}/t_k\ ,\ z_k\ ,\ t_{k+1}/t_k\ ,\ \dots\ ,\ t_n/t_k)$$

un point de W où les z_r ne sont pas tous nuls correspond à un point de U_p, en remplaçant U_p par W' dans la variété V, on dira qu'on a fait éclater le point p (qui est remplacé par l'espace projectif S) ; l'application P de la variété $\hat{V}$ ainsi définie sur V est régulière. Si F est un fibré sur V, on en déduit le fibré image inverse $\hat{F}$, on a $c(\hat{F}) = P^* c(F)$ et $c_R(\hat{F}) = P^* c_R(F)$; à toute section du fibré F correspond une section de $\hat{F}$, la réciproque est également vraie car un fibré de la forme $\hat{F}$ sur $\hat{V}$ peut toujours admettre les fonctions de passage égales à 1 pour passer de U_{pj} à U_{pk}, une section définit alors une fonction holomorphe sur U_p moins le point p, laquelle se prolonge en p d'après le théorème de Hartog.

S est un diviseur particulier de $\hat{V}$ défini par les fonctions z_r sur U_{pr} et 1 sur U_j (U_j carte de V ne contenant pas p), le fibré correspondant (S) est défini par les fonctions de passage

$f_{rs} = z_s/z_r$ sur $U_{pr} \cap U_{ps}$, $f_{jr} = z_r$ sur $U_{pr} \cap U_j$ et $f_{jk} = 1$ sur $U_j \cap U_k$. $(S)_S$ fibré induit par (S) sur S est défini par $f_{rs} = (z_s/z_r)_S = t_s/t_r$. Or si (e) est le fibré correspondant à un hyperplan sur S, (e) est défini par les fonctions de passage $g_{rs} = (t_1\, t_s^{-1})/(t_1\, t_r^{-1}) = f_{rs}^{-1}$ d'où la formule (HIRZEBRUCH) :

$$(S)_S = -\,(e).$$

Le germe de forme différentielle de type $(n\,,\,0)$ $dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n$ peut se remonter dans $\hat{V}$, on voit qu'il s'écrit sur U_{p1} par exemple :

$$dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n = z_1^{n-1}\, dz_1 \wedge d(t_2/t_1) \wedge \dots \wedge d(t_n/t_1) \;;$$

il s'annule donc $n-1$ fois sur S, on en déduit le fibré canonique de $\hat{V}$:

$$K(\hat{V}) = \hat{K}(V) + (n-1)(S)\,.$$

Un fibré F sur V étant défini par des f_{jk} sur $U_j \cap U_k$ et f_{jp} sur $U_j \cap U_p$, on peut définir le fibré $E_m = \hat{F} - m(S)$ défini par $f_{rs}(z_s/z_r)^{-m}$ sur $U_{pr} \cap U_{ps}$, etc. et si un germe de section de E_{m+1} est défini par des fonctions η_j sur U_j et η_r sur U_{pr}, on définit naturellement un germe de section de E_m par η_j sur U_j et $z_r \cdot \eta_r$ sur U_{pr}. Si i désigne l'application ainsi définie du faisceau $\Omega(E_{m+1})$ dans $\Omega(E_m)$ (faisceaux de germes de sections) et r la restriction à S, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega(E_{m+1}) \xrightarrow{\ i\ } \Omega(E_m) \xrightarrow{\ r\ } \Omega(me) \longrightarrow 0$$

d'où

$$0 \longrightarrow \Gamma(E_{m+1}) \longrightarrow \Gamma(E_m) \longrightarrow \Gamma_S(me) \longrightarrow H^1(\hat{V}\,,\,\Omega(E_{m+1})\ \dots$$

(la notation $\Gamma(F)$ désignant l'espace des sections de F) en particulier les deux suites exactes suivantes seront utiles :

$$0 \longrightarrow \Gamma(E_2) \longrightarrow \Gamma(E_1) \longrightarrow \Gamma_S(e) \longrightarrow H^1(\hat{V}, \Omega(E_2))$$

$$0 \longrightarrow \Gamma(E_1) \longrightarrow \Gamma(E_0) \longrightarrow C \longrightarrow H^1(\hat{V}, \Omega(E_1))$$

$\Gamma(E_m)$ s'interprète comme l'espace des sections de $E_0 = \hat{F}$ qui s'annulent m fois sur S. L'interprétation de $\Gamma(E_0) \longrightarrow C$ est immédiate : valeur constante sur S de la section de E_0 (valeur dépendant des coordonnées choisies sur $U_p \times C$). Cherchons à interpréter $\Gamma(E_1) \longrightarrow \Gamma_S(e)$: une section de E_1 au voisinage de S est définie sur U_{p1} par exemple par une fonction

$$\varphi(z_1 , t_2/t_1 , \dots , t_n/t_1) ,$$

son image dans les sections de E_0 est définie par la fonction

$$\psi(z_1 , z_2 , \dots , z_n) = z_1 . \varphi(z_1 , t_2/t_1 , \dots , t_n/t_1)$$

et l'image de la même section de E_1 dans $\Gamma_S(e)$ est définie sur la restriction à S de U_{p1}, par exemple, par la fonction $\lim_{z_1 \to 0} \varphi(z_1 , \dots , t_n/t_1)$ cette limite est visiblement égale à :

$$\partial\psi/\partial z_1 + (t_2/t_1)\, \partial\psi/\partial z_2 + \dots + (t_n/t_1)\partial\psi/\partial z_n$$

de sorte qu'une section de E_1 étant interprétée comme une section de E_0 qui s'annule en p, l'application dans $\Gamma_S(e)$ s'interprète alors comme la différentielle de la fonction définissant la section (les coordonnées locales étant choisies). Il ne nous reste donc qu'à trouver un fibré F tel que

$$H^1(\hat{V} , \Omega(E_2)) = H^1(\hat{V} , \Omega(E_1)) = 0$$

quel que soit le choix de p, pour que F définisse un plongement localement birégulier de V dans un projectif.

LEMME 1. – Il existe une forme u_0 de type $(1 , 1)$ sur V, telle que si F est "plus ample que u_0" (c'est-à-dire si $c_R(F)$ admet un représentant u tel que $u - u_0$ soit une forme positive), $\hat{F} - (S)$ est ample sur $\hat{V}$ quel que soit le choix de p.

Soit (z_r , t_r) comme dans la définition de l'éclatement, et

$$|z|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 .$$

Soit $\rho(r)$ une fonction de classe infinie de $r = |z|^2$ telle que :

$$\rho(r) = 1 \text{ si } r \leqslant \varepsilon^2 ; \quad \rho(r) = 0 \text{ si } r \geqslant (2\varepsilon)^2 ; \ \varepsilon \text{ petit.}$$

Soit s la forme $s = \frac{i}{2\pi} d'd''(\rho(|z|^2).\log(|z|^2))$. On voit alors que pour $|z| \leqslant \varepsilon$, s est induit par la métrique standard de S , il est alors clair qu'il existe une forme u_0 telle que $u_0 + s$ est positive sur $\hat{V}$, mais a priori cette forme u_0 dépend de p , des coordonnées et de ε ; or au voisinage de p , on peut utiliser les coordonnées $z_r - a_r$, et choisir u_0 tel que $u_0 + s(z - a)$ soit une forme positive pour $|z - a| \geqslant \varepsilon$, a étant dans un certain ouvert, puis enfin utiliser la compacité de V .

Ce lemme étant montré, soit F_1 un fibré sur V "plus ample que u_0 ", soit alors $F = (n + 1) F_1 + K(V)$. On voit alors que :

$$E_{m+1} - K(\hat{V}) = (n + m) (\hat{F}_1 - (S)) + (1 - m)\hat{F}_1$$

d'où il résulte que E_1 et E_2 sont amples. L'application définie par F est alors régulière et localement birégulière, il reste donc seulement à montrer que l'on peut trouver un fibré G qui définit une application régulière dans un espace projectif séparant les points suffisamment éloignés. Pour cela on montre le

LEMME 2. - <u>Étant donné un nombre</u> ε , <u>il y a une forme</u> u_ε , <u>telle que si</u> F <u>est plus ample que</u> u_ε , $\hat{F} - (S) - (T)$ <u>est ample sur</u> $\hat{V}$ <u>(variété obtenue en faisant éclater les deux points distincts</u> p <u>et</u> q) <u>pourvu que la distance entre</u> p <u>et</u> q <u>soit supérieure à</u> ε (démonstration analogue à celle du lemme 1) (S image inverse de p , T image inverse de q).

Soit alors G_1 un fibré plus ample que u_ε , et $G = nG_1 + K(V)$. On pose $E' = \hat{G} - (S)$ et $E'' = \hat{G} - (S) - (T)$. On a alors $E'' - K(\hat{V}) = n(\hat{G}_1 - (S) - (T))$ donc $E'' - K(\hat{V})$ est ample, et dans la suite exacte :

$$0 \to \Gamma(E'') \to \Gamma(E') \to C_T \to H^1(\hat{V} , \Omega(E'')) \to H^1(\hat{V}, \Omega(E')) \to H^1(T , \Omega(T))$$

on a $H^1(\hat{V} , \Omega(E'')) = 0$, d'autre part $H^1(T , \Omega(T)) = 0$ car ce dernier groupe s'identifie à $H^{0,1}(T)$ et T est un espace projectif complexe. On a donc aussi $H^1(\hat{V} , \Omega(E')) = 0$ et les deux suites exactes :

$$0 \to \Gamma(E'') \to \Gamma(E') \to C_T \to 0$$

$$0 \to \Gamma(E') \to \Gamma(\hat{G}) \to C_S \to 0$$

dont la deuxième signifie que G admet une section non nulle en p , et la première que G admet une section nulle en p et non nulle en q (pourvu que la distance de p à q soit assez grande) ce qui signifie bien que G définit une application dans un espace projectif qui sépare les points assez éloignés. Au moyen des applications définies par F et G , on peut en définir une qui soit un véritable plongement.

THÉORÈME de Kodaira. - Toute variété de Hodge peut s'identifier à une sous-variété sans singularités d'un espace projectif complexe.

3. Applications.

a. Tout revêtement fini d'une variété algébrique projective est une variété algébrique projective (évident) ;

b. Si une variété complexe compacte V admet une métrique hermitienne à courbure de Ricci positive, V est une variété algébrique : on a en effet pour la courbure de Ricci d'une métrique hermitienne cette formule mirifique :

$$R_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{-\partial^2}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} \log |g| \quad \text{avec} \quad |g| = \text{déterminant des } g_{\alpha\beta}$$

d'où il résulte que la forme $\frac{i}{\pi} R_{\alpha\bar{\beta}} \, dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta$ est à périodes entières car elle représente la classe canonique au signe près.

c. Si D est un domaine borné de C^n, et G un groupe discret opérant sans points fixes sur D et tel que D/G soit compact, alors D/G est une variété algébrique projective. En effet $k(z , \bar{z})$ étant la fonction de Bergmann [2],

$$k(z , \bar{z})\, dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$$

est un volume invariant par G donc $\frac{i}{2\pi} d'd'' \log k$ est une forme de type $(1 , 1)$ définie sur D/G dont on peut montrer qu'elle est positive, d'autre part elle représente la classe canonique de D/G d'où la proposition annoncée.

d. KODAIRA montre que toute variété fibrée compacte par des espaces projectifs complexes sur une variété kählérienne (resp. de Hodge) est elle-même une variété kählérienne (resp. de Hodge) (voir aussi [3] et [4]).

D'autre part si D est un diviseur ample sur une variété algébrique F dont le premier nombre de Betti est nul, le groupe connexe des automorphismes de F opère linéairement sur $L(D)$, donc $L(D)$ définit un plongement dans un espace projectif tel que les automorphismes de F appartenant à la composante connexe de l'identité soient induits par des homographies. On en déduit : Si $E(B , F)$ est une variété fibrée analytique complexe compact, de base B kählérienne (resp. algébrique projective), de fibre F algébrique projective à premier nombre de Betti nul, et de groupe structural connexe, $E(B , F)$ est kählérienne (resp. algébrique projective) (voir aussi [4]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AKISUKI (Y.) and NAKANO (S.). - Note on Kodaira-Spencer's proof of Lefschetz theorems, Proc. Japan Acad., t. 30, 1954, p. 266-272.

[2] BERGMANN (Stefan). - Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes avec les applications à la théorie des fonctions analytiques. - New York, Interscience Publishers, 1941.

[3] BLANCHARD (André). - Espaces fibrés kähleriens compacts, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 238, 1954, p. 2281-2283.

[4] BLANCHARD (André). - Sur les variétés analytiques complexes, Ann. scient. E.N.S. série 3, t. 73, 1956, p. 157-202 (Thèse Sc. math. Paris. 1956).

[5] CARTAN (H.) et SERRE (J.-P.). - Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 237, 1953, p. 128-130.

[6] DOLBEAULT (Pierre). - Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes, C.R.Acad. Sc. Paris, t. 236, 1953, p. 175-177.

[7] KODAIRA (K.). - On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks, Proc. nat. Acad. Sc., t. 39, 1953, p. 1268-1273.

[8] KODAIRA (K.). - On Kähler varieties of restricted type, Annals of Math., t. 60 1954, p. 28-48.

[9] KODAIRA (K.) and SPENCER (D. C.). - Groups of complexe line bundles over compact Kähler varieties, Proc. nat. Acad. Sc., t. 39, 1953, p. 868-872.

[10] SERRE (Jean-Pierre). - Un théorème de dualité, Comment.Math. Helv., t. 29, 1955, p. 9-26.