ALEXANDRE GROTHENDIECK

Réarrangements de fonctions et inégalités de convexité dans les algèbres de von Neumann munies d'une trace

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. n° 113, p. 127-139

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__127_0>

Séminaire BOURBAKI
(mars 1955)

RÉARRANGEMENTS DE FONCTIONS ET INÉGALITÉS DE CONVEXITÉ DANS LES ALGÈBRES DE VON NEUMANN MUNIES D'UNE TRACE

par Alexandre GROTHENDIECK

L'idée de départ : utilisation systématique d'un lemme général élémentaire donnant des inégalités de convexité entre deux suites décroissantes de nombres réels (qui dans le cadre plus général du présent exposé deviennent deux fonctions réelles décroissantes, voir n° 3, proposition 4), pour obtenir des inégalités relativement aux valeurs propres d'opérateurs compacts dans l'espace de Hilbert, est due à H. WEYL [2]. Pour tout ce qui concerne les anneaux d'opérateurs et les traces sur de tels anneaux, voir J. DIXMIER [1].

1. Mesures spectrales et réarrangements décroissants de fonctions (rappels)

Soit f une fonction mesurable complexe sur l'espace mesuré M (muni de la mesure positive m). On dit que f admet une mesure spectrale si l'image de m par f existe en tant que mesure sur $\mathbb{C}^*$ (plan complexe privé de l'origine). Cela signifie aussi que pour $0 < a < b < +\infty$, l'ensemble $|f|^{-1}(\,]a, b[\,)$ est intégrable (condition ne dépendant que de $|f|$). $f(m)$, considéré comme mesure sur $\mathbb{C}^*$, est appelée mesure spectrale de f et notée μ_f, i.e. on a

$$(1) \qquad \langle \alpha , \mu_f \rangle = \langle \alpha \circ f , m \rangle = \int_M \alpha(f)\, dm$$

pour toute fonction continue à support compact α sur $\mathbb{C}^*$.

μ_f est une mesure positive sur $\mathbb{C}^*$, qui est portée par $\mathbb{R}^*$ (resp. $\mathbb{R}^{*+}$) si et seulement si f est réelle (resp. positive). Une fonction mesurable f sur un espace mesuré M et une fonction mesurable g sur un espace mesuré N sont dites spectralement équivalentes si elles admettent une même mesure spectrale.

EXEMPLES. - Si $f^{-1}(\complement\{0\})$ est intégrable, alors μ_f existe et est bornée ; c'est le cas en particulier si f est à support compact, où M intégrable. Si f tend vers 0 à l'infini, alors μ_f existe.

PROPOSITION 1. - Une fonction positive décroissante φ sur $\mathbb{R}^{*+}$ admet une mesure spectrale si et seulement si elle tend vers 0 à l'infini ; μ_φ est une mesure positive sur $\mathbb{R}^{*+}$ telle que $\int_1^{+\infty} d\mu_\varphi < +\infty$. Réciproquement, pour toute mesure positive μ sur $\mathbb{R}^{*+}$, telle que $\int_1^{\infty} d\mu < +\infty$, existe une fonction positive décroissante φ et une seule sur $\mathbb{R}^{*+}$ (modulo égalité presque partout) qui admette la mesure spectrale μ.

φ n'est autre que la fonction inverse de la fonction $s \to \int_s^{+\infty} d\mu$.

COROLLAIRE. - Soit f une fonction mesurable positive sur l'espace mesuré M. Pour que f soit spectralement équivalente à une fonction positive décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$, il faut et il suffit que pour tout $a > 0$, $f^{-1}([a, +\infty[)$ soit intégrable. Alors φ est uniquement déterminée presque partout.

Cette φ est appelée le <u>réarrangement décroissant</u> de f, noté φ_f.

Si g est une autre fonction positive sur un espace mesuré N, satisfaisant à la condition ci-dessus, f et g sont spectralement équivalentes si et seulement si elles ont le même réarrangement décroissant.

Si φ est une fonction décroissante, désignons par $\varphi^-(t)$ resp. $\varphi^+(t)$ sa limite à gauche, resp. à droite, au point t. On a alors, sous les conditions du corollaire :

(2) $$\varphi_f^-(t) = \inf_{m(E)<t} \|(1-E)f\|_\infty \quad , \quad \varphi_f^+(t) = \inf_{m(E)\leq t} \|(1-E)f\|_\infty$$

(2 bis) $$\int_0^t \varphi_f = \sup_{m(E)<t} \int_E f$$

(E désigne une partie mesurable de M, identifiée à sa fonction caractéristique). On tire de (2) que φ_f croît avec f, et les formules

$$\varphi_{\lambda f} = \lambda \varphi_f \quad (\lambda \geq 0) \quad , \qquad \varphi_{f^\alpha} = (\varphi_f)^\alpha \quad (\alpha > 0) \ ;$$

plus généralement, si α est une fonction positive croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $\varphi_{\alpha(f)} = \alpha(\varphi_f)$.

On pose (sous réserve que les seconds membres existent)

(3) $$\Phi_f(t) = \int_0^t \varphi_f(s)\, ds \qquad \Psi_f(t) = \int_0^t \log \varphi_f(s)\, ds$$

(4) $$\Delta_f(t) = \exp \Psi_f(t)$$

(5) $$\Delta(f) = \Delta_{|f|}(m(M)) = \exp \int_M \log |f| \, dm$$

Supposons M intégrable, soit f une fonction mesurable réelle sur M, on déduit aussitôt de la proposition 1, corollaire, qu'il existe une fonction décroissante (et une seule, modulo égalité presque partout) sur $]0, m(M)[$ spectralement équivalente à f. On la note encore φ_f et on l'appelle réarrangement décroissant de f. Le résultat suivant est classique :

PROPOSITION 2. - Supposons $m(M) < +\infty$. Soient f et g deux fonctions réelles mesurables sur M. Pour que fg soit sommable, il suffit que $\varphi_{|f|}\,\varphi_{|g|}$ le soit, et on a alors

$$\int_M fg\,dm \leqslant \int_0^{m(M)} \varphi_f\,\varphi_g\,ds \tag{6}$$

2. Fonctions de Weyl.

DÉFINITION 1. - Soit M un espace mesuré intégrable. Une fonction réelle P sur $L^\infty(M)$ est dite fonction de Polya, si elle satisfait aux conditions :

(P_1). P est symétrique, i.e. $P(f) = P(g)$ si f et g sont spectralement équivalents.

(P_2). P est convexe, i.e. $P(\lambda f + (1-\lambda)\,g) \leqslant \lambda P(f) + (1-\lambda)\,P(g)$ pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

(P_3). P est semi-continue inférieurement pour la topologie faible $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Si on ne suppose plus M intégrable, une fonction réelle P sur l'espace des fonctions mesurables bornées à support compact sur M est dite fonction de Polya, si sa restriction à tout $L^\infty(K)$ (K partie compacte de M) l'est.

Un peu de technique "EVT" permet de prouver que, moyennant P_2, la condition P_3 est équivalente à la condition en apparence plus faible :

(P_3'). Pour toute suite (f_i) bornée dans $L^\infty(M)$ convergent presque partout vers une limite f, on a $P(f) \leqslant \liminf P(f_i)$.

De (P_2) et (P_3) résulte que P est de la forme $P(f) = \sup_i (L_i(f) + a_i)$, où les L_i sont des formes linéaires faiblement continues sur $L^\infty(M)$, i.e. des éléments de $L^1(M)$, et les a_i des nombres réels. Utilisant la condition P_1 et la proposition 2, on obtient la

PROPOSITION 3. - Supposons $m(M) < +\infty$. Alors les fonctions de Polya sur

$L^{\infty}(M)$ sont exactement les fonctions de la forme

$$(1) \qquad P(f) = \sup_i \left(a_i + \int_0^{m(M)} \varphi_i \varphi_f\right)$$

où les φ_i sont des fonctions décroissantes sommables sur $\left]0 , m(M)\right[$, les a_i des nombres réels.

COROLLAIRE. - Pour que la fonction de Polya P soit croissante, il faut et il suffit que les φ_i soient positives.

REMARQUE. - Les considérations qui précèdent seraient encore valables en supposant que P est seulement définie sur une partie convexe faiblement fermée de $L^{\infty}(M)$, symétrique dans le sens que, si une f lui appartient, il en est de même des fonctions spectralement équivalentes à f . Ainsi, P pourrait n'être définie que pour les fonctions mesurables bornées positives, etc.

EXEMPLE (correspond au cas envisagé par POLYA et WEYL). - Soit α une fonction réelle convexe sur R , alors

$$(2) \qquad P_{\alpha}(f) = \int_M \alpha(f)\, dm$$

est une fonction de Polya sur l'espace des fonctions mesurables bornées à support compact sur M , croissante si et seulement si α l'est. Il en est de même plus généralement, de la fonction $P_{\alpha,t}(f) = \int_0^t \alpha(\varphi_f)$ pour $t \geqslant 0$ (la convexité de $P_{\alpha,t}$ résulte aussitôt du n° 1, formule 2 bis).

DÉFINITION 1 bis. - Soit M un espace mesuré intégrable. Une fonction W sur la partie positive de $L^{\infty}(M)$ est dite une fonction de Weyl si elle est continue au sens de la norme, si elle satisfait aux conditions W_1 et W_3 analogues à P_1 et P_3 , et en plus à la condition W_2 . La fonction W (exp f) est une fonction convexe.

On définit de même la notion de fonction de Weyl sur l'espace des fonctions mesurables bornées positives à support compact sur M (M non nécessairement intégrable). Cette notion se ramène à la notion de fonction de Polya, si on remarque que si W est une fonction de Weyl, $P(f) = W(\exp f)$ est une fonction de Polya. Si W est croissante (cas le plus important) il en est de même de P (et réciproquement).

EXEMPLES. - Si W est convexe et croissante, la condition W_2 est vérifiée automatiquement. Donc une fonction de Polya croissante définie sur les fonctions mesurables bornées positives à support compact est a fortiori une fonction de Weyl. Soit α une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que α (exp t) soit convexe, alors :

(3) $$W_\alpha(f) = \int_M \alpha(f)\, dm$$

est une fonction de Weyl, croissante si et seulement si α l'est.

Prenant par exemple $\alpha(t) = t^p$, on obtient $W_p(t) = \int |f|^p\, dm$. Plus généralement α étant comme ci-dessus, et $t \geqslant 0$, $W_{\alpha,t}(f) = \int_0^t \alpha(\varphi_f)$ est une fonction de Weyl.

<u>Extension d'une fonction de Weyl standard</u>. Une fonction de Weyl W définie sur les fonctions mesurables bornées positives à support compact sur $\mathbb{R}^+$ est appelée <u>fonction de Weyl standard</u>. Supposons W <u>croissante</u>, et soit M un espace mesuré quelconque, f une fonction complexe mesurable quelconque sur M, on posera

(4) $$W(f) = \sup_g W(g)$$

où g parcourt les fonctions mesurables bornées positives à support compact majorées par $|f|$. On a $0 \leqslant W(f) \leqslant +\infty$; l'ensemble des fonctions f telles que $W(f)$ soit fini est un ensemble disqué sur lequel W est une fonction convexe. Si on restreint $W(f)$ aux fonctions mesurables bornées positives à support compact sur M, on obtient une fonction de Weyl. Si W était définie au début, pour les fonctions sur $\mathbb{R}^+$, par (3), cette formule restera valable si f est une fonction mesurable positive sur un M quelconque.

3. <u>Inégalités liées aux fonctions de Weyl</u>.

PROPOSITION 4. - Soit $0 < a < +\infty$, soient f, g deux fonctions décroissantes bornées sur $[0, a]$ telles que $\int_0^t f \leqslant \int_0^t g$ pour tout $0 \leqslant t \leqslant a$.

Alors pour toute fonction de Polya croissante P sur $L^\infty([0, a])$, on a $P(f) \leqslant P(g)$.

En vertu de la proposition 3 et de son corollaire, il suffit de prouver que $\int_0^a f\varphi \leqslant \int_0^a g\varphi$ pour toute fonction positive décroissante sommable sur $]0, a[$ ce qui résulte facilement d'une intégration par parties.

Remarquons d'ailleurs que la réciproque est vraie : si les fonctions décroissantes positives f , g sont telles que $P(f) \leqslant P(g)$ pour toute fonction de Polya croissante P , on a $\int_0^t f \leqslant \int_0^t g$ pour tout t entre 0 et a , car la fonction $f \to \int_0^t \varphi_f$ sur $L^\infty([0, a])$ est une fonction de Polya.

Notons aussi que l'hypothèse que P est croissante est inutile si on suppose que $\int_0^a f = \int_0^a g$; nous n'aurons pas besoin de cette remarque, qui donne des inégalités assez bizarres relatives aux traces finies. De la proposition 4 , on déduit aussitôt le

COROLLAIRE. - Soient f , g deux fonctions décroissantes positives sur $[0, a]$ telles que $\Delta_f(t) \leqslant \Delta_g(t)$ pour tout t entre 0 et a (voir n° 1 , formule 4) alors on a $W(f) \leqslant W(g)$ pour toute fonction de Weyl croissante sur la partie positive de $L^\infty([0, a])$.

On pourrait faire pour ce corollaire des remarques analogues à celles qui suivent la proposition 4.

4. Mesures spectrales et réarrangements spectraux d'opérateurs.

Dans toute la suite, $\mathcal{A}$ désigne une algèbre de von Neumann (algèbre autoadjointe faiblement fermée d'opérateurs dans un Hilbert $\mathcal{H}$) muni d'une trace normale semi-finie fidèle T , i.e. une fonction positive (à valeurs finies ou infinies) sur la partie positive $\mathcal{A}^+$ de $\mathcal{A}$, additive, positivement homogène, invariante par transformations unitaires : $T(UAU^{-1}) = T(A)$ pour tout $U \in \mathcal{A}$ unitaire, permutant au sup (normalité), telle que $A > 0$ implique l'existence de B , $0 < B \leqslant A$ avec $T(B) < +\infty$ (T semi-finie) , et telle que $T(A) = 0$ implique $A = 0$ (T fidèle). Alors l'ensemble des $A \in \mathcal{A}^+$ tels que $T(A)$ soit fini est la partie positive d'un idéal bilatère $\mathfrak{a}$ faiblement dense dans A , appelé idéal de définition de T .

T se prolonge en une forme linéaire sur $\mathfrak{a}$, telle que $T(AB) = T(BA)$ pour $A \in \mathfrak{a}$, $B \in \mathcal{A}$. Soit $\mathfrak{b}$ l'adhérence de $\mathfrak{a}$ pour la topologie uniforme, c'est encore un idéal bilatère de $\mathcal{A}$. Pour que T soit finie, i.e. $\mathfrak{a} = \mathcal{A}$, il faut et il suffit que $\mathfrak{b} = \mathcal{A}$. Rappelons le

LEMME. - Soit $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère dans l'algèbre de von Neumann $\mathcal{A}$, $\mathfrak{b}$ son adhérence uniforme. Alors tout projecteur hermitien de $\mathfrak{b}$ est dans $\mathfrak{a}$. Soit $\mathfrak{c}$ une sous-algèbre commutative autoadjointe uniformément fermée de $\mathfrak{b}$, M son spectre, de sorte que $\mathfrak{c}$ s'identifie à l'espace $\mathcal{C}_0(M)$ des fonctions continues nulles à l'infini sur M. Alors l'espace $\mathcal{K}(M)$ des fonctions continues à support compact sur M est contenu dans $\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{c}$ est maximale dans $\mathfrak{b}$, M est stonien.

COROLLAIRE. - Supposons que $\mathfrak{a}$ soit précisèment l'idéal de définition d'une trace normale semi-finie fidèle T. Alors on peut trouver sur M une mesure positive m (unique) telle si $f \in \mathcal{C}_0(M)$, on ait $f \in \mathfrak{a}$ si et seulement si f est sommable pour m, et alors $T(f) = \int f dm$. Le support de m est M.

Considérons les éléments de $\mathcal{A}^+$ majorés par des projecteurs hermitiens de $\mathfrak{a}$, ils forment la partie positive d'un idéal bilatère de $\mathcal{A}$ noté $\mathfrak{a}_0$ (c'est le plus petit idéal bilatère de $\mathcal{A}$ dont l'adhérence uniforme est $\mathfrak{b}$). Il joue le rôle de l'espace des fonctions continues à support compact en théorie de l'intégration. ($\mathfrak{b}$ jouant le rôle de $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{A}$ celui de L^∞, $\mathfrak{a}$ celui de $\mathcal{C}_0 \cap L^1$ ou $L^\infty \cap L^1$).

Soit A un élément normal de $\mathfrak{b}$, il est contenu dans une sous-algèbre commutative autoadjointe uniformément fermée $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{b}$, et $\mathfrak{c}$ s'identifie à $\mathcal{C}_0(M)$, M étant muni, en vertu du corollaire précédent, d'une mesure positive m de support M.

A devient ainsi une fonction continue nulle à l'infini sur l'espace mesuré M, donc on peut considérer sa mesure spectrale μ_A, qui est une mesure positive sur $\mathcal{C}^*$ (nº 1, exemples). Cette mesure ne dépend pas du choix de $\mathfrak{c}$, car on aura, pour toute fonction borélienne à support compact α sur $\mathcal{C}^*$:

$$\langle \alpha, \mu_A \rangle = \int_M \alpha(A)\, dm = T(\alpha(A)) \tag{2}$$

On l'appelle <u>mesure spectrale de l'opérateur normal</u> $A \in \mathfrak{b}$. Son support est identique au spectre de A diminué de 0 si 0 est dans le spectre. Du corollaire du lemme résulte que $A \in \mathfrak{a}$ si et seulement si z est sommable pour μ_A. Alors on a

$$\int z^n \, d\mu_A(z) = T(A^n) \qquad (n \geqslant 1) \tag{3}$$

Supposons maintenant $A \geqslant 0$. Alors A, considéré comme fonction sur l'espace mesuré M, admet un réarrangement décroissant φ_A qui ne dépend pas du choix de $\mathfrak{c}$ (puisque μ_A n'en dépend pas), on l'appelle le <u>réarrangement décroissant de</u>

l'opérateur positif $A \in \mathfrak{b}$. A partir de là on définit, comme au n° 1 formules (3), (4), (5) :

$$\Phi_A(t) = \Phi_{\varphi_A}(t) = \int_0^t \varphi_A(s)\, ds \tag{4}$$

$$\Psi_A(t) = \Psi_{\varphi_A}(t) = \int_0^t \log \varphi_A(s)\, ds \tag{5}$$

$$\Delta_A(t) = \Delta_{\varphi_{|A|}}(t) = \exp \Psi_{|A|}(t) \tag{6}$$

PROPOSITION 5. - <u>Soit</u> A <u>un élément positif de</u> $\mathfrak{b}$. <u>On a</u>

$$\bar{\varphi}_A(t) = \inf_{\substack{E \in P(\mathfrak{a}) \\ T(E) < t}} \Big(\sup_{x \in (1-E)\mathcal{H}} (Ax\,,\, x) \Big) = \inf_{\substack{E \in P(\mathfrak{a}) \\ T(E) < t}} \| (1-E)A(1-E) \| \tag{7}$$

($P(\mathfrak{a})$ est l'ensemble des projecteurs hermitiens dans $\mathfrak{a}$).

Posons pour $A \in \mathfrak{a}$, $|A| = (A^*A)^{1/2}$. On a le

COROLLAIRE 1. - $A \in \mathfrak{b}$ <u>implique</u>

$$\bar{\varphi}_{|A|}(t) = \inf_{\substack{E \in P(\mathfrak{a}) \\ T(E) < t}} \Big(\sup_{x \in (1-E)\mathcal{H}} \|A.x\| \Big) = \inf_{\substack{E \in P(\mathfrak{a}) \\ T(E) < t}} \| A(1-E) \| \tag{8}$$

COROLLAIRE 2. - $A \in \mathfrak{b}$, $B \in \mathfrak{a}$ <u>impliquent</u>

$$\varphi_{|BA|} \leqslant \|B\|\, \varphi_{|A|} \quad , \quad \varphi_{|AB|} \leqslant \|B\|\, \varphi_{|A|} \tag{9}$$

COROLLAIRE 3. - φ_A <u>croît avec</u> A <u>dans</u> $\mathfrak{b}^+$.

COROLLAIRE 4. - <u>Les fonctions</u> $A \to \bar{\varphi}_{|A|}(t)$ <u>forment un ensemble équicontinu de fonctions sur</u> $\mathfrak{b}$ <u>muni de la topologie uniforme</u>.

PROPOSITION 6. - Soit A un élément normal de $\mathfrak{b}$, U un élément inversible de $\mathfrak{a}$ tel que UAU^{-1} soit normal, alors on a $\mu_{UAU^{-1}} = \mu_A$.

COROLLAIRE 1. - Si $A \in \mathfrak{b}$, on a $\mu_{A^*A} = \mu_{AA^*}$

On en conclut aussitôt

COROLLAIRE 2. - Si $A \in \mathfrak{b}$, on a

(10) $\varphi_{|A|} = \varphi_{|A^*|}$, i.e. $\mu_{|A|} = \mu_{|A^*|}$.

$\varphi_{|A|} = \varphi_{|A^*|}$ et les quantités dérivées $\Phi_{|A|}$, $\Psi_{|A|}$, $\Delta_{|A|}$ etc. doivent être considérées comme mesurant l'ordre de grandeur de $A \in \mathfrak{b}$.

REMARQUE. - Il devrait être possible de définir la mesure spectrale μ_A pour tout $A \in \mathfrak{b}$ (non nécessairement normal), qui serait une mesure positive sur $\mathbb{C}^*$ ayant pour support le spectre de A (éventuellement diminué de l'origine) et satisferait à $\mu_{AB} = \mu_{BA}$ pour $A \in \mathfrak{b}$, $B \in \mathfrak{a}$. Si par exemple $\mathfrak{a}$ est l'algèbre de tous les opérateurs dans l'espace de Hilbert H avec sa trace bien connue, donc $\mathfrak{b}$ l'algèbre des opérateurs compacts ($\mathfrak{a}$ est formé des opérateurs nucléaires, et $\mathfrak{a}_0$ des opérateurs de rang fini) à toute valeur propre non nulle d'un $A \in \mathfrak{b}$ est associée classiquement sa multiplicité, qui est un nombre entier > 0 , ce qui permet dans ce cas de définir la mesure spectrale de A comme la mesure pour laquelle une valeur non nulle du spectre de A a une mesure égale à sa multiplicité.

5. Première inégalité fondamentale et conséquences.

THÉORÈME 1. - Soient A , $B \in \mathfrak{b}$ et $t \geq 0$, alors on a

(1) $$\Delta_{AB}(t) \leq \Delta_A(t)\ \Delta_B(t)$$

La démonstration, quoique moins facile que le reste de cet exposé, est essentiellement élémentaire ; elle s'appuie sur les propriétés élémentaires de la fonction $\Delta(A) = \Delta(\varphi_{|A|}) = \exp \int \log \varphi_{|A|}$; (1) peut s'écrire aussi :

(2) $$\Delta\varphi_{|AB|} \leq \Delta\varphi_{|A|}\,\varphi_{|B|}$$

Utilisant n° 3, proposition 4, corollaire, cela équivaut au

COROLLAIRE 1. - Soient A , $B \in \mathfrak{b}$ et soit W une fonction de Weyl standard croissante (n° 2), alors on a

(3) $$W(AB) \leq W(\varphi_{|A|}\ \varphi_{|B|})$$

En particulier, prenant $W(f) = \int_0^t \varphi_f(s)\, ds$, on trouve

COROLLAIRE 2. - On a pour A , $B \in \mathfrak{b}$

(4) $$\int_0^t \varphi_{|AB|}(s)\, ds \leq \int_0^t \varphi_{|A|}(s)\ \varphi_{|B|}(s)\, ds$$

pour tout $t \geqslant 0$. En particulier

(5) $$\int \varphi_{|AB|} \leqslant \int \varphi_{|A|} \varphi_{|B|}$$

d'où

(6) $$|T(AB)| \leqslant T(|AB|) = \int \varphi_{|AB|} \leqslant \int \varphi_{|A|} \varphi_{|B|}$$

En fait, toutes les inégalités importantes (en particulier, toutes celles qui suivent) sont déjà conséquence de la remarquable inégalité (6) . Soient p , q , $r > 0$ tels que $1/r = 1/q$. Prenons, dans le corollaire 1, $W(f) = \int f^r$, d'où $W(A) = T(|A|^r)$. Utilisant l'inégalité de Hölder classique, on obtient le

COROLLAIRE 3. - ("Inégalité de Hölder non commutative") : Si A , $B \in \mathfrak{b}$, on a

(7) $$\|AB\|_r \leqslant \|A\|_p \|B\|_q \qquad (p , q > 0 , 1/r = 1/p + 1/q)$$

(On pose, comme en théorie de l'intégration, $\|A\|_p = (T(|A|^p))^{1/p}$) .

Cette inégalité, due implicitement à WEYL dans le cas classique de la trace usuelle, ne semblait connue dans le cas général que pour p , q , $r \geqslant 1$ (DIXMIER, SEGAL).

COROLLAIRE 4. - Supposons que $\mathfrak{A}$ n'ait pas de projecteur hermitien minimal. On a pour $A \in \mathfrak{b}$

(8) $$\Phi_{|A|}(t) = \int_0^t \varphi_{|A|}(t) = \sup_{\substack{\|B\| \leqslant 1 \\ T(\sigma(B)) \leqslant t}} |T(BA)|$$

(où $\sigma(B)$ désigne le projecteur orthogonal de $\mathcal{H}$ sur $\overline{B(\mathcal{H})}$) . L'hypothèse sur $\mathfrak{A}$ correspond, dans le cas commutatif, à l'hypothèse qu'une mesure donnée attribue une mesure nulle aux ensembles ponctuels ; si elle n'est pas vérifiée on peut plonger A dans une algèbre de von Neumann avec une trace normale etc., induisant la trace donnée, et qui n'a pas de projecteur hermitien minimal). De la formule (8) on conclut aussitôt le

COROLLAIRE 5. - Pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $A \to \Phi_{|A|}(t)$ sur $\mathfrak{b}$ est une semi-norme, en particulier on a

(9) $$\Phi_{|A+B|} \leqslant \Phi_{|A|} + \Phi_{|B|} \qquad (A , B \in \mathfrak{b})$$

Cette dernière formule peut s'écrire aussi $\Phi\varphi_{|A+B|} \leqslant \Phi\varphi_{|A|} + \Phi\varphi_{|B|}$

d'où compte-tenu de la proposition 3 (n° 3) :

COROLLAIRE 6. - Pour toute fonction de Polya croissante W sur l'ensemble des fonctions mesurables bornées positives à support compact sur $\mathcal{R}^+$, et A, $B \in \mathfrak{a}_0$, on a

(10) $$W(|A + B|) \leqslant W(\varphi_{|A|} + \varphi_{|B|})$$

En particulier, si W est une semi-norme sur l'espace des fonctions mesurables bornées à support compact sur $\mathcal{R}$, satisfaisant à la condition de semi-continuité d'une fonction de Polya, et symétrique (i.e. prenant la même valeur pour deux fonctions spectralement équivalentes), alors $A \to W(|A|) = W(\varphi_{|A|})$ est une semi-norme sur $\mathfrak{a}_0$, invariante par transformations unitaires, généralisant les semi-normes introduites par SCHATTEN (dans le cas de la trace usuelle). Il n'est d'ailleurs pas difficile de voir que si $\mathcal{A}$ est un facteur, toute semi-norme sur $\mathfrak{a}_0$ invariante par transformation unitaire peut s'obtenir de la façon précédente (c'est un théorème de Schatten dans le cas de la trace usuelle).

Prenant en particulier pour $W(f)$ la norme N_p usuelle, on obtient <u>l'inégalité de Minkowski</u> pour opérateurs :

(11) $$\|A + B\|_p \leqslant \|A\|_p + \|B\|_p \qquad (1 \leqslant p < +\infty)$$

6. <u>Autres inégalités, et questions ouvertes.</u>

La fonction $\Delta_A(t)$ a été définie pour $A \in \mathfrak{b}$, mais on peut la définir aussi de façon naturelle pour $A \in \underset{\sim}{1} + \mathfrak{b}$, de façon que $\Delta_A = \Delta_{|A|}$. Pour ceci, il suffit de définir $\Delta_A(t)$ quand A est un élément <u>positif</u> de $\underset{\sim}{1} + \mathfrak{b}$; le détail de la définition est laissée au lecteur. Dans le cas où $\underset{\sim}{1} + \mathfrak{b}$ rencontre $\mathfrak{b}$, i.e. dans le cas où T est finie, (d'où même $\mathfrak{b} = \underset{\sim}{1} + \mathfrak{b}$), les deux définitions de Δ_A coïncident. Signalons l'inégalité

(1) $$\Delta_{\underset{\sim}{1}+A} \leqslant \Delta_{\underset{\sim}{1}+|A|} \qquad (A \in \mathfrak{b})$$

qui est une conséquence facile de proposition 5 (on se ramène facilement d'abord au cas où T est finie). On définit ensuite

(2) $$\Delta(\underset{\sim}{1} + A) = \Delta_{\underset{\sim}{1}+A}(T(\underset{\sim}{1}))$$

Si $T(\underset{\sim}{1})$ est fini (i.e. T finie) on obtient un nombre positif fini bien déterminé pour toute $A \in \mathfrak{b} = \mathcal{A}$ (alors $\Delta(A)$ est donc en fait une fonction positive finie définie sur tout $\mathcal{A}$). Si $T(\underset{\sim}{1})$ est infini, il faut interpréter le deuxième membre de (2) comme $\lim_{t \to +\infty} \Delta_{\underset{\sim}{1}+A}(t)$; mais cette limite peut être infinie si A est un élément quelconque de $\mathfrak{b}$. Elle sera finie si $A \in \mathfrak{a}$; donc, dans tous les cas (T finie ou infinie) Δ est une fonction positive finie sur $\underset{\sim}{1} + \mathfrak{a}$.

Quand $\mathcal{A}$ est le facteur de tous les opérateurs continus dans un espace de Hilbert alors on peut prouver

(3) $$\Delta_{\underset{\sim}{1}+|A+B|} \leqslant \Delta_{\underset{\sim}{1}+|A|} \Delta_{\underset{\sim}{1}+|B|} \qquad (A\ ,\ B \in \mathfrak{b})$$

d'où faisant tendre t vers $+\infty$:

(4) $$\Delta(\underset{\sim}{1} + |A+B|) \leq \Delta(\underset{\sim}{1} + |A|)\, \Delta(\underset{\sim}{1} + |B|) \qquad (A\ ,\ B \in \mathfrak{a})$$

Ces formules se démontrent en étudiant les termes du développement en série classique du déterminant de Fredholm $\det(\underset{\sim}{1} + C)$ $(C \in \mathfrak{a})$ dont $\Delta(\underset{\sim}{1} + C)$ est le module. Il est bien plausible que (3) donc (4) reste valable dans le cas général, où $\mathfrak{A}$ est une algèbre de von Neumann quelconque. En fait, j'ai seulement pu démontrer dans le cas général (assez simplement) l'inégalité

(3 bis) $$\Delta_{\underset{\sim}{1}+|A+B|} \leqslant (\Delta_{\underset{\sim}{1}+|A|} \Delta_{\underset{\sim}{1}+|B|})^2$$

De telles inégalités, on peut tirer de nombreuses autres, soit en utilisant n° 3, proposition 4, corollaire, directement, soit en utilisant le

LEMME. - Soient A_i , B_j des éléments de $\mathfrak{b}^+$ $(1 \leq i \leq n\ ,\ 1 \leq j \leq m)$, p_i et q_j des nombres > 0 , et $t \geqslant 0$. Pour qu'on ait

(5) $$\prod_i (\Delta_{\underset{\sim}{1}+sA_i}(t))^{p_i} \leqslant \prod_j (\Delta_{\underset{\sim}{1}+sB_j}(t))^{q_j}$$

pour tout $s \geqslant 0$, il faut et il suffit que pour toute fonction décroissante positive localement sommable α sur $\mathbb{R}^+$, on ait

(6) $$\int_0^t \Big(\sum_i p_i J_\alpha(\varphi_{A_i}(s))\Big)\, ds \leq \int_0^t \Big(\sum_j q_j J_\alpha(\varphi_{B_j}(s))\Big)\, ds$$

où on pose, pour tout $\lambda \geqslant 0$:

(7) $$J_\alpha(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\alpha(\rho)\,d\rho}{\frac{1}{\lambda} + \rho} = \int_0^\infty \frac{\alpha(\frac{\sigma}{\lambda})\,d\sigma}{1+\sigma}$$

(Pour la démonstration, prendre les logarithmes L et L' des deux membres de (5) et écrire que pour toute fonction continue à support compact positive f sur $\mathbb{R}^+$, on a $\int L(s)\, f(s)\, ds \leqslant \int L'(s)\, f(s)\, ds$, introduire enfin la fonction primitive α de $-f$ dans une intégration par parties des deux membres). Prenant par exemple $\alpha(s) = s^{-p}$, où $0 < p < 1$, on trouve que $J_\alpha(\lambda)$ est proportionnel à λ^p , et (6) donne alors

(8) $$\sum_i p_i \int_0^t (\varphi_{A_i})^p \leq \sum_j q_j \int_0^t (\varphi_{B_j})^p \qquad (0 < p \leqslant 1)$$

Ainsi (3) donne en particulier

(9) $$\int_0^t (\varphi_{|A+B|})^p \leq \int_0^t (\varphi_{|A|})^p + \int_0^t (\varphi_{|B|})^p \qquad (0 < p \leqslant 1)$$

d'où faisant tendre t vers l'infini :

$$T(|A+B|^p) \leqslant T(|A|^p) + T(|B|^p) \qquad (0 < p \leqslant 1) \tag{10}$$

qui remplace l'inégalité de Minkowski (n° 5), formule (11) quand $0 < p < 1$. La formule (3 bis) ne donne que les inégalités imparfaites, déduites de (9) et (10) en mettant devant le deuxième membre le facteur 2.

Soit A un opérateur compact dans un espace de Hilbert, (λ_i) la suite de ses valeurs propres rangées par ordre de modules décroissants, (ρ_i) la suite analogue pour $|A|$. Comme l'a remarqué H. WEYL (loc. cité), on a

$$|\lambda_1| \cdots |\lambda_n| \leqslant \rho_1 \cdots \rho_n \tag{11}$$ (1)

pour tout entier $n \geqslant 1$, de sorte qu'on peut appliquer l'analogue "discret" du n° 3, proposition 4, corollaire pour obtenir de nombreuses majorations de la suite $(|\lambda_i|)$ à l'aide de la suite (ρ_i).

Supposons maintenant qu'il soit possible, dans la situation générale envisagée dans ce travail, de définir la mesure spectrale μ_A pour tout $A \in \mathfrak{b}$ (voir remarque fin du n° 4). Soit alors ν_A la mesure sur $\mathcal{R}^{*+}$ image de μ_A par l'application $z \to |z|$ de $\mathcal{C}^*$ sur $\mathcal{R}^{*+}$, soit enfin Ψ_A la fonction décroissante sur $\mathcal{R}^+$ admettant la mesure spectrale ν_A (Ψ_A joue donc le rôle de la suite $(|\lambda_i|)$ ci-dessus, donc $\Psi_{|A|}$ le rôle de (ρ_i)). Il faudrait prouver $\Delta\Psi_A \leqslant \Delta\Psi_{|A|}$ $(= \Delta\varphi_{|A|} = \Delta_A)$. Cela permettrait alors d'utiliser n° 3, proposition 4, corollaire pour obtenir de nombreuses autres majorations de ν_A à l'aide de $\mu_{|A|} = \nu_{|A|}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DIXMIER (Jacques). - Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. - Paris, Gauthier-Villars, 1957 (Cahiers scientifiques).

[2] WEYL (Hermann). - Inequalities between the two kinds of eigen values of a linear transformation, Proc. nat. Acad. Sc., t. 35, 1949, p. 408-411.

[Juin 1957]

---

(1) Pour obtenir cette formule, on note que $|\lambda_1 \cdots \lambda_n|$ est le plus grand des modules des valeurs propres de $\overset{n}{\Lambda} u$, tandis que $\rho_1 \cdots \rho_n$ est le nombre analogue relatif à $\overset{n}{\Lambda}|u| = |\overset{n}{\Lambda} u|$, donc est égal à $\|\overset{n}{\Lambda} u\|$.