ANDRÉ LICHNEROWICZ

Variétés localement kählériennes

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 60, p. 91-107

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__91_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1952)

VARIÉTÉS LOCALEMENT KÄHLÉRIENNES

par André LICHNEROWICZ

I. Définitions et notations

1. Variétés riemanniennes.

Sauf avis contraire V_m désigne ici une variété riemannienne orientable V_m à m dimensions de classe de différentiation C^v $(v \geqslant 3)$ (on suppose choisie une orientation sur V_m). Cette variété sera, pour plus de simplicité, généralement supposée compacte, bien que ce ne soit pas strictement nécessaire dans certaines questions, si l'on se réduit aux formes à supports compacts.

On suppose connue la théorie des formes harmoniques sur V_m, et on n'en rappelle ici que le strict nécessaire, afin de fixer les notations. Ces notations sont en accord total avec celles adoptées par Henri CARTAN [3]. Soit φ une forme différentielle extérieure de degré p $(0 \leqslant p \leqslant m)$, de classe C^n $(n \geqslant 2)$, définie sur V_m ; une telle forme peut être représentée localement par

$$\varphi = \frac{1}{p!} \varphi_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

où les $\varphi_{i_1 \ldots i_p}$ sont les composantes en coordonnées locales d'un tenseur antisymétrique de classe C^n. Tout d'abord grâce au tenseur métrique et à l'orientation, on peut définir sur les formes l'opérateur local $*$ ou adjoint par la formule :

$$(* \varphi)_{j_{p+1} \ldots j_m} = \frac{1}{p!} \eta_{j_1 \ldots j_p j_{p+1} \ldots j_m} \varphi^{j_1 \ldots j_p}$$

où η désigne le tenseur classique "élément de volume" ; $* \varphi$ est une $(m - p)$-forme et l'on a :

$$*^{-1} \varphi = (-1)^{p(m-p)} * \varphi$$

Le produit scalaire riemannien local des deux p-formes φ et ψ est au point $x \in V_m$

$$(\varphi , \psi) = \frac{1}{p!} \varphi_{i_1 \ldots i_p} \psi^{i_1 \ldots i_p}$$

et l'on a

$$\varphi \wedge * \psi = (\varphi , \psi) \eta .$$

On définit enfin, pour les p-formes définies sur V_m , un nouveau produit scalaire global (à valeurs numériques) par la formule :

$$(1.1) \qquad < \varphi , \psi > = \int_{V_m} \varphi \wedge * \psi = \int_{V_m} (\varphi , \psi) \eta$$

On en déduit la notion d'<u>opérateurs transposés</u> relativement à (1.1). En particulier $*$ admet pour transposé $*^{-1}$ et est donc unitaire. Si F est une forme de degré k , $e(F)$ est l'opérateur (produit extérieur à gauche par F). Il admet un transposé $i(F)$, qui est le produit intérieur par F , défini par

$$i(F) = (-1)^{(p-k)k} *^{-1} e(F) *$$

quand il opère sur les formes de degré $p \geqslant k$. Explicitement :

$$[i(F) \varphi]_{j_1 \ldots j_{p-k}} = \frac{1}{k!} F^{i_1 \ldots i_k} \varphi_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_{p-k}}$$

2. <u>Notion de forme harmonique</u>.

L'opérateur de différentiation extérieure d admet un transposé défini pour les p-formes par :

$$\delta = (-1)^p *^{-1} d *$$

Explicitement, en termes de dérivation covariante, on a :

$$(2.1) \qquad (d\varphi)_{j_1 \ldots j_{p+1}} = \varepsilon^{k i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{p+1}} \nabla_k \varphi_{i_1 \ldots i_p}$$

$$(2.2) \qquad (\delta \varphi)_{j_1 \ldots j_{p-1}} = - \nabla_k \varphi^k{}_{j_1 \ldots j_{p-1}}$$

où ε est le tenseur indicateur classique de Kronecker. (Rappelons que $\varepsilon^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_p}$ vaut $+1$ si (i) est une permutation paire des (j) supposés tous distincts, vaut -1 dans le cas d'une permutation impaire, et vaut 0 dans les autres cas).

L'opérateur local $\Delta = d\delta + \delta d$ est hermitien positif et commute avec $*$. Une forme φ est dite harmonique si $\Delta\varphi = 0$. Il est clair qu'une forme telle que

(2.3) $$d\varphi = 0 \qquad \delta\varphi = 0$$

est harmonique. Réciproquement si une forme partout définie sur V_m est harmonique, elle satisfait à (2.3) puisque

$$<\Delta\varphi, \varphi> = <d\varphi, d\varphi> + <\delta\varphi, \delta\varphi>$$

Notons en particulier que toute forme à dérivée covariante nulle sur V_m est harmonique d'après (2.1) et (2.2).

D'après la théorie de Hodge-de Rham, toute forme, définie sur V_m peut être décomposée d'une manière et d'une seule en la somme d'une forme homologue à 0, d'une forme cohomologue à 0 et d'une forme harmonique. Si φ est une p-forme, il existe des formes α et β et d'une forme harmonique $H\varphi$ respectivement de degrés $(p-1)$, $(p+1)$ et p telles que

$$\varphi = d\alpha + \delta\beta + H\varphi$$

les trois termes étant deux à deux orthogonaux au sens de $< >$. Si φ est fermée, $\delta\beta = 0$; il en résulte que toute forme fermée est homologue à une forme harmonique et une seule. Le projecteur H définit un isomorphisme de l'espace de cohomologie de V_m sur l'espace des formes harmoniques [19].

3. Groupe d'holonomie.

Je supposerai connue la théorie globale de la connexion riemannienne (par exemple [8], [4]). Le groupe d'holonomie Φ_x, au point x de V_m, est le groupe d'automorphismes de l'espace euclidien des vecteurs tangents en x à V_m, sur lequel le groupoïde des chemins de V_m fermés en x est représenté par développement ; si l'on décompose ce groupe de déplacements Φ_x en ses composantes de translation et de rotation, on obtient, dans nos hypothèses, un sous-groupe compact ψ_x du groupe orthogonal propre $O^+(m)$ qui est dit le groupe d'holonomie homogène en x. Un arc joignant deux points x, x' de V_m détermine par développement un isomorphisme de ψ_x sur $\psi_{x'}$.

J'ai établi le théorème suivant :

THÉORÈME. - A toute forme définie en x_0, invariante par le groupe d'holonomie hom ψ_{x_0}, correspond une forme différentielle partout définie sur V_m, à dérivée covariante nulle et réciproquement.

Connaissant le groupe d'holonomie ψ_{x_o}, le nombre de formes des différents degrés à dérivée covariante nulle sur V_m^o s'obtient donc immédiatement par la théorie des caractères. C'est à l'influence de ces formes sur la cohomologie de V_m que nous allons nous intéresser.

II. Les opérateurs Kh et le théorème principal

4. Les opérateurs Kh associés à une forme extérieure.

L'introduction de formes harmoniques comme représentants pour les différentes classes d'homologie de formes fermées ne présente qu'un inconvénient grave : ce choix de représentant n'est pas en général compatible avec la structure multiplicative. En d'autres termes, le produit de deux formes harmoniques n'est pas en général une forme harmonique (pour un contre-exemple simple voir [3]). Nous allons montrer que cet inconvénient disparaît lorsque l'une des formes considérées est à dérivée covariante nulle. Nous montrerons même qu'une telle forme étant donnée, il est possible de lui associer toute une suite d'opérateurs qui transforment toute forme harmonique en une forme harmonique [15].

Considérons, sur la variété riemannienne V_m, une forme différentielle extérieure F de degré k. A cette forme on peut associer non seulement l'opérateur $e(F)$ (produit extérieur par F à gauche) et l'opérateur transposé $i(F) = (-1)^{kp} \star^{-1} e(F) \star$ mais toute une suite d'opérateurs intermédiaires. D'une manière plus précise, nous désignerons par $K_h(F)$ $(h = 0, 1, \ldots, k)$ un opérateur local défini de la manière suivante [dans la suite nous écrirons K_h au lieu de $K_h(F)$] .

a. pour une forme φ de degré $p \geqslant h$, on a la forme $K_h\varphi$ de degré $(p + k - 2h)$ avec :

$$(4.1) \quad [K_h \varphi]_{\ell_1 \ldots \ell_{p+k-2h}} =$$

$$= \frac{1}{h!\,(k-h)!\,(p-h)!} \varepsilon^{i_1 \ldots i_{k-h} j_1 \ldots j_{p-h}}_{\ell_1 \ldots \ell_{p+k-2h}} F^{r_1 \ldots r_h}{}_{i_1 \ldots i_{k-h}} \varphi_{r_1 \ldots r_h j_1 \ldots j_{p-h}}$$

b. pour une forme φ de degré $p < h$, $K_h \varphi = 0$.

On notera que

$$K_o = e(F) \qquad\qquad K_k = i(F)$$

Plus généralement, on vérifiera par un calcul local que les opérateurs K_h et K_{k-h} sont liés par une relation de la forme :

$$(4.2) \quad K_{k-h} \varphi = (-1)^{k(p-k+h)} \star^{-1} K_h \star \varphi \qquad (k-h \leq p \leq n-h)$$

En particulier, si $k = 2q$ est pair, l'opérateur médian K_q est tel que :

$$K_q = \star^{-1} K_q \star$$

5. Cas où F est à dérivée covariante nulle. Relations différentielles.

a. Supposons que la forme F soit à dérivée covariante nulle. Il est alors possible, par un calcul local, d'évaluer δK_h uniquement à partir de d, δ et des opérateurs K. Ce calcul local peut être conduit par exemple en coordonnées normales. On obtient ainsi :

$$(5.1) \quad \delta K_h - (-1)^k K_h \delta = (-1)^{k-h} [dK_{h+1} - (-1)^k K_{h+1} d] \quad (h = 0,1,\ldots,k-1)$$

De la formule de différentiation extérieure d'un produit, il résulte trivialement :

$$dK_0 - (-1)^k K_0 d = 0 \quad .$$

En transformant cette formule par l'opérateur $\star$, il vient d'autre part :

$$\delta K_k - (-1)^k K_k \delta = 0$$

Il en résulte que les formules (5.1) peuvent être considérées comme valables pour $h = -1$ et $h = k$, à condition de prendre

$$K_{-1} = 0 \qquad K_{k+1} = 0$$

b. Des formules (5.1) ainsi étendues, on déduit immédiatement que l'opérateur Δ commute avec les K_h $(0 \leq h \leq k)$.

$$(5.2) \qquad \Delta K_h - K_h \Delta = 0 \qquad (h = 0, 1, \ldots, k)$$

On a en particulier le théorème suivant, qui est notre théorème principal :

THÉORÈME. - Les opérateurs $K_h(F)$ $(h = 0, 1, \ldots, k)$ associés à une forme F à dérivée covariante nulle transforment toute forme harmonique en une forme harmonique. En particulier le produit extérieur par F de toute forme harmonique est harmonique.

6. Cas où le degré de F est le double d'un nombre impair.

Je donnerai d'abord une application très simple de ce théorème. Avec les notations précédentes supposons que k soit le double d'un nombre impair $k = 2(2\ell + 1)$. Nous supposons de plus que la forme F est telle que la condition (produit intérieur de F et d'un $(2\ell + 1)$-vecteur $= 0$) entraîne la nullité de ce $(2\ell + 1)$-vecteur. Lorsqu'il en est ainsi, nous dirons que F est non dégénérée.

L'opérateur $K_{2\ell+1}(F)$ transforme toute forme harmonique en une forme harmonique Faisons-le opérer sur les formes de degré $(2\ell + 1)$; il les transforme en formes de même degré, définies localement par la formule :

$$(6.1)\quad [K_{2\ell+1}\varphi]_{i_1\ldots i_{2\ell+1}} = \frac{1}{(2\ell+1)!} F_{r_1\ldots r_{2\ell+1} i_1 \ldots i_{2\ell+1}} \varphi^{r_1\ldots r_{2\ell+1}}$$

De (6.1), on déduit immédiatement à l'aide de l'antisymétrie :

$$(6.2)\quad [K_{2\ell+1}\varphi]_{i_1\ldots i_{2\ell+1}} \varphi^{i_1\ldots i_{2\ell+1}} = 0 \qquad (K_{2\ell+1}\varphi,\ \varphi) = 0$$

Autrement dit, une forme et sa transformée sont orthogonales, au sens du produit scalaire riemannien local. L'opérateur $K_{2\ell+1}$, opérant sur les $(2\ell+1)$-formes définies au point x de V_m, n'admet pas la valeur propre 0 par hypothèse. Il ne peut admettre de valeurs propres réelles non nulles d'après (6.2).

Supposons maintenant V_m compacte, orientable. L'opérateur $K_{2\ell+1}$ opère sur l'espace vectoriel des formes harmoniques de degré $(2\ell + 1)$ et ne peut admettre dans cet espace de valeurs propres réelles. Cet espace a donc nécessairement un nombre pair de dimensions. Nous énoncerons.

THÉORÈME. - Si une variété riemannienne V_m compacte, orientable, admet une forme de degré $2(2\ell + 1)$ non dégénérée et à dérivée covariante nulle, le $(2\ell + 1)$-ième nombre de Betti de V_m est pair.

Ce résultat est étroitement relié, comme nous le verrons, au résultat relatif à la parité des nombres de Betti de rang impair de variétés kählériennes.

III. Variétés riemanniennes réductibles.

7. Cas où F est de degré 1.

a. Examinons maintenant le cas où la variété V_m admet une forme linéaire F à dérivée covariante nulle. On sait qu'on peut trouver des systèmes de coordonnées locales, tels que la métrique de V_m

$$ds^2 = g_{AB}(x^C)\, dx^A\, dx^B \qquad (A\,,\, B\,,\, C = 1\,,\, 2\,,\, \dots\,,\, m)$$

puisse se mettre sous la forme

$$ds^2 = (dx^1)^2 + g_{\alpha\beta}(x^\gamma)\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha\,,\, \beta\,,\gamma = 2\,,\, \dots\,,\, m)\,,$$

la forme F s'écrivant localement :

$$F = dx^1 \quad .$$

Soit φ une forme harmonique sur V_m. Mettons en évidence dans son expression locale les termes contenant dx^1 en facteur. Il vient ainsi :

$$\varphi = F \wedge \alpha + \beta \tag{7.1}$$

où l'expression locale de α et β ne fait plus intervenir dx^1. Cela posé, la forme $F \wedge \varphi = F \wedge \beta$ est encore harmonique. Il en est de même de $*(F \wedge \beta)$ qui est une forme fermée dont l'expression locale ne fait pas intervenir dx^1. Elle s'exprime donc à l'aide des (x^γ), seulement il en est de même pour β qui est harmonique. Ainsi α et β sont des formes harmoniques qui s'expriment au moyen des (x^γ) seulement. De telles formes seront dites des formes facteurs harmoniques.

Le polynôme de Poincaré de V_m est ainsi divisible par $(t + 1)$, le quotient, à coefficients positifs, étant donné par le nombre de formes facteurs harmoniques linéairement indépendantes des différents degrés.

b. Supposons maintenant que V_m admette k formes linéaires à dérivée covariante nulle linéairement indépendantes. En substituant aux formes considérées des combinaisons linéaires, il est possible de trouver des systèmes de coordonnées locales tels que la métrique de V_m s'écrive localement

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^k)^2 + g_{\alpha\beta}(x^\gamma)\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha\,,\beta\,,\gamma = k{+}1,\dots,m)$$

les formes considérées étant :

$$F^{(i)} = dx^i \qquad (i = 1 , 2 , \dots , k)$$

Le raisonnement précédent s'étend par récurrence en multipliant successivement une forme harmonique φ de V_m , par les formes $F^{(1)}$, $F^{(1)} \wedge F^{(2)}$, etc. Ainsi toute forme harmonique de V_m peut être constituée à partir des formes $F^{(i)}$ et de formes-facteurs harmoniques. On en déduit:

THÉORÈME. - Si une variété riemannienne compacte orientable V_m admet k formes linéaires indépendantes à dérivée covariante nulle, son polynôme de Poincaré est divisible par $(t + 1)^k$, le quotient admettant des coefficients positifs égaux aux nombres de formes-facteurs harmoniques linéairement indépendantes des différents degrés.

Les applications des résultats précédents à l'anneau de cohomologie de V_m sur les réels sont évidentes.

On sait ([2] , [12]) que si la courbure de Ricci de V_m est positive ou nulle, toute 1-forme harmonique est à dérivée covariante nulle. Par suite, si b_1 est le premier nombre de Betti de V_m , cette variété admet b_1 formes linéaires indépendantes à dérivée covariante nulle. Il en résulte:

COROLLAIRE. - Si la courbure de Ricci d'une variété V_m compacte, orientable est positive ou nulle, les résultats précédents s'appliquent avec $k = b_1$. En particulier son polynôme de Poincaré est divisible par $(t + 1)^{b_1}$.

8. Cas général. Théorème d'addition [17].

Les résultats précédents peuvent être partiellement étendus aux variétés riemanniennes dites "réductibles". Une telle variété est une variété riemannienne qui admet une k-forme simple non triviale à dérivée covariante nulle (ou, dans le langage géométrique qui admet un champ "parallèle" de k-vecteurs simples). Il en est en particulier ainsi s'il existe sur V_m un tenseur symétrique T_{AB} à dérivée covariante nulle, non proportionnel au tenseur métrique. On sait que dans ces conditions la métrique de V_m

$$ds^2 = g_{AB}\, dx^A\, dx^B \qquad (A , B = 1 , \dots , m)$$

peut s'écrire, dans des coordonnées locales convenables que nous adopterons désormais,

$$ds^2 = d\sigma^2 + d\tau^2$$

avec :

$$d\sigma^2 = g_{ij}(x^\ell)\, dx^i\, dx^j \qquad d\tau^2 = g_{\alpha\beta}(x^\gamma)\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

$$(i\ ,\ j\ ,\ell = 1\ ,\ 2\ \ldots\ k) \quad (\alpha\ ,\ \beta\ ,\ \gamma = k+1\ \ldots\ m)$$

La variété V_m admet les deux formes à dérivées covariantes nulles, adjointes l'une de l'autre :

$$\omega = \sqrt{\| g_{ij} \|}\ dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k \qquad \pi = \sqrt{\| g_{\alpha\beta} \|}\ dx^{k+1} \wedge \ldots \wedge dx^m$$

Les champs de k-vecteurs et (m-k)-vecteurs simples correspondants définisssent sur V_m deux feuilletages différentiables, dont les feuilles sont respectivement orthogonales.

Une forme de degré p , définie localement sur V_m , est appelée <u>pure, de type</u> (q , p - q) si son expression locale est homogène et de degré q par rapport aux (dx^i) . Une forme, définie sur V_m , est pure s'il en est de même pour ses expressions locales dans les différents voisinages de V_m . L'espace des formes différentielles sur V_m admet une décomposition directe, comme somme directe des sous-espaces de types déterminés :

$$\varphi_p = \sum_{q=0}^{q=\ell} \varphi_p^q \qquad [\ell = \min (p\ ,\ k)] \tag{8.1}$$

Appliquons à une forme pure φ_p^q les opérateurs $K_h(\omega)$. Ces opérateurs vont filtrer le type, car on a immédiatement

$$K_h\, \varphi_p^q = 0 \qquad \text{pour } h \neq q$$

et

$$K_{k-q}\, K_q\, \varphi_p^q = (-1)^{q(k-q)}\, \varphi_p^q$$

Si φ_p est une forme harmonique sur V_m dont la décomposition en formes pures est donnée par (8.1), nous avons

$$K_{k-q}\, K_q\, \varphi_p = (-1)^{q(k-q)}\, \varphi_p^q$$

et d'après le théorème principal, φ_p^q est harmonique.

THÉORÈME d'addition. - <u>Si V_m est une variété riemannienne réductible, toute forme harmonique est somme directe de formes pures harmoniques des différents types.</u>

Une forme pure dont l'expression locale contient seulement les coordonnées d'un même type $[(x^i)$ ou $(x^\alpha)]$ sera appelée une <u>forme-facteur</u>. Il y a naturellement deux espèces de formes-facteurs et on voit immédiatement que si α et β sont des formes-facteurs harmoniques d'espèces différentes, $\alpha \wedge \beta$ est encore harmonique. On peut cherche <u>à quelles conditions toute forme harmonique de V_m peut être construite à l'aide de formes facteurs harmoniques</u>. Dans cet ordre d'idées on a évidemment

COROLLAIRE. - <u>Dans les hypothèses du théorème d'addition, toute forme harmonique de type $(0, p)$ est une forme-facteur, toute forme harmonique de type $(k, p-k)$ est le produit par ω d'une forme du type précédent, toute 1-forme harmonique est somme de deux formes-facteurs harmoniques</u>.

9. <u>Théorème de décomposition dans le cas d'un espace fibré</u>.

Désignons par $F_k(x)$ et $E_{m-k}(x)$ les feuilles issues du point x de V_m des deux feuilletages canoniques de cette variétés. Je supposerai dans la suite que les $F_k(x)$ <u>définissent une fibration de V_m à fibre compacte</u>.

L'espace de base de V_m dans cette fibration sera désignée par B_{m-k}, la projection canonique par p ; U est un voisinage de B_{m-k} pour lequel $p^{-1}(U)$ est homéomorphe à $U \times F_k$.

Soit φ une forme harmonique pure de V_m de type (q, q'), de composantes $\varphi_{i_1 \dots i_q \alpha_1 \dots \alpha_{q'}}$. Considérons cette forme comme le noyau d'une équation intégrale sur les formes, pour le domaine fondamental $p^{-1}(U)$. Les valeurs de Schmidt et les formes de Schmidt de ce noyau sont définies par :

$$\chi_{\alpha_1 \dots \alpha_{q'}}(x^\gamma) = \lambda \int_{F_k} \varphi_{i_1 \dots i_q \alpha_1 \dots \alpha_{q'}} \psi^{i_1 \dots i_q}(x^\rho)\, \omega \tag{9.1}$$

et

$$\psi_{i_1 \dots i_q}(x^\ell) = \lambda \int_U \varphi_{i_1 \dots i_q \alpha_1 \dots \alpha_{q'}} \chi^{\alpha_1 \dots \alpha_{q'}}(x^\gamma)\, \pi \tag{9.2}$$

De l'harmonicité de φ sur V_m, il résulte que, quel que soit χ, la forme définie par (9.2) satisfait dans $p^{-1}(U)$ aux relations $d\psi = 0$, $\delta\psi = 0$ et induit par suite sur F_k une forme harmonique. Les formes de Schmidt ψ appartiennent ainsi à un espace vectoriel à un nombre fini de dimension et le spectre de Schmidt de φ est fini : ainsi φ est un noyau dégénéré. Si nous changeons de notation pour les formes χ, nous voyons qu'il y a dans $p^{-1}(U)$, des formes locales harmoniques $\psi_r^U(x^\ell)$, $\chi_2^U(x^\gamma)$, pour lesquelles

(9.3) $$\varphi = \sum_r \psi_r^U \wedge \chi_r^U$$

Les formes ψ peuvent être choisies orhtogonales et de norme 1 au sens du produit scalaire global $\langle\ \rangle$ dans F_k . Cela permet d'étendre sans difficulté (9.3) à la réunion de deux voisinages [17] . Ainsi, on démontre qu'il existe des formes-facteurs harmoniques $\psi_{(r)}$ et $\chi_{(r)}$ définies sur V_m , telles que

$$\varphi = \sum_r \psi_{(r)} \wedge \chi_{(r)}$$

THÉORÈME. - Si l'un des feuilletages de V_m définit une fibration à fibre compacte, chaque forme harmonique pure de V_m est la somme de produits de formes-facteurs harmoniques.

Ce théorème devrait pouvoir être étendu à des cas plus généraux.

IV. Variétés pseudo-kählériennes.

10. Variétés kählériennes.

Soit V_{2n} une variété à structure analytique complexe. Les coordonnées complexes locales seront désignées par z^α ($\alpha = 1 , \dots , n$) et leurs complexes conjuguées par $z^{\alpha^*} = z^{\bar\alpha}$ (dans la suite, les indices latins peuvent prendre 2n valeurs). Un tenseur complexe est décomposable en somme directe de tenseurs des différents types.

V_{2n} est pourvu d'une structure de variété hermitique, si on a choisi sur elle une forme hermitique (qu'on peut toujours supposer de classe C^∞)

(10.1) $$ds^2 = 2g_{\alpha\beta^*}\, dz^\alpha\, dz^{\beta^*}$$

où les composantes du tenseur métrique, qui est réel, satisfont à :

$$g_{\alpha\beta^*} = g_{\beta^*\alpha} = \bar g_{\alpha^*\beta} = \bar g_{\beta\alpha^*}$$

Cette métrique se traduit, en termes réels, par une métrique riemannienne à 2n variables, de composantes complexes g_{ij} ($g_{\alpha\beta} = g_{\alpha^*\beta^*} = 0$, $g_{\alpha\beta^*}$) . Les éléments géométriques introduits, notamment les dérivées covariantes, sont ceux relatifs à la connexion riemannienne associée à (10.1).

Sur toute variété hermitique, se trouve canoniquement définie une forme quadratique réelle de rang 2n

$$F = i g_{\alpha\beta^*} \, dz^\alpha \wedge dz^{\beta^*}$$

On vérifie immédiatement qu'entre les deux tenseurs F_{ij} et g_{ij} on a les relations d'échangeabilité

$$F_{ik} F_{jh} g^{kh} = g_{ij}$$

Sur toute variété hermitique

$\nabla_\gamma F_{\alpha\beta^*} = i \nabla_\gamma g_{\alpha\beta^*} = 0$, $\nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$ (vient de la structure complexe)

Une variété hermitique est dite kählérienne si la forme F associée est fermée. La condition $dF = 0$ se traduit par

$$\nabla_{\gamma^*} F_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha F_{\beta\gamma^*} + \nabla_\beta F_{\gamma^*\alpha} = 0$$

On en déduit la nullité de $\nabla_{\gamma^*} F_{\alpha\beta}$. Ainsi sur une variété kählérienne la forme F est à dérivée covariante nulle. Cette condition est équivalente à l'existence de coordonnées normales analytiques complexes [10], [3]. Sur les variétés kählériennes, voir [3], [18].

DÉFINITION. - Une variété différentiable V_{2n} de classe C^3 est dite pseudo-kählérienne si l'on peut définir sur elle une métrique riemannienne et une forme quadratique F de rang 2n à dérivée covariante nulle dans cette métrique (toute deux de classe C^2).

Cette dénomination sera justifiée dans la suite. Une étude algébrique simple [18], [7] montre qu'on peut toujours modifier la métrique initiale de façon à satisfaire à la relation d'échangeabilité

(10.2) $$F_{ik} F_{jk} g^{kh} = g_{ij}$$

la forme F, étant encore à dérivée covariante nulle dans la nouvelle métrique.

11. Etude réelle des variétés pseudo-kählériennes.

1° Pour avoir des notations comparables à celles utilisées pour les variétés kählériennes nous poserons

$L = K_0(F)$ $\quad \Lambda = K_2(F)$ (diffère par le signe du Λ de WEIL [20])

De la relation d'échangeabilité (10.2) il résulte [13]

$$\Lambda L \varphi = L \Lambda \varphi + (n-p)\varphi \qquad (p = \deg \varphi) \tag{11.1}$$

Restreignons-nous aux formes de dehré $p \leq n$ et soit Φ_p l'espace vectoriel des formes de degré p. Conformément à la terminologie de HODGE [9], ECKMANN et GUGGENHEIMER [5] et [6], appelons forme effective (ou de classe 0) une forme ψ telle que $\Lambda \psi = 0$. Appelons formes de classe h les produits par L^h d'une forme effective. D'un théorème de LEPAGE [11] ou d'une étude directe basée sur (11.1), on déduit les résultats suivants :

Pour $p \leq n$, Φ_p admet une décomposition comme somme directe d'espaces des formes des différentes classes. Pour $p \leq n-2$, ΛL définit un isomorphisme de Φ_p sur lui-même et l'équation $L\varphi_p = 0$ entraîne $\varphi_p = 0$.

2° Supposons V_{2n} pseudo-kählérienne, compacte. Substituons à l'espace vectoriel Φ_p $(p \leq n)$, l'espace vectoriel $\mathcal{H}_p$ des formes harmoniques de degré p sur V_{2n} ; L et Λ transformant toute forme harmonique en une forme harmonique, on peut déduire de la démonstration du théorème de décomposition précédent que la décomposition d'une p-forme harmonique ne fait intervenir que des formes effectives harmoniques. En substituant à chaque forme harmonique φ_p la classe de cohomologie γ_p dont elle est le représentant et en désignant maintenant par L l'opérateur (produit par la classe de représentant F), on a :

THÉORÈME 1. - Si V_{2n} est une variété pseudo-kählérienne, toute classe de cohomologie γ_p $(p \leq n)$ admet une décomposition canonique en somme directe de classes de cohomologie du type

$$\gamma_p = \sum_{h=1}^{q} L^h \, \delta_{p-2h} \qquad \left[q = \left[\tfrac{p}{2}\right]\right]$$

où les δ_{p-2h} sont des classes effectives bien déterminées.

Si φ_{p-2} $(p \leq n)$ est une forme harmonique non nulle, $L\varphi_{p-2}$ est aussi une forme harmonique non nulle. Par suite

THÉORÈME 2. - Si V_{2n} est une variété pseudo-kählérienne compacte, on a entre les nombres de Betti les inégalités.

$$b_{p-2}(V_{2n}) \leq b_p(V_{2n}) \qquad (p \leq n)$$

En particulier les nombres de Betti de rang pair sont différents de zéro, ce qui résulte aussi trivialement de la considération des formes F^h qui sont à dérivée covariante nulle.

Considérons une forme F^h avec h impair $(h = 2\ell + 1)$; elle est à dérivée covariante nulle et non dégénérée. Du théorème du paragraphe 6, il résulte la parité de $b_{2\ell+1}(V_{2n})$ $(h = 2\ell + 1 \leq n)$. Par dualité, il vient :

THÉORÈME 3. - Si V_n est une variété pseudo-kählérienne compacte, les nombres de Betti de rang impair sont pairs.

12. Cas où F est de rang $2r < m$.

Les résultats précédents peuvent être partiellement étendus à une variété riemannienne V_m admettant une forme F à dérivée covariante nulle de rang $2r < m$.

F^r est alors une $2r$-forme simple à dérivée covariante nulle et V_m est localement réductible. On peut mettre le ds^2 de V_m sous la forme

$$ds^2 = d\sigma^2 + d\tau^2$$

avec

$$d\sigma^2 = g_{i_1 j_1}(x^{h_1})\, dx^{i_1}\, dx^{j_1} \qquad d\tau^2 = g_{i_2 j_2}(x^{\ell_2})\, dx^{i_2}\, dx^{j_2}$$

$$(i_1, j_1, \ell_1 = 1, \ldots, 2r) \qquad (i_2, j_2, \ell_2 = 2r+1 \ldots m).$$

$$F = \frac{1}{2} F_{i_1 j_1}\, dx^{i_1} \wedge dx^{j_1}$$

F étant à dérivée covariante nulle et échangeable avec $d\sigma^2$. On peut alors superposer les résultats des deux études précédentes. Soit $d_{q,p-q}$ le nombre de formes harmoniques pures φ_p^q linéairement indépendantes, de type $(q, p-q)$ vis-à-vis de la réductibilité de V_m. L'équation $L\varphi_p^q = 0$ entraînant $\varphi_h^q = 0$ pour $q \leq r-2$, on en déduit

$$d_{q-2,p-q} \leq d_{q,p-q} \qquad (q \leq r)$$

Par addition, pour $p \leq r$ on a en particulier le théorème suivant :

THÉORÈME. - Si une variété riemannienne V_m, compacte, orientable admet une forme quadratique F à dérivée covariante nulle de rang $2r$, on a les inégalités

$$b_{p-2}(V_m) \leq b_p(V_m) \qquad (p \leq r)$$

Naturellement F^r étant non nulle, $b_2(V_m)$, $b_4(V_m)$, ..., $b_{2r}(V_m)$ sont non nuls. Enfin $d_{q,o}$ est pair pour q impair, inférieur ou égal à r. En particulier $b_1(V_m)$ est congru modulo 2 à $d_{o,1}$; pour $m = 2_r + 1$, b_1 est impair.

13. Etude des variétés pseudo-kählérienhes, comme variétés presque hermitiques.

Une variété pseudo-kählérienne est une variété V_{2n} pourvue d'une forme quadratique F de rang $2n$ et d'une métrique que nous pouvons toujours supposer échangeable avec F, la forme étant à dérivée covariante nulle dans la métrique.

Plus généralement, considérons une variété V_{2n} admettant une forme quadratique F de rang $2n$ et donnons-nous une métrique échangeable avec F. A ces données correspondent une structure presque complexe et par suite une structure presque hermitique [7]. On peut le mettre en évidence de la manière suivante : il existe des formes réelles locales (ω^i) (i et tout indice latin $= 1,\ldots,2n$) telles qu'on ait simultanément [18]

$$ds^2 = \sum_\alpha [(\omega^\alpha)^2 + (\omega^{\alpha^*})^2], \quad F = \sum_\alpha \omega^\alpha \wedge \omega^{\alpha^*} \quad (\alpha = 1,\ldots,n \ ; \ \alpha^* = \alpha + n)$$

Si l'on introduit les formes de différentielles réelles à coefficients complexes définie par :

$$\theta^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^\alpha + i\omega^{\alpha^*}), \qquad \theta^{\alpha^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^\alpha - i\omega^{\alpha^*})$$

il vient

$$ds^2 = 2\sum_\alpha \theta^\alpha\ \theta^{\alpha^*}, \qquad F = i\sum_\alpha \theta^\alpha \wedge \theta^{\alpha^*}$$

Dans la suite les éléments géométriques introduits sont relatifs à la connexion riemannienne associée au ds^2, mais sont exprimées par leurs composantes relativement aux (θ^i). Supposons la connexion riemannienne définie par les ω_i^j ; cette connexion étant sans torsion, il vient

$$\begin{cases} d\theta^\alpha = \theta^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \theta^{\beta^*} \wedge \omega_{\beta^*}^\alpha \\ d\theta^{\alpha^*} = \theta^\beta \wedge \omega_\beta^{\alpha^*} + \theta^{\beta^*} \wedge \omega_{\beta^*}^{\alpha^*} \end{cases}$$

Nous poserons dans la suite

$$\omega_i^j = \gamma_i^j{}_k \theta^k$$

on voit immédiatement que dans tous les cas :

$$\nabla_\gamma F_{\alpha\beta^*} = i \nabla_\gamma g_{\alpha\beta^*} = 0$$

Par suite si la forme F est <u>fermée</u> (variété presque kählérienne subordonnée à une variété symplectique), $\nabla_\gamma F_{\alpha^*\beta^*} = 2i\, \gamma^\alpha_{\beta^*\gamma} = 0$.

Si les parties réelles et imaginaires de θ^α sont des formes <u>analytiques réelles</u> sur V_{2n} de classe C^ω , on voit aussi que pour que les θ^α définissent une structure analytique complexe, il faut et il suffit que

$$\nabla_{\gamma^*} F_{\alpha^*\beta^*} = 2i\, \gamma^\alpha_{\beta^*\gamma^*} = 0 \quad .$$

Enfin pour que la variété initialement considérée soit pseudo-kählérienne il faut et il suffit que $\omega^\alpha_{\beta^*} = 0$. On voit ainsi que toute variété pesudo-kählérienne, analytique réelle, et à forme et métrique analytiques réelles, est kählérienne

Il serait intéressant de savoir si toute variété pesudo-kählérienne est homéomorphe à une variété kählérienne.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIDAL (P.) et de RHAM (G.). - Les formes différentielles harmoniques, Comment. Math. Helvet., t. 19, 1946/47, p. 1-49.

[2] BOCHNER (S.). - Curvature and Betti numbers, Annals of Math., Series 2, t. 49, 1948, p. 379-390.

[3] CARTAN (Henri). - Variétés riemanniennes, variétés analytiques complexes, variétés kählériennes, Séminaire H. Cartan, t. 4, 1951/52, exposé n° 1.

[4] CHERN (Shiing-shen). - Topics in differential geometry. - Princeton, Institute for advanced Study, 1951 (multigraphié).

[5] ECKMANN (B.) et GUGGENHEIMER (H.). - Formes différentielles et métrique hermitienne sans torsion, I : Structure complexe, formes pures, II : Formes de classes k , formes analytiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 229, 1949, p. 464-466 et 489-491.

[6] ECKMANN (B.) et GUGGENHEIMER (H.). - Sur les variétés closes à métrique hermitienne sans torsion, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 229, 1949, p. 503-505.

[7] EHRESMANN (Charles). - Sur les variétés presque complexes, Séminaire Bourbaki t. 3, 1950/51.

[8] EHRESMANN (Charles). - Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, Colloque de Topologie [1950.Bruxelles.]. - Liège, Georges Thone ; Paris, Masson, 1951 (Centre belge de Recherches mathématiques) ; p. 29-55.

[9] HODGE (W. V. D.). - The theory and applications of harmonic integrals. - Cambridge, University Press ; New York, Macmillan, 1941.

[10] HODGE (W. V. D.). - Differential forms on a kähler manifold, Proc. Cambridge philos. Soc., t. 47, 1951, p. 504-517.

[11] LEPAGE (Th. H.). - Sur certains idéaux de l'algèbre extérieure de degré $2n$, $n > 1$, Algèbre et Théorie des nombres [1949. Paris.]. - Paris, centre national de la Recherche scientifique, 1950 (Coll. intern. du C. N. R. S., 24) ; p. 181-186.

[12] LICHNEROWICZ (André). - Courbure et nombres de Betti d'une variété riemannienne compacte, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 226, 1948, p. 1678-1680.

[13] LICHNEROWICZ (André). - Sur les variétés riemanniennes admettant une forme quadratique extérieure à dérivée covariante nulle, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 231, 1950, p. 1413-1415.

[14] LICHNEROWICZ (André). - Formes à dérivée covariante nulle sur une variété riemannienne, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 232, 1951, p. 146-147.

[15] LICHNEROWICZ (André). - Sur les variétés riemanniennes admettant une forme à dérivée covariante nulle, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 232, 1951, p. 677-679.

[16] LICHNEROWICZ (André). - Sur les formes harmoniques des variétés riemanniennes localement réductibles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 232, 1951, p. 1634-1636.

[17] LICHNEROWICZ (André). - Sur les variétés symplectiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 233, 1951, p. 723-725.

[18] LICHNEROWICZ (André). - Généralisations de la géométrie kählérienne globale, Colloque de Géométrie différentielle [1951. Louvain.]. - Liège, Georges Thone ; Paris, Masson, 1951 (Centre belge de Recherches mathématiques) ; p. 99-122.

[19] de RHAM (G.) and KODAIRA (K.). - Harmonic integrals [Lectures delivered in a Seminar Weyl-Siegel, 1950]. - Princeton, Institute for advanced Study, 1953 (multigraphié).

[20] WEIL (André). - Sur la théorie des formes différentielles attachées à une variété analytique complexe, Comment. Math. Helvet., t. 20, 1947, p. 110-116.

[21] WHITNEY (Hassler). - Differentiable manifolds, Annals of Math., Series 2, t. 37, 1936, p. 645-680.