

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN BRACONNIER

## **Sous-algèbres sous-invariantes d'une algèbre de Lie et tour des dérivations**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1954, exp. n° 56, p. 59-65

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1951-1954\\_\\_2\\_\\_59\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__59_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOUS-ALGÈBRES SOUS-INVARIANTES D'UNE ALGÈBRE DE LIE  
ET TOUR DES DÉRIVATIONS

par Jean BRACONNIER  
(d'après E. SCHENKMAN [1])

1. Dérivations d'une algèbre de Lie.

Soit  $\mathfrak{a}$  une algèbre de Lie sur un corps commutatif  $K$ . Si  $x \in \mathfrak{a}$ , on désigne par  $\text{ad}(x)$  l'endomorphisme  $y \rightarrow [y, x]$  de l'espace vectoriel  $\mathfrak{a}$ . On dit qu'un sous-espace de  $\mathfrak{a}$  est un idéal de  $\mathfrak{a}$  s'il est appliqué dans lui-même par tous les  $\text{ad}(x)$  ( $x \in \mathfrak{a}$ ). On dit que  $\mathfrak{a} \neq 0$  est simple si les seuls idéaux de  $\mathfrak{a}$  sont  $\{0\}$  et  $\mathfrak{a}$ . On appelle centralisateur d'une partie  $X$  de  $\mathfrak{a}$  l'ensemble  $\mathfrak{z}(X)$  des  $x$  tels que  $\text{ad}(x).X = 0$ ; le centralisateur de  $X$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{a}$  et un idéal de  $\mathfrak{a}$  si  $X$  est un idéal de  $\mathfrak{a}$ . Le centralisateur  $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$  de  $\mathfrak{a}$  s'appelle le centre de  $\mathfrak{a}$ .

On appelle dérivation d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  un endomorphisme  $D$  de l'espace vectoriel  $\mathfrak{a}$  tel que  $D.[x, y] = [D.x, y] + [x, D.y]$  quels que soient  $x$  et  $y$ . L'espace vectoriel  $\mathfrak{D}(\mathfrak{a})$  des dérivations de  $\mathfrak{a}$  est une algèbre de Lie si on le munit de la loi de composition  $(D_1, D_2) \mapsto [D_1, D_2] = D_2 \circ D_1 - D_1 \circ D_2$ . Si  $x \in \mathfrak{a}$ ,  $\text{ad}(x)$  est une dérivations de  $\mathfrak{a}$ , dite intérieure et on a  $[\text{ad}(x), D] = \text{ad}(D.x)$ , si  $x \in \mathfrak{a}$  et  $D \in \mathfrak{D}(\mathfrak{a})$ . On en déduit moyennant un calcul immédiat le résultat suivant :

PROPOSITION 1. -  $x \rightarrow \text{ad}(x)$  est un homomorphisme de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{D}(\mathfrak{a})$  dont le noyau est le centre  $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$  de  $\mathfrak{a}$ ;  $\text{ad}(\mathfrak{a})$  est un idéal de  $\mathfrak{D}(\mathfrak{a})$  dont le centralisateur est formé des  $D$  telles que  $D.\mathfrak{a} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ .

En itérant le procédé et en posant  $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{D}_i = \mathfrak{D}_i(\mathfrak{a}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{D}_{i-1})$ , si  $i > 0$ , on voit qu'on obtient pour tout  $i > 0$  un homomorphisme  $\text{ad}_i$  de  $\mathfrak{D}_{i-1}$  sur un idéal  $\text{ad}_i(\mathfrak{D}_{i-1})$  de  $\mathfrak{D}_i$  et que le centralisateur de cet idéal est formé des dérivations  $D$  de  $\mathfrak{D}_{i-1}$  dont l'image est contenue dans le centre de  $\mathfrak{D}_{i-1}$ .

En particulier, si  $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = 0$ , on a  $\mathfrak{z}(\mathfrak{D}_i) = 0$  pour tout  $i$ . En identifiant  $\mathfrak{D}_{i-1}$  à son image par l'isomorphisme  $\text{ad}_i$ ,  $\mathfrak{D}_{i-1}$  est un idéal de  $\mathfrak{D}_i$ .

dont le centralisateur dans  $\mathcal{O}_1$  est 0.

2. Algèbres nilpotentes.

a) Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre de Lie et, si  $B \subset \mathcal{A}$  et  $C \subset \mathcal{A}$ , soit  $[B, C]$  le sous-espace engendré par les  $[b, c]$  ( $b \in B, c \in C$ ) et  $\{B, C\}$  la sous-algèbre de  $\mathcal{A}$  engendrée par  $B \cup C$ ; si  $B$  est un idéal et  $C$  une sous-algèbre, on a  $\{B, C\} = B + C$ ; si  $B$  et  $C$  sont des idéaux,  $[B, C]$  et  $B + C$  sont des idéaux. Si on pose  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^1 = \mathcal{A}$  et si  $k > 1$   $\mathcal{A}^k = [\mathcal{A}^{k-1}, \mathcal{A}]$  (resp.  $\mathcal{A}^{(k)} = [\mathcal{A}^{(k-1)}, \mathcal{A}^{(k-1)}]$ ),  $(\mathcal{A}^k)_k$  (resp.  $(\mathcal{A}^{(k)})_k$ ) est une suite décroissante d'idéaux de  $\mathcal{A}$  et on a  $\mathcal{A}^{(k)} \subset \mathcal{A}^{2k}$ ;  $\mathcal{A}^\omega = \bigcap \mathcal{A}^k$  et  $\mathcal{A}^{(\omega)} = \bigcap \mathcal{A}^{(k)} \subset \mathcal{A}^\omega$  sont des idéaux de  $\mathcal{A}$ . Si  $\mathcal{A}^\omega = 0$  (resp.  $\mathcal{A}^{(\omega)} = 0$ ) on dit que  $\mathcal{A}$  est nilpotente (resp. résoluble); toute sous-algèbre de  $\mathcal{A}$  et tout quotient de  $\mathcal{A}$  par un idéal sont alors nilpotents (resp. résolubles). Si  $b$  et  $c$  sont des idéaux nilpotents (resp. résolubles) de  $\mathcal{A}$ ,  $b + c$  est nilpotent (resp. résoluble); il existe donc un plus grand idéal nilpotent  $N(\mathcal{A})$  (resp. résoluble  $R(\mathcal{A})$ ) de  $\mathcal{A}$  et on a  $R(\mathcal{A}/R(\mathcal{A})) = 0$ . On appelle  $R(\mathcal{A})$  le radical de  $\mathcal{A}$  et, si  $R(\mathcal{A}) = 0$ , on dit que  $\mathcal{A}$  est semi-simple. Dans tout ce qui suit, on ne considèrera que des algèbres de dimension finie; il existe alors  $k$  tel que  $\mathcal{A}^k = \mathcal{A}^{k+1} = \mathcal{A}^\omega$  (resp.  $\mathcal{A}^{(k)} = \mathcal{A}^{(k+1)} = \mathcal{A}^{(\omega)}$ ).

b) Si  $u$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel  $\mathcal{A}$  (de dimension finie sur  $K$ ), on désigne par  $\mathcal{A}(u)$  le noyau de  $u$ .  $(u^k \cdot \mathcal{A})$  est une suite décroissante de sous-espaces de  $\mathcal{A}$  et il existe  $k$  tel que  $u^k \cdot \mathcal{A} = u^{k+1} \cdot \mathcal{A}$ ; on a alors  $\mathcal{A} = u^k \cdot \mathcal{A} + \mathcal{A}(u^k)$ . On dit que  $u$  est nilpotent si  $u^k \cdot \mathcal{A} = 0$  pour un entier  $k$ . Si  $D$  est une dérivation d'une algèbre de Lie  $\mathcal{A}$ , la réunion de la suite croissante  $(\mathcal{A}(D^k))$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{A}$  (car  $D^{2k}[x, y] = \sum_{p=0}^{2k} \binom{2k}{p} [D^p \cdot x, D^{2k-p} \cdot y]$ ) (LEIBNIZ).

c) PROPOSITION 2. - Si  $\mathcal{A}$  est nilpotente et si  $b$  est un idéal non nul de  $\mathcal{A}$ , on a  $b \cap \mathfrak{Z}(\mathcal{A}) \neq 0$ .

En effet, si on pose  $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}$  et  $b_k = [\dots [b, \mathcal{A}_1], \dots, \mathcal{A}_k]$  si  $k > 0$  et  $b_0 = b$ , on a  $b_k \subset b$  car  $b$  est un idéal.  $(b_k)$  est une suite décroissante d'idéaux; il existe donc  $k \geq 0$  tel que  $b_k \neq 0$  et  $b_{k+1} = 0$  car  $\mathcal{A}$  est nilpotente et  $b_k \subset b \cap \mathfrak{Z}(\mathcal{A})$ .

En particulier si  $\mathcal{A} \neq 0$  est nilpotente,  $\mathfrak{Z}(\mathcal{A}) \neq 0$ .

**THÉOREME 1.** - Pour qu'une algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  soit nilpotente, il faut et il suffit que  $\text{ad}(x)$  soit nilpotent pour tout  $x \in \mathfrak{a}$ .

C'est évidemment nécessaire. C'est suffisant d'après le théorème d'Engel.

**THÉOREME 2.** - Si  $\mathfrak{a}$  est une algèbre de Lie, on a  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^\omega + \mathfrak{h}$  où  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre nilpotente de  $\mathfrak{a}$ .

On le montre par récurrence sur  $\dim \mathfrak{a}$ . C'est trivial si  $\dim \mathfrak{a} = 0$ . Si  $\dim \mathfrak{a} > 0$ , supposons-le démontré pour toutes les algèbres de dimension  $< \dim \mathfrak{a}$ . Si pour tout  $x \in \mathfrak{a}$ ,  $\text{ad}(x)$  est nilpotent,  $\mathfrak{a}$  est nilpotente d'après le théorème 1. Dans le cas contraire, il existe  $x \in \mathfrak{a}$  tel que  $\text{ad}(x)^k \cdot \mathfrak{a} \neq 0$  pour tout  $k$ . Soit  $\mathfrak{i}$  l'intersection des  $\text{ad}(x)^k \cdot \mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{n}$  la sous-algèbre de  $\mathfrak{a}$  réunion des  $\mathfrak{a}(\text{ad}(x)^k)$ . On a  $\mathfrak{a} = \mathfrak{i} + \mathfrak{n}$  et  $\dim \mathfrak{n} < \dim \mathfrak{a}$ ; donc  $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^\omega + \mathfrak{h}$  où  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre nilpotente de  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{a}^\omega$  car  $\text{ad}(x) \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{i}$ . D'où  $\mathfrak{a} = \mathfrak{i} + \mathfrak{n}^\omega + \mathfrak{h} = \mathfrak{a}^\omega + \mathfrak{h}$ .

### 3. Sous-algèbres sous-invariantes.

Soient  $\mathfrak{b}$  et  $\mathfrak{c}$  deux sous-algèbres d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  telles que  $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{b}$ . On appelle suite de composition joignant  $\mathfrak{b}$  à  $\mathfrak{c}$  une suite décroissante  $(\mathfrak{a}_i)_{0 \leq i \leq k}$  de sous-algèbres de  $\mathfrak{a}$  telle que  $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}$  et  $\mathfrak{a}_k = \mathfrak{c}$  et que  $\mathfrak{a}_{i+1}$  soit un idéal de  $\mathfrak{a}_i$  pour tout  $i$ . S'il existe une suite de composition joignant  $\mathfrak{b}$  à  $\mathfrak{c}$ , on dit que  $\mathfrak{c}$  est sous-invariante dans  $\mathfrak{b}$ .

**PROPOSITION 3.** - Si  $\mathfrak{b}$  est une sous-algèbre sous-invariante d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{b}^\omega$  et  $\mathfrak{b}^{(\omega)}$  sont des idéaux.

On montre par récurrence sur  $n$  que, si  $(\mathfrak{a}_i)_{0 \leq i \leq n}$  est une suite décroissante de sous-algèbres de  $\mathfrak{a}$ , on a  $[\mathfrak{a}_n^r, \mathfrak{a}_0] \subset [\mathfrak{a}_n, [\mathfrak{a}_{n-1}, \dots, \mathfrak{a}_0] \dots]$ . Ceci étant, soit  $(\mathfrak{b}_i)_{0 \leq i \leq q}$  une suite de composition joignant  $\mathfrak{a}$  à  $\mathfrak{b}$  et  $p$  tel que  $\mathfrak{b}^p = \mathfrak{b}^\omega$ . Posons  $n = p+q-1$ ,  $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}_i$  si  $0 \leq i \leq k$ ,  $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}$  dans le cas contraire. Comme  $\mathfrak{a}_{i+1}$  est un idéal de  $\mathfrak{a}_i$ , on a  $[\mathfrak{b}^n, \mathfrak{a}] \in \mathfrak{b}^p$ , d'où  $[\mathfrak{b}^\omega, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{b}^\omega$ . En particulier, si  $\mathfrak{b}_1$  est sous-invariante et si  $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_1^2$ ,  $\mathfrak{b}_1$  est un idéal. Si  $p'$  est tel que  $\mathfrak{b}^{p'} = \mathfrak{b}^{(\omega)}$ , on a alors  $\mathfrak{b}^{(\omega)} = \mathfrak{b}^{(\omega)2}$  et  $\mathfrak{b}^{(\omega)}$  est un idéal.

On dit qu'une suite de composition  $(\mathfrak{a}_i)_{0 \leq i \leq k}$  joignant  $\mathfrak{b}$  à  $\mathfrak{c}$  est une

suite de Jordan-Hölder si tous les quotients  $\mathcal{Q}_i/\mathcal{Q}_{i+1}$  sont simples, i.e. si, pour tout  $i$ ,  $\mathcal{Q}_{i+1}$  est un idéal maximal de  $\mathcal{Q}_i$ . Toute suite de composition joignant  $b$  à  $c$  est extraite (en répétant au besoin certains termes) d'une suite de Jordan-Hölder joignant  $b$  à  $c$  (théorème de Schreier); si  $(\mathcal{Q}_i)_{0 \leq i \leq m}$  et  $(b_j)_{0 \leq j \leq n}$  sont deux suites de Jordan-Hölder joignant  $b$  à  $c$ , on a  $m = n$  et il existe une permutation  $\varphi$  de  $[0, m]$  telle que  $\mathcal{Q}_i$  soit isomorphe à  $b_{\varphi(i)}$  pour tout  $i$  (théorème de Jordan-Hölder).

PROPOSITION 4. - Si  $b$  et  $c$  sont deux sous-algèbres sous-invariantes de  $\mathcal{Q}$ ,

a)  $b \cap d$  est sous-invariante dans toute sous-algèbre  $d$  de  $\mathcal{Q}$ ;

b)  $b \cap c$  est sous-invariante dans  $\mathcal{Q}$ ;

c) les quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant  $c$  à  $b \cap c$  sont des quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant  $\mathcal{Q}$  à  $b$ .

Les a) et b) sont immédiats. c) l'est aussi si  $(\mathcal{Q}_i)$  est une suite de Jordan-Hölder joignant  $\mathcal{Q}$  à  $b$ , ou bien  $\mathcal{Q}_{i+1} \cap b = \mathcal{Q}_i \cap b$ , ou bien  $\mathcal{Q}_{i+1} \cap b$  est un idéal maximal de  $\mathcal{Q}_i \cap b$  et, dans ce cas,  $(\mathcal{Q}_i \cap b)/(\mathcal{Q}_{i+1} \cap b)$  est isomorphe à  $\mathcal{Q}_i/\mathcal{Q}_{i+1}$ . On démontre aussi facilement la

PROPOSITION 5. - Si  $f$  est un homomorphisme de  $\mathcal{Q}$  sur  $\mathcal{Q}'$ ,  $f \cdot b$  est sous-invariante dans  $\mathcal{Q}'$ ; si  $b'$  est sous-invariante dans  $\mathcal{Q}'$ ,  $f^{-1}(b')$  est sous-invariante dans  $\mathcal{Q}$ .

Si  $\mathcal{Q}$  est une algèbre, toute sous-algèbre  $b \subset N(\mathcal{Q})$  est sous-invariante dans  $\mathcal{Q}$  (car  $(N(\mathcal{Q})^k + b)$  est une suite de composition joignant  $N(\mathcal{Q})$  à  $b$  et  $N(\mathcal{Q})$  est un idéal de  $\mathcal{Q}$ ).

Pour qu'une algèbre de Lie  $\mathcal{Q}$  soit résoluble, il faut et il suffit que les quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant  $\mathcal{Q}$  à 0 soient de dimension 1.

Si  $b$  est une sous-algèbre quelconque d'une algèbre de Lie  $\mathcal{Q}$ , l'intersection  $b^*$  des sous-algèbres sous-invariantes de  $\mathcal{Q}$  qui contiennent  $b$  est sous-invariante. Si  $b$  et  $c$  sont des sous-algèbres de  $\mathcal{Q}$  telles que  $\{b, c\} = b + c$ , alors  $\{b^*, c^*\} = b^* + c^*$ .

#### 4. Le théorème fondamental

THÉORÈME 3. - Si  $b$  est une sous-algèbre sous-invariante d'une algèbre de Lie

$\alpha$ , et si  $\mathfrak{Z}(b) = 0$ , on a  $\mathfrak{Z}(b^\omega) \subset b^\omega$ .

LEMME. - Si  $\alpha$  est une algèbre à centre nul, on a  $\mathfrak{Z}(\alpha^\omega) \subset \alpha^\omega$ .

En effet, on a  $\alpha = \alpha^\omega + k$  où  $k$  est nilpotente (théorème 2). Soit  $\alpha_1 = \mathfrak{Z}(\alpha^\omega) + k = \alpha_1^\omega + h$  où  $h$  est nilpotente. On a  $\alpha = \alpha^\omega + k \subset \alpha^\omega + \alpha_1 \subset \alpha^\omega + h$ . De plus  $\alpha_1^\omega = (\mathfrak{Z}(\alpha^\omega) + h)^\omega \subset \mathfrak{Z}(\alpha^\omega)$ . Si  $\mathfrak{Z}(\alpha^\omega) \not\subset \alpha^\omega$ , il existe  $y \in \mathfrak{Z}(\alpha^\omega) \cap \alpha^\omega$  (sinon  $\mathfrak{Z}(\alpha^\omega) \subset \alpha_1^\omega \subset \alpha^\omega$ ); on a  $y = x + x'$  avec  $x' \in \alpha_1^\omega$ ,  $x \in h$  et  $x \neq 0$ ;  $x = y - x' \in \mathfrak{Z}(\alpha^\omega) + \alpha_1^\omega \subset \mathfrak{Z}(\alpha^\omega)$ ; donc

$\mathfrak{Z}(\alpha^\omega) \cap h$  est idéal non nul de  $h$  (proposition 3 et proposition 2). On a  $0 \neq h \cap \mathfrak{Z}(\alpha^\omega) \cap \mathfrak{Z}(h) \subset \mathfrak{Z}(\alpha^\omega + h) = \mathfrak{Z}(\alpha)$  ce qui est absurde.

Cela étant, on a  $b \cap \mathfrak{Z}(b^\omega) \subset b^\omega$  (sinon  $0 \neq \mathfrak{Z}(b) \cap b \subset \mathfrak{Z}(b)$  d'après le lemme). Si  $\mathfrak{Z}(b^\omega) \not\subset b^\omega$ , on a  $\mathfrak{Z}(b^\omega) \not\subset b$  (sinon  $\mathfrak{Z}(b^\omega) \subset b \cap \mathfrak{Z}(b^\omega) \subset b^\omega$ ).  $b^\omega$  est un idéal (proposition 3) et il en est de même de  $\mathfrak{Z}(b^\omega)$ .  $C = b + \mathfrak{Z}(b^\omega)$  est une sous-algèbre de  $\alpha$ , et  $b$  est une sous-algèbre sous-invariante de  $C$ , et  $b \neq C$ ; soit  $b_1$  une sous-algèbre de  $C$  telle que  $b$  soit un idéal de  $b_1$  et  $b \neq b_1$ . Soit  $y \in b_1 \cap \alpha^\omega$ ; on a  $y = x + x'$  avec  $x \in \mathfrak{Z}(b^\omega)$  et  $x' \in b \subset b_1$  et  $x = y - x' \in \mathfrak{Z}(b^\omega) \cap b_1$  n'appartient pas à  $b$ . Si  $\delta = Kx + b$ , on a  $b^\omega = \delta^\omega$  (car  $[b, x] \subset b \cap \mathfrak{Z}(b^\omega) \subset b^\omega$  et  $\delta^2 \subset b^\omega$ , d'où  $\delta^\omega \subset b^\omega$ ). On a  $\mathfrak{Z}(\delta^\omega) \cap \delta \not\subset \delta^\omega$  (sinon  $x \in \mathfrak{Z}(b^\omega) \cap \delta \subset b^\omega \subset b$ ). Donc le centre  $\mathfrak{Z}(\delta) \cap \delta$  de  $\delta$  est non nul d'après le lemme et  $0 \neq \mathfrak{Z}(\delta) \subset \mathfrak{Z}(b)$ , ce qui est absurde.

THÉORÈME 4. - Si  $b$  est une sous-algèbre sous-invariante d'une algèbre de Lie  $\alpha$  telle que  $\mathfrak{Z}(b) = 0$ , on a  $\dim \alpha \leq \dim \mathfrak{U}(b^\omega) + \dim(\text{centre de } b^\omega)$ .

En effet,  $b^\omega$  est un idéal de  $\alpha$  (proposition 3) et  $\mathfrak{Z}(b^\omega)$  est le centre de l'algèbre  $b^\omega$  (théorème 3). Enfin,  $x \rightarrow$  restriction à  $b^\omega$  de  $\text{ad}(x)$  est un homomorphisme de  $\alpha$  dans  $\mathfrak{U}(b^\omega)$  dont le noyau est  $\mathfrak{Z}(b^\omega)$ . On a donc  $\dim \alpha - \dim \mathfrak{Z}(b^\omega) = \dim \alpha / \mathfrak{Z}(b^\omega) \leq \dim \mathfrak{U}(b^\omega)$ .

THÉORÈME de la tour des dérivations. - Si  $\alpha$  est une algèbre de Lie à centre nul, on a  $\dim \mathfrak{U}_i(\alpha) \leq \dim \alpha^\omega + \dim \text{centre } \alpha^\omega$  pour tout  $i \geq 0$ .

On montre d'abord facilement que si  $\alpha$  est une algèbre de Lie, si  $b_1$  est sous-invariante dans  $\alpha$ , si  $b$  est un idéal de  $b_1$  et si  $\mathfrak{Z}(b) \cap b_1 = 0$  et  $\mathfrak{Z}(b_1) = 0$ , on a  $\mathfrak{Z}(b) = 0$ .

Ceci étant, avec les notations du numéro 1, on voit que étant donné  $i$ ,  $(\mathbb{Q}_k)_{0 \leq k \leq i}$  est une suite de composition joignant  $\alpha$  à  $\mathbb{Q}_i$  et que  $\mathfrak{Z}(\mathbb{Q}_{k-1}) \cap \mathbb{Q}_k = 0$  si  $0 < k \leq i$ . D'après la remarque précédente on voit (en raisonnant par récurrence sur  $k$ ) que  $\mathfrak{Z}(\mathbb{Q}_{i-k}) = 0$ , d'où (dans  $\mathbb{Q}_i$ )  $\mathfrak{Z}(\alpha) = 0$  et le théorème est alors conséquence immédiate du théorème 4.

**COROLLAIRE.** - Si  $i$  est assez grand, toutes les dérivations de  $\mathbb{Q}_i(\alpha)$  sont intérieures (résultat annoncé par C. CHEVALLEY dans le cas des algèbres sur un corps de caractéristique 0).

5. Sous-algèbres d'une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0.

Dans le cas des algèbres de Lie sur un corps  $K$  de caractéristique 0 (on ne considèrera que de telles algèbres dans la suite), on peut apporter d'importants compléments aux numéros 2 et 3. Si  $\alpha$  est une algèbre de Lie résoluble,  $\alpha^2$  est nilpotente (théorème de Lie). Si  $\alpha$  est semi-simple,  $\alpha$  est somme directe d'une famille finie d'idéaux simples non commutatifs (théorème de Cartan). Si  $\alpha$  est une algèbre de Lie, on a  $\alpha = \alpha^{(\omega)} + R(\alpha)$  (car  $\alpha/R(\alpha) = [\alpha/R(\alpha)]^{(\omega)} = [\alpha^{(\omega)} + R(\alpha)]/R(\alpha)$ ) cf. théorème 2.

Pour toute dérivation  $D$  de  $\alpha$ , on a

- (1)  $D.N(\alpha) \subset N(\alpha)$ ,
- (2)  $D.R(\alpha) \subset R(\alpha)$ ,
- (3)  $D.R(\alpha) \subset N(\alpha)$

((1) résulte du théorème de Lie, (3) du théorème de Cartan, et (2) de (1) et (3)). On en déduit que si  $b$  est une sous-algèbre sous-invariante de  $\alpha$ , on a  $b \subset R(\alpha)$  si  $b$  est résoluble,  $b \subset N(\alpha)$  si  $b$  est nilpotente. D'où  $R(b) = \alpha \cap R(\alpha)$  et  $N(b) = b \cap N(\alpha)$ .

**THÉOREME 5.** - Si  $b$  et  $c$  sont deux sous-algèbres sous-invariantes d'une algèbre de Lie  $\alpha$ ,  $\{b, c\}$  est sous-invariante et les quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant  $\{b, c\}$  à  $b$  sont des quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant  $c$  à  $b \cap c$ , abstraction faite de la multiplicité des quotients de dimension 1.

Pour voir que  $\{b, c\}$  est sous-invariante, on distingue deux cas : si  $b$  et  $c$  sont nilpotentes, on a  $\{b, c\} \subset N(\alpha)$  et  $\{b, c\}$  est sous-invariante

dans l'idéal  $N(\mathcal{Q})$  de  $\mathcal{Q}$  ; dans l'autre cas, on projette sur  $\mathcal{Q}(b^\omega + c^\omega)$ , et on est ramené au cas précédent. Pour voir le reste, si  $\varphi$  est l'application canonique de  $\mathcal{Q}$  sur  $\mathcal{Q}/b^{(\omega)}$ , on remarque que les quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant  $\{b, c\}$  à  $b$  sont les mêmes que ceux d'une suite joignant  $\varphi \cdot \{b, c\}$  à  $\varphi \cdot b$  et que les quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant  $\varphi \cdot c$  à  $\varphi \cdot (b \cap c)$  sont des quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant  $c$  à  $b \cap c$  (propositions 4 et 5).

Si  $b$  est une sous-algèbre quelconque de  $\mathcal{Q}$ , la sous-algèbre  $b_*$  engendrée par toutes les sous-algèbres sous-invariantes de  $\mathcal{Q}$  contenues dans  $b$  est sous-invariante ;  $b_*$  est un idéal de  $b$  et  $b_* \subset b \subset b^*$ . Si  $c$  est une sous-algèbre sous-invariante de  $\mathcal{Q}$ , les quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant  $\{b, c\}^*$  à  $\{b, c\}_*$  sont des quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant  $b^*$  à  $b_*$ .

Enfin, on peut préciser la structure de  $\{x\}^*$  ( $x \in \mathcal{Q}$ ) :

**THÉORÈME 6.** - Soit  $\mathcal{Q}$  une algèbre de Lie,  $x \in \mathcal{Q}$  et  $i(x)$  la sous-algèbre engendrée par  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \text{ad}(x)^k \cdot \mathcal{Q}$ .

a) si  $x \in R(\mathcal{Q})$ ,  $i(x)$  est un idéal de  $\mathcal{Q}$  et  $\{x\}^* = i(x) + Kx$ .

b) soient  $p$  l'homomorphisme canonique de  $\mathcal{Q}$  sur  $\mathcal{Q}/R(\mathcal{Q})$ ,  $\mathfrak{S}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) des algèbres simples non commutatives telles que  $\mathcal{Q}/R(\mathcal{Q})$  soit somme directe des  $\mathfrak{S}_i$  et soit  $\mathfrak{t}_i = p^{-1}(\mathfrak{S}_i)$  ; l'idéal  $\mathfrak{t}_i^{(\omega)}$  de  $\mathcal{Q}$  est la plus petite des sous-algèbres sous-invariantes  $\mathfrak{t}$  de  $\mathcal{Q}$  telles que  $p \cdot \mathfrak{t} = \mathfrak{S}_i$ .

c) si  $x \notin \mathcal{Q}$ , soit  $J(x)$  l'ensemble des  $i$  tels que  $\text{pr}_{\mathfrak{S}_i} \cdot p \cdot x \neq 0$  ; il existe  $y \in R(\mathcal{Q})$  tel que  $x - y \in \sum_{j \in J(x)} \mathfrak{t}_j^{(\omega)}$  et on a  $\{x\}^* = i(y) + Ky + \sum_{j \in J(x)} \mathfrak{t}_j^{(\omega)}$ .

a) On a  $\text{ad}(x) \cdot i(x) \subset i(x)$ , donc  $i(x) + Kx$  est une sous-algèbre. On a  $i(x) \subset N(\mathcal{Q})$ , et  $i(x) + Kx$  est sous-invariante dans l'idéal  $i(x) + Kx + N(\mathcal{Q})$  de  $R(\mathcal{Q})$ , donc dans  $\mathcal{Q}$ . On a  $(i(x) + Kx)^\omega = i(x)$  ce qui prouve (proposition 3) que  $i(x)$  est un idéal. Le reste est immédiat.

b) est immédiat.

c) résulte de a) et b).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] SCHENKMAN (Eugène). - A theory of subvariant Lie algebras, Amer. J. of Math., t.78, 1951, p. 453-474.