JEAN-PIERRE SERRE

# Représentations linéaires et espaces homogènes kählériens des groupes de Lie compacts

*Séminaire N. Bourbaki*, 1954, exp. n° 100, p. 447-454

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__447_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1954)

# REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES ET ESPACES HOMOGÈNES KÄHLÉRIENS DES GROUPES DE LIE COMPACTS

par Jean-Pierre SERRE.

Les résultats qui vont être exposés sont dûs à Armand BOREL et André WEIL (non publiés)

## 1. Espaces homogènes symplectiques.

Une variété compacte connexe $X$ est dite symplectique si sa dimension est un nombre pair, soit $2n$, et s'il existe $x \in H^2(X)$ tel que $x^n \neq 0$ (dans ce numéro, les groupes de cohomologie sont pris à coefficients réels). Toute variété kählérienne est symplectique.

THÉORÈME 1. - *Soient $G$ un groupe de Lie compact, connexe, semi-simple, et $U$ un sous-groupe fermé de $G$. Si $G/U$ est symplectique, il existe un tore $S \subset G$ tel que $U$ soit égal au commutant $C(S)$ de $S$ dans $G$* (autrement dit, $x \in U \Longleftrightarrow x.s = s.x$ pour tout $s \in S$).

*En particulier* (HOPF), $U$ *est un groupe connexe de même rang que* $G$.

(Un cas particulier de ce théorème se trouve dans une Note de LICHNEROWICZ [1] ; voir également [2] ).

DÉMONSTRATION. - Soit $U_o$ la composante connexe de l'élément neutre de $U$, soit $S$ (resp. $S_o$) la composante connexe de l'élément neutre du centre de $U$ (resp. du centre de $U_o$), et soit $V = C(S)$ le commutant de $S$ dans $G$. On a donc les inclusions :

$$S \subset S_o \subset U_o \subset U \subset V \subset G \quad .$$

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} H^1(V) & & \xrightarrow{\alpha} & & H^1(U_o)^{U/U_o} \\ \downarrow \tau & & & & \downarrow \tau \\ H^2(G/V) & \xrightarrow{\gamma} & H^2(G/U) & \xrightarrow{\beta} & H^2(G/U_o)^{U/U_o} \end{array} \quad ,$$

où $\tau$ désigne la transgression, et où $H^1(U_o)^{U/U_o}$ (resp. $H^2(G/U_o)^{U/U_o}$) désigne le sous-groupe de $H^1(U_o)$ (resp. de $H^2(G/U_o)$ ) formé des éléments invariants par $U/U_o$ .

Puisque $G$ est semi-simple, $H^1(G) = H^2(G) = 0$, d'où il résulte tout de suite que $\tau$ est une bijection (noter que $V$ est connexe, d'après un résultat bien connu, dû à HOPF). D'autre part, la définition même de $V$ montre que $\alpha$ est surjectif, et un théorème élémentaire sur les revêtements finis montre que $\beta$ est bijectif. Donc $\gamma$ est surjectif.

S'il existe $x \in H^2(G/U)$ avec $x^n \neq 0$ $(2n = \dim G/U)$, il existe alors aussi $x' \in H^2(G/V)$ avec $x'^n \neq 0$, ce qui entraîne évidemment $\dim G/V \geqslant 2n$, d'où $\dim V \leqslant \dim U$, d'où $V = U$ puisque $V$ est connexe, et l'on a bien $U = C(S)$.

C.Q.F.D.

REMARQUES. - Réciproquement, si $U = C(S)$, on peut construire sur $G/U$ une métrique kählérienne telle que $G/U$ soit une variété de Hodge. Cela peut se voir par une méthode "infinitésimale". Mais nous obtiendrons au n° 3 un résultat plus précis, en exhibant un plongement de $G/U$ dans un espace projectif.

On notera que, parmi les sous-groupes $U$ du type $C(S)$, se trouvent en particulier les tores maximaux de $G$.

## 2. Structure complexe sur $G/U$.

Soit $T$ un tore maximal de $G$, $\mathfrak{t}$ (resp. $\mathfrak{g}$) l'algèbre de Lie de $T$ (resp. $G$). Nous écrirons les racines de $\mathfrak{g}$ (relativement à $\mathfrak{t}$) sous la forme $2\pi i.a_i(x)$, où $a_i(x)$ est une forme linéaire réelle sur $\mathfrak{t}$. Si $a$ est une racine, on désignera par $e_a$ l'élément de $\mathfrak{g}_c$, algèbre de Lie complexifiée de $\mathfrak{g}$, tel que $[t,e_a] = 2\pi i.a(t).e_a$ pour tout $t \in \mathfrak{t}_c$ ($e_a$ est défini à une homothétie près). Si $a_1,\dots,a_r$ est un système simple de racines de $\mathfrak{g}$, on notera $W$ la partie de $\mathfrak{t}$ définie par les inégalités $a_i(t) \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant r$ ("chambre de Weyl").

Le produit scalaire $(x,y)$ défini par l'opposé de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ permet d'identifier $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{t}_c$ à leurs duals ; en particulier, les $a_i$ peuvent être considérés comme des éléments de $\mathfrak{t}$.

Nous désignerons par $\mathfrak{h}$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}_c$ engendré par $\mathfrak{t}_c$ et les $e_a$, où $a$ parcourt l'ensemble des racines $\geqslant 0$ de $\mathfrak{g}$. C'est une sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{g}_c$.

Si $b$ est un élément de $W$, soit $P_b$ l'ensemble des racines $\geqslant 0$ orthogonales à $b$ ; le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}_c$ engendré par $\mathfrak{h}$ et les $e_{-a}$, $a \in P_b$, est une sous-algèbre $\mathfrak{l}_b$ de $\mathfrak{g}_c$ (en effet, $\mathfrak{l}_b$ est engendrée par

$\mathfrak{t}_c$ et les $e_a$ où $(a,b) \geqslant 0$ , puisque $b \in W$ ). Si $b$ est intérieur à $W$ , $\mathfrak{l}_b = \mathfrak{h}$ ; si $b = 0$ , $\mathfrak{l}_b = \mathfrak{g}_c$ . On voit tout de suite que $\mathfrak{l}_b \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{C}(b)$ , en désignant par $\mathfrak{C}(b)$ l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $[x,b] = 0$ . Si $S$ est un tore de $T$ , on peut trouver dans $S$ un sous-groupe à 1 paramètre partout dense, d'où un élément $b \in \mathfrak{t}$ tel que $\mathfrak{C}(b) = \mathfrak{C}(S)$ ; en outre, en effectuant un automorphisme intérieur, on peut supposer que $b \in W$ .

Nous supposerons à partir de maintenant que $G$ est simplement connexe ; il est clair que cela ne restreint pas la généralité. Soit alors $G_c$ le groupe complexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_c$ , qui contient $G$ comme sous-groupe fermé, comme on sait ; soient $T_c$ , $H$ , $L_b$ , $C(b)$ , les sous-groupes de $G_c$ d'algèbres de Lie $\mathfrak{t}_c$ , $\mathfrak{h}$ , $\mathfrak{l}_b$ , $\mathfrak{C}(b)$ ; ce sont des sous-groupes fermés de $G_c$ (c'est évident pour $T_c$ et $C(b)$ ; pour $L_b$ , cela résulte de ce que $\mathfrak{l}_b$ est son propre normalisateur dans $\mathfrak{g}_c$ , et de même pour $H$). De plus, on peut montrer que $L_b \cap G = C(b)$ (BOREL et WEIL utilisent un raisonnement direct, mais cela résulte également du théorème 1 et de la construction du n° 3). On en déduit que $G/C(b) = G_c/L_b$ , et comme on a vu que tout $C(S)$ est égal à un $C(b)$ , on obtient finalement :

THÉORÈME 2. - Les espaces homogènes $G/U$ , où $U = C(S)$ ($S$ étant un tore de $G$) sont des espaces homogènes complexes.

En particulier, $G/T = G_c/H$ est un espace homogène complexe, comme l'avait observé BOREL dans sa thèse.

(On notera toutefois que la structure complexe de $G/U$ ainsi obtenue dépend du système simple de racines choisi).

## 3. Plongement associé à une représentation irréductible de $G_c$ .

Soit $x \to \mathfrak{a}_x$ une représentation linéaire complexe de $\mathfrak{g}_c$ dans un espace vectoriel complexe $E$ de dimension finie. Une forme linéaire $b$ sur $\mathfrak{t}_c$ est dite un poids de la représentation, s'il existe $e \neq 0$ , $e \in E$ , tel que $\mathfrak{a}_t(e) = 2\pi i . b(t) . e$ pour tout $t \in \mathfrak{t}_c$ ; un poids est dit dominant si $b + a_i$ n'est un poids pour aucune valeur de $i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ ; toute représentation possède un poids dominant ; si la représentation est irréductible, ce poids dominant est unique et l'élément $e$ correspondant est bien déterminé (à une homothétie près) ; inversement, si $E$ est engendré par les transformés d'un élément $e$ correspondant à un poids dominant, la représentation est irréductible. Enfin, les poids dominants des diverses représentations de $\mathfrak{g}_c$ sont caractérisés par les formules :

$$(a_i, b) = k_i \cdot (a_i, a_i)/2 \quad , \quad k_i \text{ entier} \geqslant 0 \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant r .$$

A tout poids dominant $b$, on peut faire correspondre l'algèbre $\mathfrak{l}_b$, comme au n° 2 (c'est licite, car $b \in W$, d'après les formules que l'on vient d'écrire) ; l'espace homogène $G/U = G_c/L_b$ sera dit <u>strictement associé</u> à la représentation irréductible de poids dominant $b$ ; tout espace $G/U = G_c/L_{b'}$, où $L_{b'} \subset L_b$ sera dit <u>associé</u> à cette représentation. On observera que, si $b'$ est un élément quelconque de $W$, il existe toujours un poids dominant $b$ tel que $L_b = L_{b'}$ : il suffit de prendre $b$ orthogonal aux mêmes $a_i$ que $b'$, ce qui est évidemment possible. Donc <u>tout espace</u> $G/U$ <u>du type étudié plus haut est strictement associé à une représentation irréductible de</u> $G_c$.

Soit alors $x \to a_x$ une telle représentation de $\mathfrak{g}_c$ dans un espace vectoriel $E$, et prolongeons-la en une représentation analytique $x \to A_x$ de $G_c$. Si $e$ est un élément $\neq 0$ de $E$ correspondant au poids dominant $b$, $e$ est un vecteur propre de $L_b$ ; inversement, si $x \in G_c$ est tel que $A_x$ admette $e$ pour vecteur propre, on a $x \in L_b$ (on vérifie d'abord, par la théorie infinitésimale, que, si $e$ est vecteur propre de $a_x$, on a $x \in \mathfrak{l}_b$ ; il en résulte évidemment que, si $e$ est vecteur propre de $A_x$, $x$ est contenu dans le normalisateur de $L_b$ ; tout revient donc à prouver que $L_b$ est son propre normalisateur dans $G_c$, ce que BOREL et WEIL démontrent par un raisonnement direct, utilisant un résultat de Gantmacher ; mais cela résulte aussi du théorème 1 et des résultats établis cidessous).

Soit $P$ l'espace projectif complexe quotient de $E - \{0\}$ par la relation d'équivalence définie par les homothéties, et soit $\pi$ la projection canonique de $E - \{0\}$ sur $P$. A tout $x \in G_c$ nous ferons correspondre l'élément $\pi(A_x \cdot e) \in P$ ; on obtient ainsi une application analytique $\varphi_b : G_c \to P$, constante sur les classes mod $L_b$, donc qui définit $\tilde{\varphi}_b : G_c/L_b \to P$ ; d'après ce qui précède, $\tilde{\varphi}_b$ est biunivoque. On vérifie par un raisonnement infinitésimal que $\tilde{\varphi}_b$ est partout de rang maximum (il suffit de le voir à l'élément neutre de $G_c$), donc :

<u>THÉORÈME 3</u>. - <u>Toute représentation irréductible de</u> $G_c$, <u>de poids dominant</u> $b$, <u>définit un plongement</u> $\tilde{\varphi}_b$ <u>de</u> $G_c/L_b = G/U$ <u>comme sous-variété analytique sans</u>

singularités (donc algébrique, d'après CHOW) de l'espace projectif complexe associé à l'espace de la représentation.

En particulier, les variétés $G/U$ sont des variétés algébriques.

Si $G/U$ est simplement associé à la représentation $A_x$, on obtient par composition : $G/U \to G_c/L_b \xrightarrow{\tilde{\varphi}_b} P$ une application analytique de $G/U$ dans $P$, d'où un système linéaire de diviseurs sur $G/U$ : l'image réciproque des sections hyperplanes de $\tilde{\varphi}_b(G_c/L_b)$. Nous verrons au n° 4 que ce système est complet ; notons dès maintenant qu'en tout cas l'image de $G/U$ dans $P$ n'est contenue dans aucun sous-espace projectif de $P$, vu l'irréductibilité de $A_x$.

Les diviseurs du système linéaire précédent définissent une classe de cohomologie $h \in H^2(G/U,Z)$ ; d'autre part, le poids $b$ peut être identifié à un élément de $H^1(U,Z)$, donc de $H^2(G/U,Z)$, par transgression. On peut montrer que les éléments $h$ et $b$ coïncident (au signe près, dépendant des conventions d'orientation choisies).

## 4. Représentation irréductible associée à une classe de diviseurs sur $G/U$.

Soit $G/U = G_c/L$ un espace homogène du type étudié ci-dessus. Considérons une classe $d$ de diviseurs sur $G/U$ contenant au moins un diviseur $D > 0$ (rappelons que deux diviseurs sont dans la même classe, ou sont linéairement équivalents, si leur différence est égale au diviseur d'une fonction méromorphe). Soit $|D|$ l'ensemble des diviseurs $\geqslant 0$ équivalents à $D$, et $L(D)$ l'ensemble des fonctions méromorphes $f$ telles que $(f) \geqslant -D$ ; l'application $f \to (f)+D$ définit une application biunivoque de l'espace projectif $P^*$ associé à $L(D)$ sur l'ensemble $|D|$ (qui se trouve ainsi muni d'une structure projective, d'ailleurs indépendante du diviseur $D$ choisi dans $d$). Si $x \in G_c$, $x.D$ est un diviseur de $G/U$, évidemment $\geqslant 0$, et qui est linéairement équivalent à $D$ ( en effet, $G/U$ est kählérien, puisque algébrique, et de plus simplement connexe, puisque $U$ a même rang que $G$ ; donc le groupe des classes de diviseurs de $G/U$ est isomorphe à un sous-groupe de $H^2(G/U,Z)$, sur lequel $G_c$ ne peut qu'opèrer trivialement, puisque $G_c$ est connexe). On a donc $x.D \in |D|$.

Soit $F_o,\ldots,F_r$ une base de $L(D)$. Si l'on fait correspondre à tout $x \in G/U$ le point d'un espace projectif $P$ de coordonnées homogènes $F_o(x),\ldots,F_r(x)$, on obtient une application $\sigma$, a priori "méromorphe", de $G/U$ dans $P$ ; en fait cette application est partout holomorphe : cela résulte de ce que la série linéaire complète $|D|$ n'a pas de "points de base" (autrement dit, pour tout

$x \in G/U$, il existe $D' \in |D|$ tel que $x \notin D'$ à cause de l'invariance de $|D|$ par translation). L'espace projectif $P$ peut être considéré comme "dual" de l'espace $P^*$ associé à $L(D)$ ; les éléments de $|D|$ sont les images réciproques des sections hyperplanes de $\sigma(G/U)$ dans $P$. De par sa construction même, $\sigma(G/U)$ n'est contenu dans aucune sous-variété projective de $P$.

Nous allons maintenant montrer que l'on peut associer à tout $x \in G_c$ un automorphisme $\tilde{x}$ de $P$ tel que :

$$(*) \qquad \sigma(x.y) = \tilde{x}.\sigma(y) \qquad \text{pour tout } y \in G/U .$$

Puisque $x^{-1}.D \in |D|$, et que l'on a évidemment $F_i(x.y). \geqslant -x^{-1}.D$ ($F_i(x.y)$ étant considérée comme fonction de $y \in G/U$), il existe une fonction $g_x$, définie à une homothétie près, telle que :

$$F_i(x.y).g_x(y) = \sum_{j=0}^{r} A_{ij}(x).F_j(y) \quad ,$$

où $A_{ij}(x)$ est une matrice inversible attachée à $x$, et qui définit donc un automorphisme $\tilde{x}$ de $P$ vérifiant évidemment la condition $(*)$ écrite plus haut. En outre, la condition $(*)$ détermine uniquement $\tilde{x}$, puisque $\sigma(G/U)$ n'est contenu dans aucune sous-variété projective de $P$ ; la même raison montre que $\tilde{x}$ dépend analytiquement de $x$, donc définit une représentation projective de $G_c$. Soit alors $E$ l'espace vectoriel dual de $L(D)$, espace dont le projectif associé n'est autre que $P$ ; du fait que $G_c$ est simplement connexe, on peut trouver une représentation linéaire $x \to A_x$ de $G_c$ dans $E$ qui donne $x \to \tilde{x}$ par passage au quotient. Montrons maintenant que $E$ est irréductible, et associée à un poids dominant $b$ tel que $L_b \supset L$. Soit $y_0$ l'image dans $G/U$ de l'élément neutre de $G$, et soit $e \in E$ un élément $\neq 0$ dont l'image dans $P$ soit égale à $\sigma(y_0)$. La formule $(*)$ montre alors que $e$ est un vecteur propre de $L$ (dans la représentation $x \to A_x$), donc de $H \subset L$, donc correspond à un poids dominant $b$ tel que $L_b \supset L$. Les transformés de $e$ par les opérations $A_x$, $x \in G_c$, engendrent dans $E$ un sous-espace vectoriel $E'$ dont l'image dans $P$ contient $\sigma(G/U)$ d'après la formule $(*)$, donc est égale à $P$, ce qui montre que $E' = E$, et que $E$ est irréductible d'après ce qui a été rappelé au n° 3. Nous avons ainsi complètement reconstitué la situation du n° 3. Résumons les résultats obtenus :

THÉORÈME 4. - *Un élément de* $H^2(G/U,Z)$ *est dual d'un diviseur* $D > 0$ *si et seulement si c'est le poids dominant d'une représentation de* $G_c$ *associée à* $G/U$. *Le système linéaire complet* $|D|$ *est alors dual de l'espace de la représentation ;*

<u>il est ample si et seulement si la représentation est strictement associée à</u> $G/U$.

(Rappelons qu'un système linéaire de diviseurs est dit ample s'il n'a pas de composante fixe, et si l'application de la variété dans un espace projectif qu'il définit est un isomorphisme analytique).

Par exemple, si $U = T$, tous les poids dominants $b = \sum k_i . b_i$ (les $b_i$ étant les poids fondamentaux) correspondent à des diviseurs $> 0$ de $G/T$ ; pour que le système linéaire complet contenant ce diviseur soit ample, il faut et il suffit que tous les $k_i$ soient $> 0$.

Une conséquence intéressante de ce qui précède est que la dimension de la représentation irréductible de poids dominant $b$ est égale à la dimension de $L(D)$, $D$ associé à $b$ comme plus haut, dimension qui peut être calculée grâce au théorème de Riemann-Roch au moyen de la classe de cohomologie de $D$, c'est-à-dire justement de $b$. On retrouve ainsi la formule classique d'H. WEYL.

## 5. Compléments.

D'après GOTO, les variétés $G/U$ sont des variétés <u>rationnelles</u>. Il est même probable (et peut-être démontré) qu'elles admettent des décompositions "cellulaires" complexes, analogues à celles des grassmanniennes complexes ; autrement dit, il existerait une famille de sous-variétés de $G/U$ emboîtées, telles que la différence entre deux sous-variétés consécutives soit algébriquement isomorphe à un espace affine. C'est en tout cas ce que l'on vérifie pour les groupes classiques, et ce que WEIL a pu démontrer pour $G = E_6$, et $U$ convenable.

Il en résulterait notamment que les espaces $G/U$ (et en particulier $G/T$) n'ont pas de torsion, conformément à une conjecture émise par BOREL dans sa thèse (et qu'il avait pu vérifier pour les groupes classiques, pour $G_2$ et pour $F_4$, au moyen des fibrations de ces groupes).

## BIBLIOGRAPHIE

[1] LICHNEROWICZ (André). - Sur les espaces homogènes kählériens, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 237, 1953, p. 695-697.

[2] Colloque de Géométrie différentielle, Strasbourg 1953. - Paris, Centre National de la Recherche scientifique, 1953 (Colloques internationaux du C.N.R.S. n° 52).

## ADDITIF

Les questions mentionnées ci-dessus ont été résolues par BOREL, BOTT, CHEVALLEY, GOTO, TITS. On en trouvera une bibliographie dans :

BOREL (Armand). - Topology of Lie groups and characteristic classes, Bull. Amer. math. Soc., t. 61, 1955, p. 397-432.

TITS (Jacques). - Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie, Mém. Acad. roy. Belg., t. 29, 1955, p. 168.

[Avril 1957]