PIERRE SAMUEL

Travaux de Zariski sur le 14e problème de Hilbert

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 99, p. 441-446

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__441_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1954)

TRAVAUX DE ZARISKI SUR LE 14e PROBLÈME DE HILBERT.

par Pierre SAMUEL

1. Introduction.

Soit k un corps. Un anneau A contenant k est dit de type fini sur k s'il est commutatif et s'il est engendré (sur k) par un nombre fini d'éléments : $A = k[x_1 , \ldots , x_n]$. Le 14e problème de Hilbert est le suivant : Etant donnés un anneau de polynomes $k[X_1 , \ldots , X_n] = R'$ et un sous-corps F (contenant k) du corps des fractions F' de R', montrer que l'anneau $R = R' \cap F$ est de type fini sur k.

Le cas historiquement le plus important de ce problème est celui où F est le corps des invariants d'un groupe de substitutions linéaires portant sur les variables X_i.

A première vue le 14e problème a l'air d'autant plus bénin que la propriété analogue pour les corps ("toute sous-extension d'une extension de type fini d'un corps k est de type fini") n'est qu'un brave petit exercice (qu'on trouve même dans Bourbaki). Cependant on commence à prévoir des difficultés dès qu'on s'aperçoit de l'existence de sous-anneaux d'anneaux de polynomes qui ne sont pas de type fini (par exemple le sous-anneau de $k[X , Y]$ engendré sur k par X, X^2Y, ..., X^nY^{n-1}, ...).

Nous ferons subir deux modifications mineures à l'énoncé du 14e Problème :

a. On supposera, ce qui est loisible, que F est le corps des fractions de R.

b. Au lieu de supposer que R' est un anneau de polynomes, on supposera seulement que c'est un anneau intégralement clos de type fini.

Bien qu'on ne soit pas sûr que cette généralisation soit inessentielle, elle n'apporte aucune complication si l'on suit la méthode imaginée par ZARISKI.

Nous conserverons les notations R', F', F et R dans tout cet exposé.

La difficulté du problème croît avec la dimension de F, celle du grand corps F' n'intervenant pas. Ainsi la solution est assez facile lorsque $\dim_k(F) = 1$ (cf. paragraphe 2). Le problème est aussi résolu lorsque $\dim_k(F) = 2$ et qu'on est en caractéristique 0 (cf. paragraphe 4) ; mais le démonstration en est bien plus profonde. Au delà on ne sait encore rien.

2. Réduction à un problème de Géométrie Algébrique.

Posons $R' = k[x_1 , \dots , x_n]$; c'est l'anneau de coordonnées affines d'une variété affinement normale V' , de point générique $(x_1 , \dots , x_n)$ sur k ; soit d' sa dimension. L'anneau R' est l'intersection des anneaux des valuations correspondant aux sous-variétés $W'^{d'-1}$ de V' situées à distance finie. Ainsi R est l'intersection des anneaux des valuations induites sur F ; c'est en tous cas un anneau normal.

Considérons un modèle projectif V^d du corps F . Comme $F \subset F'$, on a une application rationnelle T de V' sur V . La valuation $v_{W'}$ de F' $(\dim(W') = d' - 1)$ induit sur F une valuation de centre $T(W')$; celle-ci est triviale si $T(W') = V$; sinon $T(W')$ est en général de dimension $d - 1$ (et c'est toujours le cas si V est une courbe). Il est plus commode qu'il en soit toujours ainsi, afin de n'avoir à considérer que des diviseurs. La conditions que $T(W')$ soit toujours de dimension d ou $d - 1$ sera réalisée si, pour tout point P de V , $T^{-1}(P)$ est de dimension constante $(= d' - d)$, c'est-à-dire si T^{-1} n'a pas de points fondamentaux sur V . C'est le cas si l'on prend pour V la variété associée au système de cycles de V' dont l'élément générique sur k est le lieu du point. $(x_1 , \dots , x_n)$ sur F ; alors T est la correspondance d'incidence de ce système de cycles (cf. [2] , paragraphe des coordonnées de Chow) ; par tout point de V' il passe un cycle et un seul du système ; et, pour $P \in V$, $T^{-1}(P)$ est le support du cycle représenté par P .

La condition "$\dim(T^{-1}(P)) = d' - d$ quel que soit P" est conservée si on remplace V par une variété V^o birationnellement équivalente et telle que $V^o \geqslant V$ (rappelons que cette notation signifie que l'application rationnelle de V^o sur V est partout régulière). On pourra donc, en particulier, supposer V normale.

Ceci étant, considérons l'ensemble (H) des W^{d-1} de V^d telles que $T^{-1}(W)$ ait toutes ses composantes à l'infini sur V' . Les $W^{d-1} \notin (H)$ ne sont autres que celles telles que la valuation v_W de F soit induite par une des valuations $v_{W'}$ ci-dessus. Donc R est l'intersection des anneaux des $v_W (W^{d-1} \notin (H))$; c'est donc l'ensemble des fonctions f sur V qui n'ont de pôles que sur les W^{d-1} de l'ensemble (H) . Mais (H) est évidemment un ensemble fini de sous-variétés W_j^{d-1} de V . Si on note D le diviseur $\sum_j W_j$ les fonctions f de R sont donc celles pour lesquelles il existe un entier i tel que $(f) \geqslant - iD$. Etant donné un diviseur positif quelconque E sur V , nous noterons en général $R(D)$ l'anneau des fonctions n'ayant des pôles que sur E .

La conjecture suivante est ainsi plus forte que le 14e Problème :

(C). - Etant donnés une variété projective normale V et un divisuer positif E sur V, l'anneau $R(E)$ des fonctions sur V qui n'ont de pôles que sur E est de type fini sur k.

DÉMONSTRATION de la conjecture (C) quand V est une courbe. - Alors E est somme d'un nombre fini de points, et il existe une fonction z sur V ayant exactement ces points pour pôles (d'ordre aussi élevé que le demanderont RIEMANN et ROCH). Toute valuation de F positive en z est positive sur $R(E)$. Donc $R(E)$ est entier sur $k[z]$, et est de même sa clôture intégrale dans F. Le lemme de normalisation de Mlle Noether montre alors classiquement que c'est un anneau de type fini.

Un autre cas où la conjecture (C) est vraie est le suivant :

écrivant $E = W_1 + \dots + W_m$, il existe des entiers $i_1, \dots, i_m$ tels que le système linéaire complet $L = |i_1W_1 + \dots + i_mW_m|$ n'ait pas de point base. Soit en effet (Z_j) une base projective de L ; il existe une fonction f_j sur V telle que $(f_j) = Z_j - (i_1W_1 + \dots + i_mW_m)$, et on a évidemment $f_j \in R(E)$. Si v est une valuation de F telle que $v(f_j) \geqslant 0$ pour tout j, et si P désigne un point générique de son centre, P n'appartient pas au support de E (sinon, comme il existe un indice j tel que $P \notin Z_j$ (L n'ayant pas de point base), P appartiendrait au diviseur des pôles de f_j mais non à son diviseur des zéros ; alors on aurait $v(f_j) < 0$). Par conséquent on a $v(z) \geqslant 0$ pour tout z de $R(E)$. Donc $R(E)$ est la clôture intégrale de $k[f_1, \dots, f_q]$ dans F, et est donc un anneau de type fini.

REMARQUE. - La condition d'absence de points bases est vérifiée (et(C) est vraie) lorsque V est non singulière, et que $E = C + E'$ (C : section hyperplane ; $E' \geqslant 0$), car $iC + E'$ n'a pas de point base pour i assez grand. Mais on ne sait pas si, dans le conjecture (C), il est permis de remplacer E par un diviseur linéairement équivalent ; ceci diminue beaucoup l'intérêt de cette remarque.

En résumé la difficulté du 14e Problème provient de l'existence possible de points bases (non imposés a priori) pour tous les systèmes linéaires $|iD|$. Cette circonstance semble dûe au choix particulier du modèle V du corps F. Nous avons vu qu'on peut remplacer V par tout autre modèle V^0 tel que $V^0 \geqslant V$. Nous allons donc essayer de faire une :

3. Etude invariante du problème.

Notions sur les places et la Surface de Riemann d'un corps de fonctions.

Soit F un corps de fonctions algébriques sur (c'est-à-dire une extension de type fini de) un corps k (contenu dans un domaine universel Ω). On appelle place de F sur k tout k-homomorphisme dans Ω d'un sous-anneau A de F tel que, pour tout x de $F - A$, on ait $1/x \in A$ et $p(1/x) = 0$; on pose alors $p(x) = \infty$. L'anneau A est un anneau de valuation, appelé l'anneau de valuation de la place p ; deux places ayant même anneau de valuation sont k-isomorphes en un sens facile à préciser. Etant donné une place p de F sur k et un modèle projectif V de F (c'est-à-dire admettant un point générique homogène $(x_0, \ldots, x_n)$ tel que $F = k(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0)$), il existe un indice i tel que les valeurs $p(x_j/x_i)$ soient toutes finies (et non nulles) ; le point $(p(x_j/x_i))$ est alors un point de V, appelé le centre de la place p (le lieu de ce point sur k ne dépend que de l'anneau de valuation de p).

L'ensemble (R) des places d'un corps F de fonctions algébriques sur k est appelé la surface de Riemann de F. Dans le cas où $\dim_k(F) = 1$ et où l'on se borne aux places à valeurs algébriques sur k, on obtient la surface de Riemann de F au sens ordinaire. Pour tout modèle V de F, on a une surjection c_V de (R) sur V : $c_V(p)$ étant le centre de la place p sur V. Lorsque $V^o \geqslant V$ et que h_{V,V^o} désigne l'application birationnelle régulière correspondante de V^o sur V, on a $c_V = h_{V,V^o} \circ c_{V^o}$. On démontre que le système des modèles de F est filtrant pour la relation $\leqslant$ (prendre un graphe), et que (R) en est la limite projective relative aux applications h_{V,V^o} (car, étant données deux places distinctes de F, il existe un modèle de F sur lequel leurs centres sont distincts). Si l'on munit chaque modèle V de F de la topologie de Zariski (où les fermés sont les sous-ensembles normalement algébriques sur k) et (R) de la topologie limite projective, (R) est "quasi-compact" (= compact non séparé) et connexe.

Retour à la question.

Passons du modèle V de F à un modèle $V^o \geqslant V$; notons T l'application rationnelle correspondante ($T : V^o \to V$) et D^o le diviseur $T^{-1}(D)$. On a $R(D) = R(D^o)$. Posons $D^o = \sum_j Z_j^o$. On dit qu'un point P^o de V^o est un point d'indétermination de l'anneau $R(D^o)$ (= $R(D)$) si, pour tous entiers $m_j > 0$, P^o est point base du système linéaire $L = |\sum_j m_j Z_j^o|$; ceci veut dire que P^o est point d'indétermination (c'est-à-dire est commun aux diviseurs des zéros et des pôles) de toutes les fonctions admettant exactement $\sum_j m_j Z_j^o$ pour diviseur des pôles. On dit qu'une place p de F est une place de base de l'anneau $R(D)$ si pour tout modèle $V^o \geqslant V$ de F, le centre de p sur V^o est point d'indétermination de l'anneau $R(D^o)$ $(= R(D))$.

THÉORÈME. - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° $R(D)$ est un anneau de type fini.

2° $R(D)$ n'a pas de places de base.

3° L'ensemble $M(D)$ des places de F dont l'anneau de valuation ne contient pas $R(D)$ est fermé dans la surface de Riemann (R) de F.

La démonstration de 1° $\Longrightarrow$ 2° est facile : si $R(D) = k[z_1, \dots, z_n]$ les n fonctions z_i définissent une transformation rationnelle de V dans un espace projectif, et, sur le graphe V^o de celle-ci, $R(D)$ n'a pas de point d'indétermination. Pour montrer que 2° $\Longrightarrow$ 3°, on considère, pour toute place p de F, un modèle $V(p) \geqslant V$ de F tel que l'anneau $R(D)$ $(= R(D(p))$, $D(p)$ désignant le diviseur sur $V(p)$ correspondant à $D)$ n'admette pas le centre de p sur $V(p)$ pour point d'indétermination ; l'ensemble $N(D(p))$ des places q dont le centre sur $V(p)$ est contenu dans le support de $D(p)$ est fermé dans la surface de Riemann (R) ; et on a $M(D) = \bigcap_{p \in (R)} N(D(p))$. On montre ensuite que "2° et 3° $\Longrightarrow$ 1°" en extrayant un recouvrement fini d'un recouvrement ouvert convenable de l'ensemble "quasi-compact" $M(D)$. On montre enfin que 3° $\Longrightarrow$ 2° par un raisonnement difficile on suppose, par l'absurde, que $R(D)$ admette une place de base p, et on fait une récurrence sur le rang de la valuation associée à p.

4. Résolution du 14e Problème dans le cas où V est une surface (caractéristique 0).

Au moyen d'un lemme sur les séries linéaires sur une courbe, on démontre le théorème suivant (valable en toutes caractéristiques) : si $|E|$ est un système linéaire sur une surface normale U, et si P est un point simple de U, P n'est pas un point de base de $|iE|$ pour i assez grand.

Ceci étant une première méthode consiste à utiliser la forme forte suivante du théorème de réduction des singularités des surfaces : l'existence d'un modèle non singulier V^o de F tel que $V^o \geqslant V$. Notons D^o le diviseur correspondant à D sur V^o. Le théorème permet alors de chasser un à un les points bases des systèmes $|iD^o|$, et l'on applique le paragraphe 2.

Une seconde méthode utilise le théorème d'uniformisation locale. Celui-ci dit, entre autres, que, étant donnée une place p du corps F des fonctions sur V, il existe un modèle projectif $V^o \geqslant V$ de F tel que le centre de p sur V^o

soit un point simple. Le théorème ci-dessus (appliqué au diviseur D^0 de V^0 correspondant à D) montre que p n'est pas une place de base de R(D) . D'où le fait que l'anneau R(D) est de type fini au moyen de l'implication 2° $\Rightarrow$ 1° du théorème démontré au paragaphe 3.

L'hypothèse de caractéristique $p \neq 0$ est intervenue dans le théorème de réduction des singularités, ou dans celui d'uniformisation locale. Un élève hindou de Zariski nommé ABHYANKAR, aurait fait d'importants progrès vers le théorème d'uniformisation locale pour les surfaces en caractéristique $p \neq 0$.

ADDITIF

Depuis cet exposé, S. ABHYANKAR a démontré le théorème d'uniformisation locale et celui de réduction des singularités par les surfaces en caractéristique 0 .

Des résultats analogues à ceux de O. ZARISKI ont été trouvés par M. NAGATA.

[Juin 1957]

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABHYANKAR (Sheeram). - Local uniformization on algebraic surfaces over ground fields of characteristic $p \neq 0$, Annals of Math., Series 2, t. 63, 1956, p. 491-526.

[2] SAMUEL (Pierre). - Les fonctions holomorphes abstraites de Zariski, Séminaire Bourbaki, t. 6, 1953/54.

[3] ZARISKI (Oscar). - Local uniformization on algebraic varieties, Annals of Math., t. 41, 1941, p. 852-896.