KATSUMI NOMIZU

Quelques résultats en géométrie différentielle des espaces homogènes

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. nº 98, p. 433-440

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__433_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1954)

QUELQUES RÉSULTATS EN GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DES ESPACES HOMOGÈNES

par Katsumi NOMIZU

[NOTE. - Ce texte de l'exposé fait par K. NOMIZU au Séminaire Bourbaki en Mai 1954 est une rédaction nouvelle de l'auteur pour la 2e édition.]

Nous donnerons ici quelques résultats qui généralisent les résultats fondamentaux d'Elie CARTAN dans la théorie célèbre des espaces riemanniens symétriques [3]. Nous nous intéresserons

1° aux espaces homogènes symétriques non-riemanniens;

2° aux espaces homogènes riemanniens non-symétriques.

1. Existence et propriétés de connexions linéaires invariantes sur les espaces homogènes.

Dans tout ce qui suit, nous considèrerons un espace homogène G/H d'un groupe de Lie connexe G où H est un sous-groupe fermé de G. Nous supposerons que G opère effectivement sur G/H, ce qui veut dire que H ne contient aucun sous-groupe $\neq (e)$ invariant de G.

Si H est compact, on sait que l'on peut introduire sur G/H une métrique riemannienne définie-positive qui est invariante par les transformations de G. La connexion riemannienne associée à cette métrique est aussi invariante par G. Nous allons étudier, sans supposer que H soit compact, si l'on peut introduire des connexions linéaires sur G/H invariantes par G. Une connexion linéaire sur une variété différentiable M est, par définition, une connexion (au sens de Cartan-Ehresmann) dans l'espace fibré principal des repères tangents de M (voir [11]).

Nous regarderons G comme espace fibré principal sur la base $M = G/H$, dont le groupe structural H opère sur G à droite. Le groupe G opérant sur lui-même à gauche, nous pouvons parler de connexions dans G qui sont invariantes par les transformations de G. Nous pouvons aisément établir

PROPOSITION 1. - Pour que l'espace fibré G admette une connexion invariante par G, il faut et il suffit que l'algèbre de Lie g de G admette une décomposition $g = m + h$, somme directe d'un sous-espace vectoriel m de g et de la sous-algèbre h qui correspond au sous-groupe H, telle que $\mathrm{ad}(H)m = m$.

En effet, en regardant g comme espace tangent à G à l'élément neutre e, un tel sous-espace m sera défini comme sous-espace horizontal par rapport à la connexion correspondante [10].

Nous supposerons désormais que l'espace homogène G/H satisfasse à la condition de la proposition 1 et nous fixerons une décomposition $g = m + h$. Dans cette hypothèse, nous pouvons établir une application différentiable biunivoque f de l'espace fibré G dans l'espace fibré principal P des repères tangents de la base $M = G/H$. Cette application f, qui associe à chaque élément a de G le repère transformé par a d'un repère quelconque mais fixé au point 0 (point représenté par H) de G/H, est compatible avec les groupes structuraux H et $GL(n, R)$, où $n = \dim G/H$, ainsi qu'avec les transformations de G opérant sur G et sur P. La connexion dans G définie par m sera alors transportée dans P par f. Cette connexion dans P sera aussi invariante par G. Soit $X \in m$ et soit $x(t)$ le sous-groupe à un paramètre de G engendré par X. On voit que $x(t)$ est un chemin horizontal de G. Par suite, l'image $f(x(t))$ est un chemin horizontal dans P. Cela signifie que le déplacement parallèle de l'espace tangent en 0 le long du chemin $\tilde{x}(t) = x(t).0$ est égal à la transformation induite par $x(t)$. Or la torsion et la courbure d'une connexion linéaire invariante sur G/H sont invariantes par G ; on en déduit que les dérivées covariantes de la torsion T et la courbure R sont toutes nulles pour la connexion linéaire envisagée. Nous avons ainsi établi l'existence d'une connexion linéaire invariante sur G/H ayant des propriétés très particulières, que nous appellons connexion linéaire canonique de deuxième espèce sur G/H qui correspond à la décomposition $g = m + h$.

Supposons maintenant que l'on ait une connexion linéaire invariante quelconque sur G/H. Pour un élément X de m, considérons le sous-groupe à un paramètre $x(t)$ engendré par X et sa trajectoire $\tilde{x}(t) = x(t).0$. Les transformations $\tilde{x}(t)^{-1}.x(t)$, c'est-à-dire, la transformation $x(t)$ suivie par le déplacement parallèle le long du chemin $\tilde{x}(t)^{-1}$, forment un groupe à un paramètre $A(t)$ de transformations linéaires de l'espace tangent T_0 de G/H en 0 qui est identifié à m. Nous désignons par $\rho(X)$ l'endomorphisme de m tel que $A(t) = \exp t\ \rho(X)$. Nous démontrerons facilement que $\rho(X)$ est échangeable avec les éléments de $ad(H)$ et que l'application X (X) est une application linéaire de m dans l'espace vectoriel des endomorphismes linéaires de m. Inversement, une telle application induit une connexion linéaire invariante sur G/H. En posant $\alpha(X, Y) = \rho(X).Y$, nous avons [8].

PROPOSITION 2. - Soit $g = m + h$ une décomposition qui satisfait à la condition de la proposition 1. Alors il existe une correspondance biunivoque entre les connexions linéaires invariantes sur G/H et les applications bilinéaires α de $m \times m$ dans m telles que $\alpha(\mathrm{ad}(h)X , \mathrm{ad}(h)Y) = \mathrm{ad}(h).\alpha(X , Y)$ pour tout $h \in H$ et pour tous $X , Y \in m$.

Tous les champs de tenseurs qui se déduisent d'une connexion linéaire invariante étant aussi invariants par G, ils sont déterminés par leurs valeurs en 0, ce qui nous permet d'exprimer la torsion T et la courbure R par les expressions suivantes :

$$T(X , Y) = \alpha(X , Y) - \alpha(Y , X) - [X , Y]_m$$

$$R(X , Y) = [\rho(X) , \rho(Y)] - \rho([X , Y]_m) - \mathrm{ad}([X , Y]_h) ,$$

où $X , Y \in m$ et $[X , Y]_m$ (resp. $[X , Y]_h$) désignent la composante de l'élément $[X , Y]$ dans m (resp. dans h). La dérivée covariante d'un champ invariant de tenseurs s'obtient algébriquement au moyen de l'opérateur $\rho(X)$.

Nous considérons les deux propriétés suivantes de connexions linéaires invariantes :

(I) Pour tout $X \in m$, la trajectoire $\gamma(t) = x(t).0$ du sous-groupe à un paramètre $x(t)$ engendré par X est une géodésique.

(II) Pour tout $X \in m$, le déplacement parallèle de m (considéré comme espace tangent en 0) le long du chemin $\gamma(t)$ coïncide avec la transformation induite par $x(t)$.

La deuxième condition est plus forte que la première. (II) est équivalente à la condition $\alpha = 0$, ce qui n'est autre chose que la connexion linéaire canonique de deuxième espèce que nous avons déjà considérée. (I) est équivalente à la condition $\alpha(X , X) = 0$ pour tout $X \in m$. Si de plus la torsion T est nulle, une telle connexion est donnée par $\alpha(X , Y) = (1/2)[X , Y]_m$. Nous appelons cette connexion linéaire invariante connexion linéaire canonique de première espèce.

2. Espace homogènes symétriques.

Nous rappelons la définition d'un espace homogène symétrique. Soit $\sigma \neq 1$ un automorphisme involutif du groupe de Lie G. Les éléments de G qui sont fixés par σ forment un sous-groupe fermé H_σ de G. Un espace homogène G/H est appelé espace homogène symétrique si $H_\sigma \supset H \supset H_\sigma^0$ (composante connexe de l'élément neutre de H_σ). Un espace homogène symétrique G/H admet une décomposition canonique $g = m + h$ de l'algèbre de Lie, où m est le sous-espace des vecteurs propres qui correspondent à la valeur propre -1 de l'automorphisme σ de g induit par l'automorphisme donné de G. Pour cette décomposition nous avons $[m , m] \subset h$, condition infinitésimale qui caractérise un espace homogène symétrique.

Pour G/H symétrique, les connexions linéaires de première espèce et de deuxième espèce (par rapport à la décomposition canonique $g = m + h$) coincident l'un avec l'autre en vertu de la condition $[m , m] \subset h$. Nous l'appellerons connexion linéaire canonique de G/H.

L'automorphisme σ de G induit canoniquement une transformation involutive σ_0 de G/H : $\sigma_0(xH) = x^\sigma.H$. Cela est appelé symétrie en 0, le point 0 étant un point fixé isolé. La connexion linéaire canonique de G/H est invariante par la symétrie σ_0, et, inversement, c'est la seule connexion linéaire invariante qui est invariante par σ_0. Si H est compact, nous pouvons introduire sur G/H une métrique riemannienne définie-positive invariante par G. Celle-ci est nécessairement invariante par σ_0. La connexion riemannienne induite coïncide donc avec la connexion linéaire canonique, bien que le choix d'une telle métrique ne soit pas unique. C'est là la connexion riemannienne d'Elie Cartan. Il résulte de ce que nous avons dit plus haut que les dérivées covariantes de la courbure sont toutes nulles.

Nous pouvons maintenant généraliser les résultats de Cartan aux espaces homogènes symétriques non-riemanniens G/H où H n'est pas compact [8].

PROPOSITION 3. - Le groupe d'holonomie homogène restreint est un sous-groupe invariant du groupe linéaire d'isotropie $ad(H)$. Plus précisément, l'algèbre d'holonomie est égale à $ad(h_1)$, où h_1 est le sous-espace (en fait un idéal) de h formé des éléments $[X , Y]_h$, $X , Y \in m$.

PROPOSITION 4. - Si le groupe linéaire connexe d'isotropie est irréductible, alors ou bien g est semi-simple ou bien $[m , m] = 0$. Si g est semi-simple, on a $h_1 = h$.

PROPOSITION 5. - Si G/H est irréductible non localement "flat", alors le plus grand groupe connexe de transformations qui laissent invariante la connexion linéaire canonique de G/H est égal à G.

PROPOSITION 6. - G est simple (non abélien) si et seulement si G/H est irréductible (non localement "flat").

Un espace à connexion linéaire telle que $T = 0$ et $\nabla R = 0$ (dérivée covariante de R) est appelé localement symétrique. C'est un espace à connexion linéaire pour lequel la symétrie locale définie dans un voisinage normal de tout point laisse invariante la connexion linéaire.

PROPOSITION 7. - Un espace à connexion linéaire localement symétrique est localement isomorphe à un espace homogène symétrique G/H muni de la connexion linéaire canonique.

La dernière proposition se généralise : un espace à connexion linéaire telle que $\nabla T = 0$ et $\nabla R = 0$ est localement isomorphe à un espace homogène G/H muni de la connexion linéaire canonique de deuxième espace.

3. Espaces homogènes riemanniens.

Nous nous intéressons maintenant aux espaces homogènes riemanniens non nécessairement symétriques. Nous étudions surtout les groupes d'holonomie et la réductibilité de ces espaces.

Soit M un espace riemannien et désignons par $A(M)$ le groupe des transformations de M qui laissent invariante la connexion riemannienne. C'est un groupe de Lie qui contient le groupe des isométries de M. Soit p un point quelconque mais fixé de M. Etant donnée une transformation $\varphi \in A(M)$, nous prenons un chemin τ joignant p et $\varphi(p)$ et considérons la transformation linéaire $\tau^{-1} \cdot \varphi$ de l'espace tangent T_p. Si T' est un sous-espace de T_p invariant par le groupe d'holonomie homogène Ψ_p, on voit que l'image de T' par $\tau^{-1} \cdot \varphi$ est un sous-espace de T_p invariant par Ψ_p, qui ne dépend pas du choix du chemin τ. La transformation $\varphi \in A(M)$ définit ainsi une substitution $s(\varphi)$ de l'ensemble des sous-espaces de T_p qui sont invariants par Ψ_p. Si $\varphi(p) = p$, alors $s(\varphi)$ est induite par la transformation d'isotropie en p induite par φ. Si φ_t est un groupe à un paramètre de $A(M)$, nous prenons $\tau_t = \varphi_t \cdot p$ et définissons un groupe à un paramètre $A(t) = \tau_t^{-1} \cdot \varphi_t$ de T_p dans la même manière que le cas d'un espace homogène muni d'une connexion linéaire invariante.

Supposons maintenant M simplement connexe et complet. L'espace tangent T_p admet alors la décomposition canonique (d'après G. de RHAM [13]) :
$T_p = T_0 + T_1 + \dots + T_r$, où T_0 est le plus grand sous-espace de T_p sur

lequel Ψ_p opère trivialement, chaque T_i $(1 \leq i \leq r)$ irréductible, et tous les T_i $(0 \leq i \leq r)$ sont deux à deux orthogonaux. Nous avons

LEMME. - Si φ appartient à la composante connexe de l'élément neutre de $A(M)$ alors $s(\varphi)$ laisse invariant chaque sous-espace T_i de la décomposition canonique de T_p.

Nous revenons aux espaces homogènes riemanniens G/H. Si G/H est simplement connexe, il admet une décomposition canonique globale $G/H = M_0 \times M_1 \times \dots \times M_r$, où chaque M est la variété intégrale maximale passant par le point 0 du champ de sous-espaces (T_i) qui s'obtient par le déplacement parallèle du sous-espace T_i de la décomposition canonique de l'espace tangent T_0 de G/H. Or il résulte du lemme que le champ (T_i) est invariant par toutes les transformations de G. Si $a \in G$ et si $a.0 \in M_i$, alors la sous-variété aM_i est la variété intégrale de (T_i) passant par le point $a.0$ et donc coïncide avec M_i. Pour tout point p de M_i, il existe $a \in M$ tel que $a.0 = p$ et il en résulte que a transforme M_i dans lui-même. Cela montre que l'ensemble des éléments $a \in G$ tels que $a M_i = M_i$ est un sous-groupe fermé de G qui opère transitivement sur M_i. Nous avons donc démontré [8].

PROPOSITION 8. - Chaque facteur de la décomposition canonique d'un espace homogène riemannien simplement connexe est aussi homogène.

L'application du lemme au groupe d'isotropie nous donne

PROPOSITION 9. - Si le groupe linéaire d'isotropie connexe d'un espace homogène riemannien G/H est irréductible, alors G/H est ou bien irréductible ou bien localement euclidien.

Nous disons qu'une métrique riemannienne invariante de G/H est de première espèce, si la connexion riemannienne associée coïncide avec la connexion linéaire canonique de première espèce par rapport à une certaine décomposition $g = m + h$. Si G est compact, G/H admet toujours une telle métrique riemannienne. De la formule $\alpha(X, Y) = (1/2)[X, Y]_m$ pour la connexion linéaire canonique de première espèce et des considérations algébriques sur la décomposition canonique de m par le groupe d'holonomie homogène, nous pouvons démontrer

PROPOSITION 10. - Supposons que G/H admette une métrique riemannienne de première espèce. Si G est simple, alors G/H est irréductible.

Pour déterminer le groupe d'holonomie homogène de G/H, considérons une connexion linéaire invariante quelconque donnée par rapport à une décomposition $g = m + h$. L'algèbre d'holonomie de G/H est engendrée par les endomorphismes de m de la forme $R(X, Y)$, $(\nabla_Z R)(X, Y)$, ... (toutes les dérivées covariantes), où $X, Y, Z, \ldots \in m$ [7]. Nous pouvons caractériser l'algèbre d'holonomie comme la plus petite algèbre de Lie h^* d'endomorphismes de m telle que $R(X, Y) \in h^*$ pour tous $X, Y \in m$ et que $[\rho(X), h^*] \subset h^*$ pour tout $X \in m$.

Après cette remarque, revenons au cas riemannien. D'après un résultat de BOREL-LICHNEROWICZ [6], l'algèbre d'holonomie d'un espace riemannien irréductible satisfait à la condition que le normalisateur coïncide avec elle-même si la courbure de Ricci n'est pas nulle. Si la courbure de Ricci de G/H à G compact est nulle, alors G/H est localement euclidien [6]. Nous avons donc

PROPOSITION 11. - *Soit* G/H *un espace homogène riemannien non localement euclidien à* G *compact tel que le groupe linéaire connexe d'isotropie est irréductible. Alors il existe une décomposition convenable de l'algèbre de Lie* $g = m + h$, *pour laquelle la connexion riemannienne est de première espèce et l'algèbre d'holonomie est engendrée par* $\rho(X)$ *et* $ad(h_1)$, *où* $\rho(X)Y = (1/2)[X, Y]_m$ *et* h_1 *est l'idéal de* h *défini dans la proposition* 3.

Des résultats que nous venons d'esquisser, indiquons la relation entre le groupe d'holonomie homogène et le groupe linéaire d'isotropie d'un espace homogène riemannien. Nous terminerons cet exposé en donnant une caractérisation d'un espace riemannien localement symétrique dans ce cadre. (Voir [9] et [11]).

PROPOSITION 12. - *Soit* M *un espace riemannien complet. Si le groupe linéaire connexe d'isotropie en chaque point de* M *est contenu dans le groupe d'holonomie homogène restreint, alors* M *est localement symétrique*.

ADDITIF

1° Le problème d'existence de connexions linéaires invariantes sur les espaces homogènes a été généralisé par H.C. WANG [14] au cas de connexions invariantes dans les espaces fibrés principaux où opère un groupe de Lie fibre transitivement.

2° M. BERGER [1] [2] a étudié en détail les groupes d'holonomie homogène des espaces symétriques.

3° La caractérisation d'un espace à connexion linéaire tel que $\nabla T = 0$ et $\nabla R = 0$ peut être donnée au moyen de champs de vecteurs sur l'espace fibré principal des repères tangents [11]. S. KOBAYASHI [4] a établi un isomorphisme global d'un tel espace à un espace homogène G/H (muni de la connexion linéaire canonique de deuxième espèce) sous les hypothèses convenables.

4° B. KOSTANT [5] a étudié en détail les groupes d'holonomie et la question de réductibilité des espaces homogènes riemanniens compacts. Il a surtout donné un contre-exemple et la correction à l'énoncé que l'auteur avait donné : Si G est simple, G/H est irréductible pour toute métrique riemannienne invariante. D'après KOSTANT, cet énoncé est faux même si G est compact, mais vrai si G est compact et si la caractéristique de Euler n'est pas nulle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERGER (M.). - Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes, Bull. Soc. math. France, t. 83, 1955, p. 279-364 (Thèse Sc. math. Paris. 1954).

[2] BERGER (M.). - Les espaces symétriques non compacts, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 74, 1957, p. 86-177.

[3] CARTAN (Elie). - La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs. - Paris, Gauthier-Villars, 1930 (Mémor. Sc. math., n° 42).

[4] KOBAYASHI (S.). - Espaces à connexions affines et riemanniens symétriques, Nagoya math. J., t. 9, 1955, p. 25-37.

[5] KOSTANT (B.). - On holonomy and homogeneous spaces, Nagoya math. J., t. 12, 1957, p. 31-54.

[6] LICHNEROWICZ (A.). - Espaces homogènes riemanniens, Colloque de géométrie différentielle, Strasbourg, 1953. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1953 (Coll. intern. C.N.R.S., n° 52) ; p. 171-184.

[7] NIJENHUIS (A.). - On the holonomy groups of linear connections, Koninkl. Nederl. Akad. Wet. Amsterdam, Proc. Sect. Sc., Series A, t. 56, 1953, p. 233-249.

[8] NOMIZU (K.). - Invariant affine connections on homogeneous spaces, Amer. J. Math., t. 76, 1954, p. 33-65.

[9] NOMIZU (K.). - Studies on Riemannian homogeneous spaces, Nagoya math. J., t. 9, 1955, p. 43-56.

[10] NOMIZU (K.). - Reduction theorem for connections and its application to the problem of isotropy and holonomy groups of a Riemannian manifold, Nagoya math. J., t. 9, 1955, p. 57-66.

[11] NOMIZU (K.). - Lie groups and differential geometry, Publ. math. Soc. Japan, t. 2, 1956.

[12] NOMIZU (K.). - On infinitesimal holonomy and isotropy groups, Nagoya math. J., t. 11, 1957, p.111-114.

[13] de RHAM (G.). - Sur la réductibilité d'un espace de Riemann, Comment. Math. Helvet., t. 26, 1952, p. 328-344.

[14] WANG (H.C.). - Invariant connections over proncipal fibre bundles, Nagoya math. J., t. 13 (to appear).

[Juin 1958]