Jean-Louis Koszul

Les variétés jacobiennes généralisées

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. nº 93, p. 391-397
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__391_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1954)

LES VARIÉTÉS JACOBIENNES GÉNÉRALISÉES.

par Jean-Louis KOSZUL

(d'après Maxwell ROSENLICHT [3])

Cet exposé fait suite à l'exposé "Relations d'équivalence sur les courbes algébriques ayant des points multiples" [1]. Les notations sont les mêmes sauf que l'on utilise ici l'écriture additive pour les diviseurs.

Soit K un corps de fonctions algébriques d'une variable. Pour tout anneau semi-local $\mathfrak{O} \subset K$, on définit une relation d'équivalence (relative à $\mathfrak{O}$) entre diviseurs de K en posant $A \sim B$ lorsqu'il existe une unité u de $\mathfrak{O}$ telle que $A - B = (u)$. L'équivalence ordinaire s'obtient pour $\mathfrak{O} = K$. Le mémoire montre que les classes de diviseurs de degré 0 correspondent comme dans le cas ordinaire aux points d'un groupe abélien algébrique : la Jacobienne relative à $\mathfrak{O}$. Cette variété Jacobienne est étudiée

1° du point de vue des intégrales de première espèce lorsque le corps des constantes est le corps des complexes,

2° du point de vue de la géométrie algébrique en étendant la méthode de Weil [5].

1. Le théorème d'Abel généralisé.

On désigne par k le corps des complexes et par K le corps des fonctions méromorphes d'une surface de Riemann R. Soit $\mathfrak{O}$ un anneau semi-local de K et soient q_i $(i = 1, 2, \dots, s)$ les places de $\mathfrak{O}$, c'est-à-dire les points de R qui correspondent à des anneaux de valuation de K contenant $\mathfrak{O}$. Soit $R_{\mathfrak{O}}$ la surface R privée des points q_i. Une différentielle ω de R est appelée une $\mathfrak{O}$-différentielle de première espèce lorsqu'elle n'a pas de pôle sur $R_{\mathfrak{O}}$ et que $\sum_i \operatorname{res}_{q_i} f\omega = 0$ pour tout $f \in \mathfrak{O}$. Le <u>genre</u> de K relatif à $\mathfrak{O}$ est la dimension $g_{\mathfrak{O}}$ (sur k) de l'espace des $\mathfrak{O}$-différentielles de première espèce. Si $\bar{\mathfrak{O}}$ est la fermeture intégrale de $\mathfrak{O}$ dans K et si g est le genre de K, l'espace $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}$ a pour dimension $\delta = g_{\mathfrak{O}} - g$ (cf. [1]).

Soit D le dual de l'espace des $\mathfrak{O}$-différentielles de première espèce. A toute chaîne γ sur $R_{\mathfrak{O}}$ est associé un élément $\omega \to \int_\gamma \omega$ de D. Soit Δ le sous-groupe additif de D constitué par les fonctions linéaires $\omega \to \int_\gamma \omega$ où γ

est un cycle de $R_{\mathcal{O}}$. Si $g_{\mathcal{O}} > g$, alors le sous-espace réel engendré par Δ est un sous-espace propre de D . En effet, si E est le diviseur positif de plus bas degré tel que, pour toute $\mathcal{O}$ -différentielle ω de première espèce le diviseur $E + (\omega)$ soit positif, on a vu ([1]) que le degré de E est $\leqslant 2\delta$. Le nombre des q_i tels qu'un cycle autour de q_i donne un élément non nul de Δ est donc au plus égal à 2δ . Il en résulte que, pour $\delta > 0$, Δ peut être engendré par $2g + 2\delta - 1 = 2g_{\mathcal{O}} - 1$ éléments. On démontre d'autre part que Δ est toujours un sous-groupe discret de D . Le quotient $J = D/\Delta$ est donc un groupe analytique complexe abélien qui n'est compact que pour $g_{\mathcal{O}} = g$: c'est la Jacobienne relative à $\mathcal{O}$.

EXEMPLE 1. - R est la sphère de Riemann ; $K = k(z)$; $\mathcal{O}$ est l'anneau semi-local des fonctions telles que $f(i) = f(-i)$. On a $g_{\mathcal{O}} = 1$ et $dz/(1 + z^2)$ est une $\mathcal{O}$ -différentielle de première espèce. La Jacobienne J est le quotient de C par le sous-groupe des $2n\pi i$.

EXEMPLE 2. - K est un corps de fonctions elliptiques en z , les périodes étant ω_1 et ω_2 ; $\mathcal{O}$ est l'anneau semi-local des fonctions elliptiques $f(z)$ telles que $f'(0) = 0$. L'espace $\bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ est de dimension 1 . Les différentielles dz et $\wp(z)dz$ ($\wp(z)$ = fonction de Weierstrass) constituent une base de $\mathcal{O}$ -différentielles de première espèce. La Jacobienne relative à $\mathcal{O}$ est le quotient de $k \times k$ par le sous-groupe qu'engendrent (ω_1 , η_1) et (ω_2 , η_2) où η_1 et η_2 sont les périodes de $\wp(z)dz$.

Soit p_0 un point de $R_{\mathcal{O}}$. Pour tout point $P \in R_{\mathcal{O}}$, soit γ une chaîne de $R_{\mathcal{O}}$ telle que $d\gamma = P - p_0$. L'élément $\omega \to \int_\gamma \omega$ de D a une image dans J qui ne dépend pas de p_0 et P . Le choix de p_0 définit donc, par linéarité, un homomorphisme φ du groupe des diviseurs de $R_{\mathcal{O}}$, c'est-à-dire les diviseurs de R indépendants des places de $\mathcal{O}$, dans le groupe J . Soit u une unité de $\mathcal{O}$ (non constante) que l'on considère comme application de R sur la sphère de Riemann. Puisque $u(q_i) \neq 0$ et $\neq \infty$, il existe une chaîne γ' sur la sphère telle que $d\gamma' = (0) - (\infty)$ et telle que la chaîne $u^{-1}(\gamma') = \gamma$ soit sur $R_{\mathcal{O}}$. On a $d\gamma = (u)$ et $\varphi((u))$ est donc l'image dans J de l'élément $\omega \to \int_\gamma \omega$ de D . Or il résulte facilement de la définition des $\mathcal{O}$ -différentielles de première espèce que, si ω est une telle différentielle, sa trace $Sp_{K/k(u)}\omega$ sur la sphère est nulle pour tout $u \in \mathcal{O}$. Comme $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} Sp_{K/k(u)}\omega$, il en résulte que $\varphi((u)) = 0$. La restriction de φ aux diviseurs de degré 0 de $R_{\mathcal{O}}$ (qui ne dépend plus de p_0) a donc un noyau qui contient tous les diviseurs ~ 0 .

Réciproquement, soit A un diviseur de degré 0 de $R_{\mathcal{O}}$ tel que $\varphi(A) = 0$. Puisque toute différentielle de première espèce de R est une $\mathcal{O}$-différentielle de première espèce, il résulte du théorème d'Abel ordinaire qu'il existe une fonction $u \in K$ telle que $(u) = A$. On démontre de plus, en se servant de l'égalité de Riemann-Roch relative à $\mathcal{O}$ ([1]) que u est une unité de $\mathcal{O}$ et par suite $A \sim 0$. On démontre enfin, comme dans le cas ordinaire, que tout point de J est l'image par φ d'un diviseur de degré 0 de R. La Jacobienne relative à $\mathcal{O}$ est ainsi <u>canoniquement isomorphe au groupe des classes de diviseurs de degré</u> 0 <u>indépendants des places de</u> $\mathcal{O}$.

Le problème d'inversion, qui consiste à chercher un diviseur positif de degré $g_{\mathcal{O}}$ de $R_{\mathcal{O}}$ dont l'image par φ soit un point donné de J, a en fait été étudié de longue date pour des anneaux semi-locaux de types particuliers. La non-compacité de $R_{\mathcal{O}}$ se répercute généralement par l'existence de points de J pour lesquels il n'existe <u>aucune solution</u>. Les seuls cas où il existe toujours au moins une solution sont les cas

1° $\mathcal{O} = K$,
2° $g_{\mathcal{O}} = 0$,
3° le cas $g = 0$,

$\mathcal{O}$ étant local de la forme k + conducteur de $\mathcal{O}$ (exemple 1). Dans l'<u>exemple</u> 2, prenons $p_0 = (\omega_1/2)$. Il ne peut exister de chaîne $\gamma \in R_{\mathcal{O}}$ telle que $d\gamma = P_1 + P_2 - 2p_0$ avec $\left(\int_\gamma dz\,,\ \int_\gamma \wp(z)dz\right) = (0\,,\,1) \bmod \Delta$, car $\int_\gamma dz = 0 \bmod (\omega_1\,,\,\omega_2)$ signifie que $d\gamma$ est le diviseur d'une fonction elliptique paire, qui est donc une unité de $\mathcal{O}$, ce qui entraîne $\int_\gamma \wp(z)dz = 0$.

2. <u>Les homomorphismes de Jacobiennes</u>.

Soit $\mathcal{O}'$ un anneau semi-local de K contenant $\mathcal{O}$. Les $\mathcal{O}'$-différentielles de première espèce sont des $\mathcal{O}$-différentielles de première espèce et $R_{\mathcal{O}'} \supset R_{\mathcal{O}}$. Il existe donc une application canonique de D sur D' (dual de l'espace des $\mathcal{O}'$-différentielles de première espèce) qui applique Δ sur le sous-groupe Δ' qui correspond aux cycles de $R_{\mathcal{O}'}$. Cette application définit par passage aux quotients un homomorphisme analytique τ de J sur la Jacobienne $J' = D'/\Delta'$ relative à $\mathcal{O}'$. Si les genres de K relatifs à $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ sont égaux, τ est visiblement un isomorphisme de J sur J'.

Pour étudier τ, on peut toujours se ramener au cas où $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ possèdent les mêmes places. Soit en effet $\mathcal{O}'' = \bar{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}'$; c'est l'intersection de $\mathcal{O}'$ avec les anneaux de valuation des places de $\mathcal{O}$ qui ne sont pas des places de $\mathcal{O}'$. Il en résulte ([1]) que $\bar{\mathcal{O}}''/\mathcal{O}''$ a même dimension que $\bar{\mathcal{O}}'/\mathcal{O}'$, autrement dit, le genre relatif à $\mathcal{O}''$ est égal au genre relatif à $\mathcal{O}'$. Par suite la Jacobienne relative à $\mathcal{O}'$ coïncide avec la Jacobienne relative à $\mathcal{O}''$ qui a les mêmes places que $\mathcal{O}$.

Si $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ ont les mêmes places, alors en associant à toute unité u de $\mathcal{O}'$ l'image par φ du diviseur (u) (qui est indépendant des places de $\mathcal{O}$), on obtient un homomorphisme du groupe multiplicatif des unités de $\mathcal{O}$ sur le noyau H de $\tau : J \longrightarrow J'$. Le noyau de cet homomorphisme est le groupe des unités de $\mathcal{O}$. Le noyau H a donc une structure relativement triviale. Dans l'exemple 1, pour $\mathcal{O}' = \bar{\mathcal{O}}$, H est isomorphe au groupe multiplicatif G_m des nombres complexes $\neq 0$. Dans l'exemple 2, pour $\mathcal{O}' = \bar{\mathcal{O}}$, H est isomorphe au groupe additif G_a des nombres complexes dans le cas général, on démontre que H est toujours de la forme $G_a^p \times G_m^q$

Supposons maintenant $\mathcal{O}' = K$; J' est alors la Jacobienne compacte ordinaire de K. La Jacobienne J, considérée comme fibrée de base J', n'est généralement pas analytiquement un produit direct. Dans l'exemple 2, J' étant le quotient du groupe additif de la variable complexe z par le groupe des périodes (ω_1, ω_2), s'il existait une section analytique $s : J' \longrightarrow J$, ceci signifierait l'existence d'une fonction holomorphe $f(z)$ telle que $f(z + \omega_j) = f(z) + \eta_j$ $(j = 1, 2)$ ce qui est impossible $(\omega_1 \eta_2 - \omega_2 \eta_1 = 2\pi i)$.

3. L'étude géométrique.

On y définit la Jacobienne relative à un anneau semi-local comme variété de groupe algébrique, par une méthode qui s'écarte peu de celle donnée par WEIL dans le cas ordinaire et qui utilise surtout l'égalité de Riemann-Roch relative à l'anneau semi-local (cf. [1]).

Soit C une courbe algébrique irréductible complète dont tous les points sont absolument simples. Soient k un corps de définition de C et $\mathcal{O}$ un anneau semi-local dans le corps des fonctions $k(C)$. Si A est un diviseur de C rationnel sur $k' \supset k$ et indépendant des places de $\mathcal{O}$, alors, ou bien $\nu_{\mathcal{O}}(A) = 0$, ou bien $\nu_{\mathcal{O}}(A + M) = \nu_{\mathcal{O}}(A) - 1$ pour tout point générique M de C sur k'. Pour tout diviseur B de degré 0, rationnel sur k et indépendant des places de $\mathcal{O}$, on a $\nu_{\mathcal{O}}(B) = \ell_{\mathcal{O}}(B) + g - 1 \leqslant g_{\mathcal{O}}$, donc, en appliquant la remarque précédente, $\nu_{\mathcal{O}}(B + M_1 + M_2 + \dots + M_{g_{\mathcal{O}}}) = 0$ toutes les fois que $M_1, M_2, \dots, M_{g_{\mathcal{O}}}$ sont $g_{\mathcal{O}}$ points génériques indépendants de C sur k. D'après l'égalité de Riemann-Roch, on a alors $\ell_{\mathfrak{O}}(B + M_1 + \dots + M_{g_{\mathfrak{O}}}) = 1$ ce qui conduit au

LEMME. - Soit B un diviseur de degré 0 rationnel sur k et indépendant des places de $\mathfrak{O}$. Soient $M_1, M_2, \dots, M_{g_{\mathfrak{O}}}$ des points génériques indépendants de C sur k. Il existe un diviseur positif et un seul sur C qui soit équivalent à $B + M_1 + M_2 + \dots + M_{g_{\mathfrak{O}}}$. Ce diviseur est de la forme $N_1 + N_2 + \dots + N_{g_{\mathfrak{O}}}$ où les N_i sont des points génériques indépendants de C sur k.

Ceci étant, soit $C^{(g_{\mathfrak{O}})}$ le produit sysmétrique de $g_{\mathfrak{O}}$ exemplaires de C. Un diviseur positif somme de $g_{\mathfrak{O}}$ points génériques indépendants de C sur k s'identifie à un point générique de $C^{(g_{\mathfrak{O}})}$ sur k. Soient

$$\sum M_i \quad \text{et} \quad \sum N_i \qquad (i = 1, 2, \dots, g_{\mathfrak{O}})$$

deux points génériques indépendants de $C^{(g_{\mathfrak{O}})}$ sur k, et soit p_0 un point de C rationnel sur k distinct des places de $\mathfrak{O}$; le lemme prouve l'existence d'un point générique $\sum R_i$ de $C^{(g_{\mathfrak{O}})}$ sur $k(M_1, M_2, \dots, M_{g_{\mathfrak{O}}})$ qui est bien déterminé par la condition $\sum R_i \sim \sum M_i + \sum N_i - g_{\mathfrak{O}} p_0$. En posant

$$(\sum M_i) \circ (\sum N_i) = \sum R_i ,$$

on définit sur la variété $C^{(g_{\mathfrak{O}})}$ une loi de composition normale commutative. D'après un théorème de Weil, il existe alors une variété de groupe algébrique commutatif J et une application birationnelle F de $C^{(g_{\mathfrak{O}})}$ sur J qui transforme la loi de composition $\circ$ en la loi d'addition de J. Lorsque C possède une infinité de points rationnels sur k, la variété Jacobienne J admet k comme corps de définition. Cette variété n'est complète que si $g_{\mathfrak{O}} = g$.

Etant donné un diviseur A de C indépendant des places de $\mathfrak{O}$ et rationnel sur $k' \supset k$, on lui associera un point $\varphi(A)$ de J de la manière suivante : on choisit $g_{\mathfrak{O}}$ points génériques indépendants M_i de C sur k' ; il existe alors un diviseur positif $M'_1 + M'_2 + \dots + M'_{g_{\mathfrak{O}}}$ bien déterminé par

$$A - d(A)p_0 + \sum M_i \sim \sum M'_i \ ;$$

on posera

$$\varphi(A) = F(\sum M_i) - F(\sum M'_i) .$$

C'est un point de J rationnel sur k' et indépendant du choix des M'_i. On vérifie facilement que l'application $A \to \varphi(A)$ est homomorphisme de groupes abéliens. Sa **restriction** aux diviseurs de degré 0 définit un isomorphisme du groupe des classes de diviseurs sur J. Sa restriction aux points de C est une application rationnelle de C dans J qui est définie pour tous les points de C qui ne sont pas des places de $\mathcal{O}$. Enfin sa rectriction aux diviseurs de degré $g_{\mathcal{O}}$ coïncide avec $F : C^{(g_{\mathcal{O}})} \to J$: le problème d'inversion admet une solution et une seule en tous les points d'un ouvert-Zariski de J.

Dans ce qui suit, on suppose que $\mathcal{O}'$ est un second anneau semi-local de $k(C)$ contenant $\mathcal{O}$ et que l'on a pu choisir p_0 indépendant des places de $\mathcal{O}'$. Il existe alors un homomorphisme rationnel de J sur la Jacobienne J' relative à $\mathcal{O}'$ qui est entièrement défini par la condition $\varphi' = \tau\varphi$. Si $g_{\mathcal{O}} = g_{\mathcal{O}'}$, alors τ est une correspondance birégulière. En supposant k infini, on peut obtenir des résultats précis sur le noyau H de τ. C'est toujours une variété rationnelles irréductible. Le même raisonnement que celui du paragraphe 2 permet d'en faire l'étude dans le cas où $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ ont les mêmes places. Si t est la différence entre le nombre des anneaux locaux de $\mathcal{O}'$ et le nombre des anneaux locaux de $\mathcal{O}$, alors pour k algébriquement clos, H est birégulièrement isomorphe à $G_m^t \times H'$, où H' est une variété affine munie d'une structure de groupe algébrique. Ce n'est qu'en caractéristique 0 que l'on peut démontrer que H' est de la forme G_a^n. On obtient un contre-exemple en caractéristique 2 en prenant un anneau semi-local $o = k + m$; où m est constitué par les fonctions d'ordre 3 au moins en un point q de C. Pour $\mathcal{O}' = \overline{\mathcal{O}}$, on a $t = 0$; $H' = H$ est une variété affine de dimension 2 qui, en tant que groupe algébrique ne possède qu'un sous-groupe de dimension 1.

On démontre enfin qu'il existe une correspondance birationnelle entre $J' \times H$ et J qui est birégulière au-dessus d'un ouvert-Zariski de J'. La Jacobienne J est donc un fibré algébrique de base J' et de fibre H. Si J' est la Jacobienne ordinaire ($\mathcal{O}' = k(C)$), et si $g_{\mathcal{O}} > g > 0$, on constate que ce fibré n'est jamais un produit direct.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KOSZUL (Jean-Louis). - Relations d'équivalence sur les courbes algébriques ayant des points multiples, Séminaire Bourbaki, t. 5, 1952/53.

[2] ROSENLICHT (Maxwell). - Equivalence relations on algebraic curves, Annals of Math., Series 2, t. 56, 1952, p. 169-191.

[3] ROSENLICHT (Maxwell). - Generalized jacobian varieties, Annals of Math., Series 2, t. 59, 1954, p. 505-530.

[4] SEVERI (Francesco). - Funzioni quasi Abeliane. - Civitas Vaticana, Pontificia Academia Scientiarum, 1947 (Pontificiae Academiae Scientiarum scripta varia, 4).

[5] WEIL (André). - Variétés abéliennes et courbes algébriques. - Paris, Hermann, 1948 (Act. scient. et ind. n° 1064 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 8).