ALEXANDRE GROTHENDIECK

La théorie de Fredholm

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. nº 91, p. 377-384
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__377_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1954)

LA THÉORIE DE FREDHOLM

par Alexandre GROTHENDIECK

1. Partie algébrique.

Soit E un espace vectoriel sur un corps de caractéristique 0, E' son dual, on identifie $E' \otimes E$ à l'espace des endomorphismes de rang fini de E. On définit sur $(E' \otimes E)^n$ une forme n fois linéaire α_n par la formule

(1) $$\alpha_n(x_1' \otimes x_1 , \ldots , x_n' \otimes x_n) = \frac{1}{n!} \det (\langle x_i , x_j \rangle)$$

On peut aussi écrire

(2) $$\alpha_n(u_1 , \ldots , u_n) = \mathrm{Tr}\, u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$$

où on pose

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_n = \frac{1}{n!} (x_1' \wedge \ldots \wedge x_n') \otimes (x_1 \wedge \ldots \wedge x_n)$$

quand

$$u_i = x_i' \otimes x_i \in E' \otimes E .$$

$u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$ est un opérateur de rang fini dans $\overset{n}{\wedge} E$, (coïncidant avec la puissance extérieure $\overset{n}{\wedge} u$ si tous les u_i sont identiques à un même u), dépendant des u_i de façon n fois linéaire et symétrique. Donc $\alpha_n(u_1 , \ldots , u_n)$ est une forme n fois linéaire et symétrique des u_i, et en posant $\alpha_n(u) = \alpha_n(u , \ldots , u)$, on a

(3) $$\alpha_n(u) = \mathrm{tr} \overset{n}{\wedge} u$$

En particulier, $\alpha_n(u)$ est nul pour $n >$ rang u ; plus généralement, on voit sur (2) que $\alpha_n(u_1 , \ldots , u_n)$ est nul si k des u_i sont identiques à un même endomorphisme de rang $< k$. (3) se spécialise à

(4) $$\alpha_0(u) = 1 , \quad \alpha_1(u)\ \mathrm{tr}\, u$$

(la première de ces formules est une définition). Notons la formule

(5) $$\alpha_n(Au_1 ; \ldots , Au_n) = \alpha_n(u_1A , \ldots , u_nA)$$

valable pour $A \in L(E ; E)$ et $u_i \in E' \otimes E$; pour A inversible, elle exprime seulement que α_n est invariante par les automorphismes de E.

La forme $\alpha_n(u_1 , \ldots , u_n)$ est caractérisée, à un facteur constant près, par la condition que la forme $2n$ fois linéaire correspondante (1) est alternée par rapport aux x_i et alternée par rapport aux x'_i, et que α_n est invariante par les automorphismes de E (ou, ce qui revient au même, satisfait à (5)). On en conclut que, si E est de dimension n finie, on a

$$\alpha_p(u_1, \ldots, u_q, \underbrace{\underset{\sim}{1}, \ldots, \underset{\sim}{1}}_{p-q}) = \frac{\binom{n}{p}}{\binom{n}{q}} \alpha_q(u_1, \ldots, u_q) \tag{6}$$

D'autre part, on aura en vertu de (3) et de la définition du déterminant :

$$\alpha_n(u) = \det u \qquad (n = \dim E) \tag{7}$$

Développant $\alpha_n(\underset{\sim}{1} + u)$ par la formule de Newton, et utilisant (6), on obtient le développement fondamental

$$\det(\underset{\sim}{1} + u) = \sum_0^\infty \alpha_k(u) \tag{8}$$

la somme du second membre étant en fait finie. Elle reste encore finie, et (8) reste évidemment encore valable, si E n'est plus supposé de dimension finie, en donnant un sens évident à $\det(\underset{\sim}{1} + u)$. On a encore les propriétés usuelles du déterminant, en particulier la multiplicativité

$$\det(\underset{\sim}{1} + u)(\underset{\sim}{1} + v) = \det(\underset{\sim}{1} + u)\det(\underset{\sim}{1} + v) \tag{9}$$

(noter que $(\underset{\sim}{1} + u)(\underset{\sim}{1} + v) = \underset{\sim}{1} + u + v + uv$ est bien de la forme $1 + \omega$, $\omega \in E' \otimes E$). Remplaçant dans (8) u par zu, on obtient par identification

$$\alpha_k(u) = \sum_{i_1 < i_2 \cdots < i_n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n} \tag{10}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de u, comptées suivant leur ordre de multiplicité ; on peut omettre les valeurs propres nulles.

Il est bien connu si $\dim E$ est fini, et on l'étend aussitôt au cas de E quelconque, que $\underset{\sim}{1} + zu$ est inversible si et seulement si $\det(\underset{\sim}{1} + zu) \neq 0$, et de façon précise l'ordre du polynôme

$$\det(\underset{\sim}{1} + zu) = \sum \alpha_k(u) z^k \tag{11}$$

(polynôme appelé <u>déterminant de Fredholm</u> de u) au point z est égal à la multiplicité de la valeur propre $-1/z$ de u. On peut obtenir ainsi ce résultat, ainsi qu'une formule explicite d'inversion de $\underset{\sim}{1} + zu$. On note d'abord que les α_n satisfont à la formule de récurrence suivante (qu'on vérifie directement sur (1) en développant le déterminant qui y intervient suivant les éléments de la dernière ligne) :

$$(12)\qquad (n+1)\alpha_{n+1}(u_1, \dots, u_{n+1}) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\alpha_n(u_1,\dots,u_{i-1}, u_i u_{n+1}, u_{i+1},\dots,u_n) + \alpha_n(u_1,\dots,u_n)\operatorname{tr} u_{n+1} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\alpha_n(u_1,\dots,u_{i-1}, u_{n+1}u_i, u_{i+1},\dots,u_n) + \alpha_n(u_1,\dots,u_n)\operatorname{tr} u_{n+1}$$

Notons maintenant que pour $u_1, \dots, u_n \in E' \otimes E$ fixés, on peut trouver un opérateur $R_n(u_1, \dots, u_n)$ dans E, déterminé de façon unique, tel que

$$(13)\qquad (n+1)\alpha_{n+1}(u_1, \dots, u_{n+1}) = \operatorname{tr} u_{n+1}R_n(u_1, \dots, u_n)$$

R_n dépend des u_i de façon n fois linéaire et symétrique ; on posera $R_n(u) = R_n(u, \dots, u)$. Alors la formule (12), spécialisée au cas

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n, = u, u_{n+1} = x' \otimes x \quad (u, x' \otimes x \in E' \otimes E),$$

donne

$$(14)\qquad R_n(u) = -R_{n-1}(u)u + \alpha_n(u)\underset{\sim}{1} = -uR_{n-1}(u) + \alpha_n(u)\underset{\sim}{1}$$

(ce qui permet par récurrence d'obtenir la formule

$$(15)\qquad R_n(u) = (-1)^n\alpha_0(u)u^n + (-1)^{n-1}\alpha_1(u)u^{n-1} + \dots + (-1)^0\alpha_n(u)\underset{\sim}{1}$$

dont nous ne nous servirons pas), d'où en sommant de 0 à ∞ :

$$(16)\qquad R(u)(\underset{\sim}{1} + u) = (\underset{\sim}{1} + u)R(u) = \det(\underset{\sim}{1} + u).\underset{\sim}{1}$$

en posant

$$(17)\qquad R(u) = \sum R_n(u)$$

(la série du second membre étant en fait finie). Des formules (9) et (16) résulte aussitôt le

THÉORÈME 1 ("Théorème de Fredholm"). - Soit $u \in E' \otimes E$ un opérateur de rang fini dans un espace vectoriel E sur un corps de caractéristique 0. Pour que $\underset{\sim}{1} + u$ soit inversible, il faut et il suffit que $\det(\underset{\sim}{1} + u) \neq 0$, et alors on a (formule de Fredholm) :

$$(18)\qquad (\underset{\sim}{1} + u)^{-1} = \frac{1}{\det(\underset{\sim}{1}+u)} R(u) = \underset{\sim}{1} - \frac{1}{\det(\underset{\sim}{1}+u)} uR(u) = \dots =$$

$$= (1 - u + \dots + (-1)^{n-1} u^{n-1} + \frac{(-1)^n}{\det(\underset{\sim}{1}+u)} u^n R(u).$$

En généralisant la définition des $R_n(u)$ et $R(u)$, on obtiendrait un théorème de résolution explicite pour l'équation $(\underset{\sim}{1} + zu).x = y$, quand z est un zéro de $\det(\underset{\sim}{1} + zu)$, qui implique l'assertion faite plus haut relative à l'égalité de l'ordre du zéro et la multiplicité de la valeur propre correspondante. Nous nous dispensons de développer ces formules, qui résultent essentiellement de la formule (12).

2. Théorie de Fredholm dans les espaces de Banach.

Nous supposons connue la définition du produit tensoriel topologique complété $\hat{\otimes}_i E_i$ de n espaces de Banach E_i. C'est le complété du produit tensoriel ordinaire pour une norme telle que, pour tout espace de Banach F, on ait un isomorphisme d'espaces normés

$$(19) \qquad B(E_1, \ldots, E_n ; F) = L(\hat{\otimes}_i E_i ; F)$$

Le symbole $\hat{\otimes} E_i$ jouit des propriétés de commutativité et d'associativité usuels, et on peut développer la notion de produit tensoriel d'applications linéaires dans ce nouveau cadre.

Soient E et F deux espaces de Banach, on a une application bilinéaire canonique de norme $\leqslant 1$ $(x', y) \longrightarrow x' \otimes y$ de $E' \times F$ dans $L(E ; F)$, d'où une application linéaire $u \longrightarrow \tilde{u}$ de norme $\leqslant 1$ de $E' \hat{\otimes} F$ dans $L(E ; F)$. Les opérateurs qui proviennent de l'espace $E' \hat{\otimes} F$ sont appelés <u>opérateurs de Fredholm</u> de E dans F ; l'espace de ces opérateurs est muni de la norme quotient de celle de $E' \hat{\otimes} F$, appelée <u>norme-trace</u> (on ne sait pas si l'application $E' \hat{\otimes} F \longrightarrow L(E ; F)$ est toujours biunivoque). Les $u \in E' \hat{\otimes} F$ sont appelés <u>noyaux de Fredholm</u> (il semble qu'il faille les distinguer des opérateurs de Fredholm qu'ils définissent).

Un opérateur de Fredholm est compact, comme limite d'opérateurs de rang fini. Si $u \in E' \hat{\otimes} F$, et si A est une application linéaire continue de F dans un Banach G (resp. de G dans E), on définit le composé Au (resp. uA) qui est un noyau de Fredholm $\in E' \hat{\otimes} G$ (resp. $\in G' \hat{\otimes} F$) par $Au = (\underset{\sim}{1} \otimes A).u$ (resp. $uA = ({}^tA \otimes \underset{\sim}{1}).u$) On aura $\widetilde{Au} = A\tilde{u}$, $\widetilde{uA} = \tilde{u} A$. On définit aussi le composé de deux noyaux de Fredholm $u \otimes E' \hat{\otimes} F$ et $v \in F' \hat{\otimes} G$ par $vu = \tilde{v}u = v\tilde{u} \in E' \hat{\otimes} G$. Les propriétés usuelles d'associativité sont valables. En particulier, $E' \hat{\otimes} E$ apparaît comme une algèbre normée compléte ; elle n'a un élément unité que si E est de dimension finie. Sinon, on lui ajoute un élément unité, ce qui donne un sens au problème d'inversion de $\underset{\sim}{1} + u (u \in E' \hat{\otimes} E)$. On montre d'ailleurs que l'inverse existe si et seulement si l'inverse de $\underset{\sim}{1} + \tilde{u}$ existe dans $L(E ; E)$ (donc le spectre de u dans l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité à $E' \hat{\otimes} E$ est identique au spectre de $\tilde{u}$ dans $L(E ; E)$).

Soit E un espace de Banach. La formule (1), compte-tenu de la majoration de Hadamard pour le déterminant, montre que $\alpha_n(x'_1 \otimes x_1 , \ldots , x'_n \otimes x_n)$ est une forme $2n$ fois linéaire, de norme $\leqslant k_n = n^{n/2}/n'$, donc définit une forme linéaire de norme $\leqslant k_n$ sur $\hat{\otimes}(E' \hat{\otimes} E)$, d'où une forme n fois linéaire, de norme $\leq k_n$, $\alpha_n(u_1 , \ldots , u_n)$ sur $(E' \hat{\otimes} E)^n$, évidemment symétrique. On voit de même que $R_n(u_1 , \ldots , u_n)$ peut se définir pour des $u_i \in E' \hat{\otimes} E$ comme un opérateur continu dans E, R_n étant alors une application n fois linéaire symétrique, de norme $\leq (n + 1)k_{n+1}$, de $(E' \hat{\otimes} E)^n$ dans $L(E ; E)$ (voir formule (13)). Majorant k_n à l'aide de la formule de Stirling, on trouve que les séries (8) et (17) sont des séries convergentes, représentant des fonctions entières de la variable $u \in E' \hat{\otimes} E$, à valeurs scalaires, respectivement à valeurs, dans $L(E ; E)$. Cela définit $\det(\underset{\sim}{1} + u)$ et $R(u)$ comme des fonctions entières de $u \in E' \hat{\otimes} E$ (mais si l'application canonique $E' \hat{\otimes} E \longrightarrow L(E ; E)$ n'était pas biunivoque, ces fonctions ne seraient pas définies sur l'ensemble des opérateurs de Fredholm eux-mêmes). Les identités établies au paragraphe 1 restent valables par un passage à la limite trivial, d'où aussitôt l'extension du théorème de Fredholm algébrique (et en particulier de la formule de résolution (18)) au cas des opérateurs de Fredholm. De plus, d'après les propriétés de continuité connues du système des valeurs propres d'un opérateur compact variable, et du système des zéros d'une fonction entière variable, on trouve par passage à la limite à partir de $u \in E' \otimes E$ le

THÉORÈME 2. - Pour tout $u \in E' \hat{\otimes} E$, les zéros de $\det(\underset{\sim}{1} + zu)$ sont les z tels que $-1/z$ soit valeur propre de $\tilde{u}$; avec égalité entre multiplicité d'un zéro et de la valeur propre correspondante.

D'ailleurs, ce théorème pourrait s'obtenir aussi sans l'aide de la théorie des opérateurs compacts, par l'étude algébrique directe du cas singulier $\det(\underset{\sim}{1} + zu) = 0$, déjà signalée à la fin du paragraphe 1. On obtient de nouveau en les précisant, les théorèmes de Riesz, dans le cas des opérateurs de Fredholm. Ces méthodes valent de plus sur un corps valué complet quelconque de caractéristique 0.

3. Opérateurs de Fredholm définis par une intégrale.

La détermination des opérateurs de Fredholm de E dans F (E, F espaces de Banach) revient à la détermination de $E' \hat{\otimes} F$. Ainsi, si $F = L^1(\mu)$ (μ, mesure sur un espace localement compadt M), on sait que $E' \hat{\otimes} L^1(\mu) = L^1_{E'}(\mu)$, espace des fonctions vectorielles sommables, à valeurs dans l'espace de Banach E'. Prenons plus particulièrement $E = F = L^1(\mu)$, on voit que les opérateurs de Fredholm dans $L^1(\mu)$ sont définis par des noyaux mesurables $N(s, t)$ sur $M \times M$, à savoir les noyaux qui peuvent se regarder comme des fonctions sommables de t à valeurs dans l'espace de Banach des fonctions mesurables et bornées de s ; la norme-trace de N est

$$\int (\sup_s \text{en mesure } |N(s, t)|)\, d\mu(t) .$$

On en conclut que si M est un espace localement compact muni de μ, si $f \in L^1_F(\mu)$ et si g est une application scalairement mesurable et bornée de M dans E', alors l'intégrale faible

(20) $$u = \int g(t) \otimes f(t) d\mu(t)$$

(dans $L(E ; F)$ mis en dualité avec $E \otimes F'$) existe, et donne un opérateur de Fredholm de E dans F. Plus précisément, on peut définir u comme un élément de $E' \hat{\otimes} F$ lui-même. En effet, puisque $L^1_F(\mu) = L^1(\mu) \hat{\otimes} F$, il suffit de définir u pour $f = \varphi \otimes a$ ($\varphi \in L^1(\mu)$, $a \in F$) comme une fonction tri-linéaire continue de g, f, a à valeurs dans $E' \hat{\otimes} F$, ce qui est immédiat. On calcule sur le symbole intégral (20) en toute sécurité par cette méthode, en particulier on trouve, dans le cas $E = F$;

(21) $$\operatorname{tr} u = \int \langle f(t) , g(t) \rangle \, d\mu(t)$$

plus généralement

(22) $$\alpha_n(u) = \frac{1}{n!} \overbrace{\int \cdots \int}^{n} \det \left(\langle f(t_i) , g(t_j) \rangle \right)_{1 \leq i,j \leq n} d\mu(t_1) \ldots d\mu(t_n)$$

formule qui résulte immédiatement de (1). Cela permet de calculer le déterminant de Fredholm de u, et on peut développer des formules intégrales analogues pour les $R_n(u)$ et leurs généralisations. On notera qu'on a interêt à calculer les $uR_n(u) = R_n(u)u$ plutôt que $R_n(u)$ lui-même, car les premiers sont des noyaux de Fredholm contrairement à $R_n(u)$. Cela n'a pas d'inconvénient si on se borne à écrire les formules de Fredholm (18) à l'exclusion de la première (qui seule fait intervenir $R(u)$ et non $uR(u)$).

Notons en passant que tout $u \in E' \hat{\otimes} F$ peut se mettre sous la forme (20), où μ est la mesure sur l'ensemble des entiers obtenue en plaçant la masse $+1$ en chaque point.

<u>Cas particulier classique</u>. - Soient K, L deux espaces compacts, L muni d'une mesure μ, soit $N(s, t)$ une fonction continue sur $K \times L$, elle définit un opérateur continu $C(L) \rightarrow C(K)$ par la formule

(23) $$(N.\varphi)(s) = \int N(s, t) \varphi(t) d\mu(t)$$

PROPOSITION. - $\varphi \longrightarrow N.\varphi$ est une application de Fredholm de $C(L)$ dans $C(K)$.

En effet, il est du type (18), avec $g(t) = \varepsilon_t$ (masse $+1$ au point t) et $(f(t))(s) = N(s, t)$.

Si $K = L$, on peut donc développer les formules de résolution de Fredholm générales, et on retrouve les formules sous leur forme classique. Mais la théorie générale du paragraphe 2 englobe des cas non classiques assez divers.

4. Compléments divers.

a. Soient E, F deux espaces localement convexes séparés, on appelle application de Fredholm de E dans F une application linéaire composée d'une séquence d'applications linéaires

$$E \xrightarrow{\alpha} E_1 \xrightarrow{\beta} F_1 \xrightarrow{\gamma} F$$

où E_1 et F_1 sont des espaces de Banach, α et γ faiblement continues, et β une application de Fredholm de E_1 dans F_1. On constate que la théorie de résolution développée précédemment subsiste dans ses points essentiels pour les opérateurs de Fredholm dans un espace localement convexe quelconque.

b. On montre que si u est un noyau de Fredholm, son déterminant de Fredholm est de genre 1, donc la suite (λ_i) des valeurs propres de $\tilde{u}$ est de carré sommable. Mais u peut être tel que (λ_i) ne soit de puissance $(2 - \varepsilon)$-ième sommable pour aucun $\varepsilon > 0$ (prendre un opérateur de composition convenable dans $C(T)$, T tore à une dimension).

c. Il y a un grand nombre de faits spéciaux dans le cas des opérateurs de Fredholm u dans un espace de Hilbert. Signalons seulement que $\det(1_m + zu)$ est fonction entière de genre 0 :

(24)
$$\det(1_m + zu) = \prod_i (1_m + z\lambda_i)$$

(le produit du second membre étant étendu aux valeurs propres non nulles λ_i de u, répétées suivant leurs multiplicités, suite qui est sommable). Cela signifie aussi que les formules (10) sont encore valables.

d. Soit E un espace nucléaire, alors toute application linéaire bornée (i.e. transformant un voisinage convenable de 0 en une partie bornée) de E dans un espace localement convexe quasi-complet F est une application de Fredholm. De plus, le déterminant de Fredholm d'un opérateur borné dans un espace nucléaire quasi-complet est d'ordre 0, i.e. se met sous la forme (24), la suite des valeurs propres (λ_i) étant à décroissance rapide. D'ailleurs, il n'y a pratiquement jamais de difficulté pour déterminer concrètement les applications de Fredholm d'un ou dans un espace nucléaire, dans chaque cas particulier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GROTHENDIECK (Alexandre). - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Mem. Amer. math. Soc. n° 16).

[2] GROTHENDIECK (Alexandre). - La théorie de Fredholm, Bull. Soc. math. France, t. 84, 1956 p. 319-384.

[Juin 1957]