Séminaire N. Bourbaki

Roger Godement

# Cohomologie des groupes discontinus

*Séminaire N. Bourbaki*, 1954, exp. nº 90, p. 365-375
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__365_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1954)

# COHOMOLOGIE DES GROUPES DISCONTINUS

par Roger GODEMENT

Soit $G$ un groupe fuchsien dans le demi-plan $X$ : $I(z) > 0$ . On pose

$$J_S(z) = cz + d \quad \text{pour} \quad S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G .$$

La théorie des fonctions automorphes conduit à étudier les fonctions $f(z)$ qui, par $G$ , se transforment suivant

$$f(Sz) = \mu(S).J_S(z)^r.f(z) ,$$

$r$ étant un nombre donné <u>non nécessairement entier</u> et $\mu(S)$ un système de constantes donné ("multiplicateur" de f). Les $\mu(S)$ ont évidemment à vérifier des identités, que voici. Tout d'abord on a trivialement

$$J_{ST}(z) = J_S(Tz)\ J_T(z) \quad ;$$

choisissons alors pour chaque $S$ une détermination de $\log J_S(z)$ et posons $J_S(z)^r = e^{ir.\log J_S(z)}$ ; on aura une identité

$$\log J_{ST}(z) = \log J_S(Tz) + \log J_T(z) + 2\pi i.w(S , T)$$

où $w(S , T)$ est une application $G \times G \longrightarrow \underset{\sim}{Z}$ ; cela dit il est clair qu'on doit avoir

$$\text{(1)} \qquad \mu(ST) = e^{2\pi ir.w(S,T)}\ \mu(S)\ \mu(T) .$$

Si l'on fait opérer trivialement $G$ sur le groupe multiplicatif $C_*$ , il est visible que $e^{2\pi ir.w(S,T)}$ est un 2-cocycle de $G$ à valeurs dans $C_*$ , et que (1) exprime que $S \longrightarrow \mu(S)$ est une 1-cochaîne ayant $w$ pour cobord.

Il est utile en particulier de former des multiplicateurs en posant $\mu(S) = e^{2\pi ir.\alpha(S)}$ et en exigeant que $\alpha(S)$ vérifie $\alpha(ST) - \alpha(S) - \alpha(T) = w(S,T)$ ; on peut même s'intéresser, pour des raisons arithmétiques, aux $\alpha$ de la forme $\beta(S)/n$ , $n$ entier donné, $\beta(S)$ à valeurs entières ; l'existence de tels multiplicateurs revient à dire que $n.w(S , T)$ , en tant que 2-cocycle de $G$ à valeurs dans $\underset{\sim}{Z}$ , est un cobord. D'où l'utilité d'étudier les groupes de cohomologie de $G$ .

La méthode utilisée consistera à relier la cohomologie du groupe $G$ à celle de l'espace $X/G$ , lequel, étant une surface de Riemann, a des propriétés connues. Si $G$ opérait sans points fixes sur $X$ , la question serait résolue (vu que la cohomologie de $X$ est triviale) par le théorème de Hurewicz and Co :

$$H^p(G\ ;\ A) \approx H^p(X/G\ ;\ A)\ .$$

Mais dans le cas général, il faut tenir compte de l'existence des points fixes possibles de $G$ , et modifier un peu les méthodes usuelles.

## 1. Groupes discontinus.

Dans ce qui suit on désigne par $X$ un espace topologique (localement compact et dénombrable à l'infini ...) et $G$ un groupe d'automorphismes de $X$ . On fera en dernier lieu les hypothèses suivantes :

(I) : pour tout $x \in X$ , le stabilisateur $G(x)$ de $x$ dans $G$ est d'ordre fini ;

(II) : quels que soient $x$ , $y \in X$ il existe des voisinages ouverts $V(x)$ , $V(y)$ tels que, pour $s \in G$ , $s.V(x)$ ne rencontre $V(y)$ que si $s.x = y$ ;

(III) : il existe un fermé $D \subset X$ tel que la famille $(s.D)_{s \in G}$ soit un recouvrement localement fini de $X$ ;

(IV) : chaque $s \in G$ autre que $e$ possède au plus un point fixe dans $X$ .

L'hypothèse (II) implique la séparation de $X/G$ ; (III) est l'existence d'un domaine fondamental raisonnable. Les conditions (I) , (II) , (III) sont évidemment vérifiées par tout groupe discontinu sympathique, y compris pour plusieurs variables complexes. (IV) est évidemment spéciale aux groupes fuchsiens (mais fonctionne aussi dans d'autres cas, par exemple les groupes de Hilbert-Blumenthal associés aux corps algébriques totalement réels).

Noter que, si $G$ est fini, (I) , (II) et (III) sont toujours réalisés.

## 2. Cohomologie de $X/G$ et cochaînes invariantes de $X$ .

Soit $A$ un groupe abélien de coefficients. On utilisera la cohomologie d'Alexander-Spanier. On posera donc

$\mathcal{F}^p(X\ ;\ A)$ = applications $X^{p+1} \to A$

$\mathcal{N}^p(X\ ;\ A)$ = applications $X^{p+1} \to A$ nulles au voisinage de la diagonale de $X^{p+1}$ ;

$F^p(X\ ;\ A)$ = groupe quotient $\mathcal{F}^p(X\ ;\ A)/\mathcal{N}^p(X\ ;\ A)$ ;
en munissant $F(X\ ;\ A) = \sum F^p(X\ ;\ A)$ de l'opérateur

$$df(x_o , \ldots , x_{p+1}) = \sum(-1)^i . f(x_o , \ldots , \hat{x}_i , \ldots , x_{p+1})$$

on obtient la cohomologie de $X$ à valeurs dans $A$ .

D'autre part, le groupe $G$ opère sur $F^p(X\ ;\ A)$ par l'intermédiaire de la formule

$$f.s(x_o , \ldots , x_p) = f(s.x_o , \ldots , s.x_p) ,$$

évidemment compatible avec le passage au quotient modulo $\mathcal{N}^p(X\ ;\ A)$ . Les cochaînes de $X$ invariantes par $G$ forment un sous-complexe $F(X\ ;\ A)^G$ de $F(X\ ;\ A)$ .

PROPOSITION 1. - Dans les hypothèses (I) et (II), la cohomologie de $F(X\ ;\ A)^G$ s'identifie canoniquement à $H(X/G\ ;\ A)$ .

DÉMONSTRATION. - Soit $\pi$ la projection $X \to X/G$ . Pour tout ouvert $U \subset X/G$ posons

$$C(U) = \text{complexe des cochaînes invariantes de } \pi^{-1}(U)$$

(ce complexe se définit comme ci-dessus, en remplaçant $X$ par $\pi^{-1}(U)$). Pour $U \supset V$ on a un homomorphisme évident de $C(U)$ dans $C(V)$ ; donc les $C(U)$ définissent sur l'espace $X/G$ un faisceau différentiel $C$ dont on vérifie, comme pour le faisceau d'Alexander-Spanier, que ses sections forment un complexe isomorphe canoniquement et visiblement à $F(X\ ;\ A)^G$ .

Vu les théorèmes généraux sur les faisceaux ( [1] théorème 5, par exemple) tout revient à montrer que le faisceau $C$ sur l'espace $X/G$ est fin, et que son faisceau dérivé est trivial : $\mathcal{H}^o(C) = A$ , $\mathcal{H}^p(C) = 0$ pour $p \geq 1$ . (Noter que $X/G$ est paracompact ...).

La première assertion est évidente : toute partition de l'unité sur $X/G$ se remonte, dans $X$ , en une partition de l'unité formée de fonctions invariantes par $G$ , etc.

Pour le second point, il faut prouver ce qui suit : soit $U$ un voisinage ouvert invariant d'un $x \in X$ , et soit dans $U$ une cochaîne $f$ invariante telle que $df = 0$ ; alors, au besoin en rétrécissant $U$ , il y a dans $U$ une cochaîne $g$ invariante telle que $f = dg$ (en degré $\geqslant 1$ ; en degré $0$ il faut prouver que $f$ est localement constante, ce qui est clair). Or vu les axiomes (I) et (II) on peut supposer $U = \bigcup s.V(x)$ où $V(x)$ est stable par $G(X)$, et où $s.V(x)$ ne rencontre $V(x)$ que pour $s \in G(x)$. Les propriétés de $f$ sont :

1° on a, pour chaque $s \in G$, la relation $f(s.x_o , \dots , s.x_p) = f(x_o , \dots , x_p)$ dès que les $x_i \in U$ sont assez voisins ;

2° on a $\sum (-1)^i f(x_o , \dots , \hat{x}_i , \dots , x_{p+1}) = 0$ dans les mêmes conditions.

Ceci dit, vu que $G(x)$ est fini, on peut supposer, en prenant $V(x)$ assez petit, que l'on a <u>identiquement</u>

$$f(s.x_o , \dots) = f(x_o , \dots) \quad \text{pour} \quad s \in G(x)\,; \quad x_o , \dots \in V(x)$$

$$\sum (-1)^i f(x_o , \dots , \hat{x}_i , \dots , x_{p+1}) = 0 \quad \text{pour} \quad x_o , \dots \in V(x) \ ;$$

si l'on définit une cochaîne de $V(x)$ par

$$g(x_o , \dots , x_{p+1}) = f(x , x_o , \dots , x_{p-1})$$

on vérifie trivialement que $g$ est invariante par $G(x)$, et que $dg = f$ dans $V(x)$. Il suffit alors de translater $g$ pour avoir, dans tout $U$, une cochaîne invariante par $G$ telle que $dg = f$.

C.Q.F.D.

REMARQUE. - Le faisceau $C$ contient de façon évidente le faisceau d'Alexander de $X/G$, mais ne lui est identique que si $G$ opère <u>sans points fixes</u>. La raison en est que, au voisinage d'un point fixe $x$, une cochaîne de $X/G$, considérée comme cochaîne invariante de $X$, doit vérifier les relations

$$f(s_o , x_o , \dots , s_p.x_p) = f(x_o , \dots , x_p) \quad \text{pour} \quad s_o , \dots , s_p \in G(x) ,$$

ce qui signifie évidemment beaucoup plus que l'invariance par

$$(x_o , \dots , x_p) \to (s.x_o , \dots , s.x_p) .$$

## 3. <u>Calcul des groupes</u> $H^p(G ; F^q(X ; A))$ .

Rappelons que, si $F$ est un groupe abélien sur lequel $G$ opère à droite, on peut définir les groupes $H^p(G ; F)$ à l'aide du complexe $C(G ; F)$ défini comme suit : $C^p(G ; F)$ est l'ensemble des applications $G^{p+1} \to F$ qui vérifient la condition de "covariance"

$$f(s_o t , \dots , s_p t) = f(s_o , \dots , s_p)t ,$$

et $C(G\ ;\ F)$ est muni du cobord donné par

$$\delta f(s_o , \ldots , s_{p+1}) = \sum (-1)^i f(s_o , \ldots , \hat{s}_i , \ldots , s_{p+1}) .$$

On a comme on sait les deux propriétés suivantes :

(i) le groupe $H^o(G\ ;\ F)$ est canoniquement isomorphe à $F^G$ , ensemble des invariants de $F$ ;

(ii) de toute suite exacte $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ résulte une suite exacte $0 \to C(G\ ;\ F') \to C(G\ ;\ F) \to C(G\ ;\ F'') \to 0$ et donc une suite exacte de cohomologie

$$\ldots \to H^p(G\ ;\ F') \to H^p(G\ ;\ F) \to H^p(G\ ;\ F'') \to H^{p+1}(G\ ;\ F') \to \ldots$$

On aura dans la suite à considérer le double complexe

$$\sum C^p(G\ ;\ F^q(X\ ;\ A))$$

et à lui appliquer les suites spectrales valables pour tout complexe double. Pour cette raison, nous aurons besoin de calculer les groupes $H^p(G\ ;\ F^q(X\ ;\ A))$ ce qu'on va faire maintenant, avec le résultat que voici :

PROPOSITION 2. - Supposons que $G$ opère sur $X$ en vérifiant les conditions (I), (II) et (III) et soit $X_f$ l'ensemble des points fixes de $G$ dans $X$ . Alors, pour tout groupe de coefficients $A$ , l'application canonique

$$F^q(X\ ;\ A) \to F^q(X_f\ ;\ A)$$

(restriction à $X_f$ d'une cochaîne de $X$) induit des isomorphismes

$$H^p(G\ ;\ F^q(X\ ;\ A)) \approx H^p(G\ ;\ F^q(X_f\ ;\ A)) \quad \text{pour} \quad p \geqslant 1 .$$

La démonstration comprend deux parties.

Première partie de la démonstration. - Avec les notations du début du paragraphe 2 , on a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathfrak{N}^q(X\ ;\ A) & \to & \mathfrak{F}^q(X\ ;\ A) & \to & F^q(X\ ;\ A) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathfrak{N}^q(X_f\ ;\ A) & \to & \mathfrak{F}^q(X_f\ ;\ A) & \to & F^q(X_f\ ;\ A) & \to & 0 ,
\end{array}$$

lequel est commutatif et a pour lignes horizontales des suites exactes. Bien entendu les homomorphismes verticaux consistent à associer à toute application $X^{q+1} \to A$ sa restriction à $(X_f)^{q+1}$ .

Appliquant à ces deux suites exactes les suites exactes de cohomologie (paragraphe 3 , propriété (ii)) on obtient un diagramme <u>commutatif</u> (on supprime A dans les notations)

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^p(G\,;\mathcal{N}^q(X)) & \to & H^p(G\,;\mathcal{F}^q(X)) & \to & H^p(G\,;F^q(X)) & \to & H^{p+1}(G\,;\mathcal{N}^q(X)) & \to & H^{p+1}(G\,;\mathcal{F}^q(X)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^p(G\,;\mathcal{N}^q(X_f)) & \to & H^p(G\,;\mathcal{F}^q(X_f)) & \to & H^p(G\,;F^q(X_f)) & \to & H^{p+1}(G\,;\mathcal{N}^q(X_f)) & \to & H^{p+1}(G\,;\ldots)
\end{array}$$

dont les deux lignes horizontales sont des suites <u>exactes</u>. Vu le lemme des cinq, la proposition sera donc établie si l'on montre que, pour $p \geqslant 1$ , les applications

$$H^p(G\,;\mathcal{N}^q(X)) \to H^p(G\,;\mathcal{N}^q(X_f))$$

$$H^p(G\,;\mathcal{F}^q(X)) \to H^p(G\,;\mathcal{F}^q(X_f))$$

sont des <u>isomorphismes sur</u>.

<u>Deuxième partie de la démonstration</u>. - Soit $\mathcal{Y}^q$ l'ensemble des applications $X^{q+1} \to A$ qui sont nulles sur $(X_f)^{q+1}$ ; on a évidemment la suite exacte

$$0 \to \mathcal{Y}^q \to \mathcal{F}^q(X) \to \mathcal{F}^q(X_f) \to 0 \ ;$$

utilisant la suite exacte de cohomologie pour G on voit que le second isomorphisme indiqué à la fin de la page précédente sera établi si l'on prouve que

(1) $$H^p(G\,;\mathcal{Y}^q) = 0 \quad \text{pour} \quad p \geqslant 1 \ ;$$

de même, le premier isomorphisme résultera de

(2) $$H^p(G\,;\mathcal{N}^q(X) \cap \mathcal{Y}^q) = 0 \quad \text{pour} \quad p \geqslant 1 \ .$$

Cela dit, posons $Y = X^{q+1}$ , $E = (X_f)^{q+1}$ , partie fermée de Y , D = diagonale de Y . Si l'on fait opérer G sur Y par $s.(x_o , \ldots , x_q) = (s.x_o , \ldots , s.x_q)$ il est clair que les axiomes (I) , (II) et (III) sont vérifiés dans Y . En particulier, l'axiome (III), existence d'un "domaine fondamental", implique l'existence sur Y d'une fonction $\theta(y)$ , à valeurs 0 ou 1 , telle que les fonctions $\theta(s.y)$ forment une famille localement finie et vérifient

(3) $$\sum_{s \in G} \theta(s.y) = n(y) = \text{ordre de } G(y)$$

pour tout $y \in Y$ .

Or $\mathcal{Y}^q$ n'est autre que l'ensemble des applications $Y \rightarrow A$ nulles sur $E$, et il est visible que $E$ <u>contient les points fixes de</u> $G$ <u>dans</u> $Y$ ; autrement dit, $n(y) = 1$ en dehors de $E$. Considérons alors un p-cocycle de $G$ à valeurs dans $\mathcal{Y}^q$ ; c'est un système de fonctions

$$f_{s_o, \ldots, s_p}(y)$$

définies sur $Y$, à valeurs dans $A$, et vérifiant les conditions suivantes :

(4) $$f_{s_o, \ldots, s_p}(y) = 0 \quad \text{sur } E \ ;$$

(5) $$f_{s_o t, \ldots, s_p t}(y) = f_{s_o, \ldots, s_p}(t.y) \quad (\text{"covariance"})$$

(6) $$\sum(-1)^i f_{s_o, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, s_{p+1}}(y) = 0 .$$

Posons alors, conformément à une astuce classique,

(7) $$g_{s_o, \ldots, s_{p-1}}(y) = \sum_{s \in G} \theta(s.y) f_{s, s_o, \ldots, s_{p-1}}(y) \ ;$$

il est trivial de vérifier que $g$ satisfait aux conditions (4) et (5), et que de plus

(8) $$\sum(-1)^i g_{s_o, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, s_p}(y) = n(y).f_{s_o, \ldots, s_p}(y) \ ;$$

mais <u>comme</u> $n(y) = 1$ <u>là où</u> $f$ <u>ne s'annule pas</u> la relation (8) montre que $f$ est le cobord de la $(p-1)$-cochaîne $g$ à valeurs dans $\mathcal{Y}^q$ ; d'où la relation (1).

Pour démontrer (2) on procède évidemment de même ; la condition (4) doit alors être vérifiée non seulement pour $y \in E$ mais aussi pour $y$ assez voisin de la diagonale $D$ de $Y$, et tout revient à constater que $g$ vérifie aussi les mêmes conditions ; la raison en est évidemment que, si l'on se place dans (7) au voisinage d'un point $y_o$ de la diagonale, la somme (7) ne fait intervenir qu'un nombre <u>fini</u> de valeurs de $s$, et comme, pour $s$, $s_o, \ldots, s_{p-1}$ donnés, la fonction $f_{s,s_o, \ldots, s_{p-1}}(y)$ est nulle dans un voisinage de $y_o$ on voit bien que le premier membre de (7) est nul au voisinage de $y_o$. La proposition 2 est donc démontrée.

## 4. Utilisation des suites spectrales.

Les propositions 1 et 2 établies, nous pouvons considérer le complexe double

$$C = C(G \; ; \; F(x)) = \sum C^p(G \; ; \; F^q(X)) \; ,$$

muni du cobord $d : F^q(X) \to F^{q+1}(X)$ , et du cobord $\delta : C^p(G \; ; \; F) \to C^{p+1}(G \; ; \; F)$ . On désignera par $H^n(C)$ les groupes de cohomologie de $C$ calculés à l'aide de la différentielle "totale" égale à $d + (-1)^p \delta$ sur $C^p(G \; ; \; F^q)$ .

La première suite spectrale associée à $C$ a pour terme $E_1$ la d-cohomologie de $C$ , la différentielle $d_1$ étant induite par la différentielle $\delta$ . Il s'ensuit facilement que

$$'E_1^{p,q} = C^p(G \; ; \; H^q(X \; ; \; A))$$

muni de $\delta$ , et par suite que

$$(9) \qquad 'E_2^{p,q} = H^p(G \; ; \; H^q(X \; ; \; A)) \; .$$

(On introduit un signe ' pour la première suite spectrale ; la seconde sera indiquée par un signe ").

En particulier, supposons que la cohomologie de $X$ soit triviale : $H^q(X \; ; \; A) = \begin{cases} A & \text{pour } q = 0 \\ 0 & \text{pour } q \geqslant 1 \end{cases}$ . Alors les seuls termes non nuls de $E_2$ sont les $'E_2^{n,o} = H^n(G \; ; \; A)$ , d'où par des raisonnements connus :

$$(10) \qquad H^n(C) \approx H^n(G \; ; \; A) \quad \text{si la cohomologie de } X \text{ est triviale.}$$

Passons maintenant à la seconde suite spectrale. On aura évidemment

$$''E_1^{p,q} = H^q(G \; ; \; F^p(X \; ; \; A)) \quad \text{muni de} \quad d : F^p(X \; ; \; A) \to F^{p+1}(X \; ; \; A) \; .$$

En particulier on aura $''E_1^{p,o} = F^p(X \; ; \; A)^G$ muni de $d$ , d'où, en utilisant la proposition 1 :

$$(11) \qquad ''E_2^{p,o} = H^p(F(X \; ; \; A)^G \approx H^p(X/G \; ; \; A)$$

Pour $q \geqslant 1$ , la proposition 2 montre que

$$(12) \quad ''E_1^{p,q} = H^q(G \; ; \; F^p(X_f \; ; \; A)) \quad \text{muni de} \quad F^p(X_f \; ; \; A) \xrightarrow{d} F^{p+1}(X_f \; ; \; A) \; .$$

Cette formule permet, comme on le verra, de calculer complètement le terme $''E_2$ dans certains cas simples, à savoir le cas où $X_f$ est discret (groupes fuchsiens) et aussi le cas où $G$ est un groupe cyclique d'ordre premier, car alors $G$ opère trivialement sur $X_f$, donc sur $F^p(X_f\ ;\ A)$, ce qui permet d'expliciter complètement $''E_1^{p,q}$ vu qu'on connait les groupes de cohomologie des groupes cycliques.

Les résultats qu'on va donner au n° 5 sont dûs à SERRE.

5. Application aux groupes fuchsiens.

On va maintenant faire l'hypothèse (IV), ou plus généralement supposer que l'ensemble des points fixes de $G$ est discret. On peut alors calculer le terme $''E_2$ de la suite spectrale considérée à la page précédente. En effet, comme $X_f$ est discret, on a canoniquement

$$F^p(X_f\ ;\ A) = F^o(X_f\ ;\ A) = \text{applications } X_f \longrightarrow A \tag{13}$$

en associant à une p-cochaîne $f(x_o, \ldots, x_p)$ de $X_f$ la fonction $f(x, \ldots, x)$ ; modulo l'identification (13) il est visible que la différentielle $d : F^p(X_f\ ;\ A \longrightarrow F^{p+1}(X_f\ ;\ A)$ est nulle si $p$ est pair, et est l'application identique $F^o(X_f\ ;\ A) \longrightarrow F^o(X_f\ ;\ A)$ si $p$ est impair, de sorte que l'on a un résultat analogue pour la différentielle $d_1$ de $''E_1$. On tire immédiatement de là les résultats suivants :

$$''E_2^{p,o} = H^p(X/G\ ;\ A) \quad ; \quad ''E_2^{o,q} = H^q(G\ ;\ F^o(X_f\ ;\ A)) \quad ; \quad ''E_2^{p,q} = 0 \text{ si } p \text{ et } q \neq 0 .$$

Or dans une telle situation on sait ( [2], proposition 3 page 437) qu'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow {''E_2^{1,o}} \longrightarrow H^1(C) \longrightarrow {''E_2^{o,1}} \longrightarrow {''E_2^{2,o}} \longrightarrow H^2(C) \longrightarrow {''E_2^{o,2}} \longrightarrow \ldots$$

Si donc la cohomologie de $X$ est triviale (auquel cas on a (10)) il viendra une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(X/G\ ;\ A) \longrightarrow H^1(G\ ;\ A) \longrightarrow H^1(G\ ;\ F^o(X_f\ ;\ A)) \longrightarrow H^2(X/G\ ;A) \longrightarrow H^2(G\ ;A) \longrightarrow \ldots$$

Prenons alors $X$ = demi-plan $I(z) > 0$, et pour $G$ un groupe fuchsien. Comme $X/G$ est de dimension 2, on a $H^n(X/G\ ;\ A) = 0$ pour $n \geqslant 3$, de sorte que la suite exacte précédente donne des isomorphismes

(14) $$H^n(G\ ;\ A) \approx H^n(G\ ;\ F^o(X_f\ ;\ A)) \text{ pour } n \geqslant 3\ ;$$

si la surface de Riemann $X/G$ est <u>non compacte</u> on a aussi $H^2(X/G\ ;\ A) = 0$ ; donc (13) est encore valable pour $n = 2$, et la suite exacte trouvée se réduit à la suite exacte suivante :

(15) $$0 \to H^1(X/G\ ;\ A) \to H^1(G\ ;\ A) \to H^1(G\ ;\ F^o(X_f\ ;\ A)) \to 0\ .$$

Si au contraire la surface de Riemann $X/G$ est <u>compacte</u> on a seulement (14) et une suite exacte à 6 termes (qu'il devrait être possible de décanuler).

Pour obtenir des résultats complets, il faut encore calculer les groupes $H^n(G\ ;\ F^o(X_f\ ;\ A))$, ce qui est facile. Pour un $x \in X_f$ désignons en effet par $M(x)$ l'ensemble des applications $G \to A$ constantes sur les classes $s.G(x)$ ; il est clair que

$$F^o(X_f\ ;\ A) \approx \prod_{x \bmod G} M(x)$$

d'où

$$H^n(G\ ;\ F^o(X_f\ ;\ A)) \approx \prod_{x \bmod G} H^n(G\ ;\ M(x)) \approx \prod_{x \bmod G} H^n(G(x)\ ;\ A)$$

en vertu de résultats connus.

Dans le cas des groupes fuchsiens, on sait que $G(x)$ est cyclique d'ordre $n(x)$. Si donc $G$ a un nombre fini de classes de points fixes, d'ordres $n_1, \ldots, n_k$, on aura

$$H^p(G\ ;\ F^o(X_f\ ;\ A)) \approx \prod H^p(Z_{n_i}\ ;\ A)\ ,$$

groupes bien connus.

EXEMPLE. - $G$ = <u>groupe modulaire</u>. $X/G$ = sphère moins un point, donc (15) montre que (14) vaut aussi pour $n = 1$ (et $n = 2$ vu $X/G$ non compacte). Ici on a deux entiers $n_i$, savoir 2 et 3. Donc il vient

$$H^p(G\ ;\ A) = H^p(Z_2\ ;\ A) \times H^p(Z_3\ ;\ A)$$

pour tout groupe $A$ sur lequel $G$ opère trivialement. Par exemple :

$$H^p(G\ ;\ Z) = Z_2 \times Z_3 \text{ si } p \text{ est pair,}$$

$= 0$ si $p$ est impair.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri). - Théorèmes fondamentaux de la théorie des faisceaux, Séminaire Cartan, t. 3, 1950/51.

[2] SERRE (Jean-Pierre). - Homologie singulière des espaces fibrés, Annals of Math., t. 54, 1951, p. 425-505 (Thèse Sc. math. Paris. 1951).