LAURENT SCHWARTZ

Solution élémentaire d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 87, p. 345-350

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__345_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1953)

SOLUTION ÉLÉMENTAIRE D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES A COEFFICIENTS CONSTANTS

[d'après B. MALGRANGE ([1])]

par Laurent SCHWARTZ

1. Première recherche d'une solution élémentaire.

Soit D un opérateur différentiel à coefficients constants dans $X^n = R^n$. Une solution élémentaire est une distribution E telle que

(1) $$D.E = D\delta * E = \delta$$

L'idée naturelle est de chercher une telle solution par transformation de Fourier. Si E est tempérée, et si on désigne par P le polynôme en y transformé de Fourier de $D\delta_x$, et par F_y l'image de Fourier de E_x, (1) équivaut à

(2) $$P(y)F_y = 1$$

de sorte que la recherche de F_y est la résolution d'un problème de division, dont on ne sait pas s'il a des solutions quand la variété d'équation $P(y) = 0$ a des singularités trop affreuses ([2]).

Supposons trouvée une solution élémentaire E, on peut se poser le problème suivant : Résoudre l'équation avec second membre

(3) $$D.T = A .$$

Pour cela, la connaissance d'une solution élémentaire n'est pas suffisante. Si $E \in \mathcal{S}'$, on pourra résoudre (3) par

(4) $$T = E * A + \text{solution de l'équation homogène, pour } A \in \mathcal{O}'_c .$$

Si $E \in \mathcal{O}'_c$, cette formule sera valable pour $A \in \mathcal{S}'$. De toute façon, une telle formule ne serait valable pour toute $A \in \mathcal{D}'$ que si $E \in \mathcal{E}'$, ce qui n'arrive jamais (sauf pour D = identité).

([1]) L'ouvrage de MALGRANGE est paru depuis le présent exposé [3]. Les notations sont celles de la théorie des distributions.

([2]) Ce problème de division vient d'être résolu par HÖRMANDER, et, dans un cas plus général, par LOJASIEWICZ (démonstration non encore publiée).

2. L'espace $\mathcal{S}(\Gamma)$.

Soit Γ un ensemble non vide du dual Y^n de R^n. $\mathcal{S}(\Gamma)$ est l'ensemble des φ, fonctions indéfiniment différentiables sur X^n, telles que, pour tout $y \in \Gamma$, la la fonction $\exp(-2\pi < x , y >) \varphi(x)$ soit dans $\mathcal{S}_x$. On mettra sur $\mathcal{S}(\Gamma)$ la topologie la moins fine rendant continues les applications $\varphi \rightarrow \exp(-2\pi<x.y>)$ de $\mathcal{S}(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}$. Si $\hat{\Gamma}$ est l'enveloppe convexe de Γ, $\mathcal{S}(\hat{\Gamma})$ est algébriquement et topologiquement identique à $\mathcal{S}(\Gamma)$, on peut donc supposer Γ convexe ; les dérivations, les translations ou convolutions avec $\mathcal{E}'$, les multiplications par des polynômes ou par $\mathcal{O}_M$, sont des opérateurs continus dans $\mathcal{S}(\Gamma)$. A défaut de pouvoir montrer que D est un monomorphisme de $\mathcal{S}$ dans lui-même, on a le théorème suivant

THÉORÈME 1. - D <u>est un monomorphisme</u> [3] <u>de</u> $\mathcal{S}(\Gamma)$ <u>dans lui-même, dès que</u> Γ <u>est ouvert</u>.

Autrement dit, si $\varphi \in \mathcal{S}(\Gamma)$ est telle que $D.\varphi$ converge vers 0 dans $\mathcal{S}(\Gamma)$, alors φ converge vers 0 dans $\mathcal{S}(\Gamma)$. On peut toujours choisir un système d'axes tel que

$$D = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^p \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^p + \sum_{k=p-1}^{0} D^k \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k \tag{5}$$

où les D^k sont des dérivations en $\frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Il suffira alors de démontrer que D est un monomorphisme dans $\mathcal{S}(\Gamma)$, lorsque Γ est un segment ouvert (a , b) situé sur l'axe des y_1.

La démonstration repose alors sur la théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(a , b)$. $\mathcal{F}\varphi = \Psi$ est une fonction de y qui, pour tout système $(y_2 , y_3 \ldots y_n)$ se prolonge en une fonction holomorphe de $y_1 + i\eta_1$ pour $\eta_1 \in (-b , -a)$. Mais la formule de Jensen montre que, si Q est un polynôme unitaire en Z de degré p, G une fonction holomorphe de Z dans le disque $|Z| < R$, on a

$$|G(0)| \leq \left(\sup_{|Z| < R} |Q(Z) G(Z)| \right)/R^p \tag{6}$$

L'intérêt de cette majoration est que son coefficient (le meilleur possible) est indépendant des coefficients du polynôme Q. On en déduit que si

---

[3] Monomorphisme = homomorphisme (au sens de Bourbaki) biunivoque, épimorphisme = homomorphisme sur.

$a < c - R < c < c + R < b$, on aura

$$(7)\quad |\Psi(y_1-ic,y_2,\dots,y_n)| \leq \frac{1}{R^p} \sup_{\substack{y_1,y_2\dots y_n,\gamma \\ \gamma = c \pm R}} |\Psi(y_1-i\gamma,y_2,\dots,y_n)P(y_1-i\gamma,y_2,\dots,y_n)|$$

En écrivant des inégalités analogues pour les produits de polynômes par des dérivées de Ψ , et compte tenu de ce que $\Psi(y_1 - ic , y_2 , \dots , y_n)$ est l'image de Fourier de $\exp(-2\pi cx_1)\ \varphi(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$, on a bien montré que si $\exp(-2\pi(c \pm R)x_1)D\varphi$ converge vers 0 dans $\mathcal{S}$, alors $\exp(-2\pi cx_1)\varphi$ converge vers 0 dans $\mathcal{S}$,

C.Q.F.D.

En appliquant le théorème 1 à ${}^tD = \check{D}$, on en déduit par dualité :

COROLLAIRE. - D applique $(\mathcal{S}(\Gamma))'$ sur $(\mathcal{S}(\Gamma))'$ [4]

3. Existence d'une solution élémentaire.

Un élément de $(\mathcal{S}(\Gamma))'$ est une distribution d'ordre fini dont la croissance est sûrement majorée à l'infini par $e^{2\pi Cr}$, C borne supérieure de la distance d'un point de Γ à l'origine. $(\mathcal{S}(\Gamma_1))' \supset (\mathcal{S}(\Gamma_2))'$ si $\Gamma_1 \supset \Gamma_2$; en particulier si $\Gamma \supset \{0\}$, $(\mathcal{S}(\Gamma))' \supset \mathcal{S}'$. Donc, d'après le corollaire :

THÉORÈME 2. - Il existe une solution élémentaire E de l'opérateur D ; quelle que soit $A \in \mathcal{S}'$, et $\varepsilon > 0$, il existe $T \in (\mathcal{S}(B_\varepsilon))'$ (B_ε = boule de centre 0 et de rayon ε), donc d'ordre fini et majorée à l'infini par $\exp(2\pi\varepsilon r)$, telle que D.T = A . (On ne sait pas s'il existe $T \in \mathcal{S}'$, ni si $E \in \mathcal{S}'$ [4bis] .

4. Opérateur D dans les espaces $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$.

THÉORÈME 3. - D est un monomorphisme (fort ou faible) de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}'$ et un épimorphisme (fort ou faible) de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$.

Si $T \in \mathcal{E}'_K$ (K compact de X^n), et si $D.T \to 0$ dans $\mathcal{E}'_K$ la formule $T = E * DT$ montre que T converge vers 0 dans $\mathcal{E}'_K$. Donc D , restreint à $\mathcal{E}'_K$ est un monomorphisme, donc $D.\mathcal{E}'_K$ est complet donc fermé dans $\mathcal{E}'$, où il est aussi faiblement fermé ($\mathcal{E}$ étant réflexif).

D'après le théorème de LIONS [2] sur le support d'un produit de convolution [2] si K est convexe, $D.\mathcal{E}'_K = (D.\mathcal{E}') \cap \mathcal{E}'_K$; alors $D.\mathcal{E}'$ est un sous-espace

---

(4) Le transposé d'un monomorphisme d'un espace de Fréchet dans un espace de Fréchet est une surjection.

(4bis) On le sait maintenant grâce à la solution du problème de la division, voir note 2 .

vectoriel de $\mathcal{E}'$ dont l'intersection avec chaque $\mathcal{E}'_K$ et par suite avec chaque ensemble borné faiblement fermé de $\mathcal{E}'$ est faiblement fermée ; d'après un théorème de Banach, $D.\mathcal{E}'$ est faiblement fermé dans $\mathcal{E}'$. Cela prouve que ${}^tD$ est un homomorphisme faible ou fort de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, donc un épimorphisme puisque D est biunivoque ; alors D est un monomorphisme faible (et on peut démontrer qu'il est un monomorphisme fort, parce que $\mathcal{E}$ est un espace de Fréchet-Schwartz) (5) En substituant ensuite $\check{D}$ à D, on démontre bien le théorème.

COROLLAIRE. - Quelle que soit $\alpha \in \mathcal{E}$, il existe $\beta \in \mathcal{E}$ telle que $D.\beta = \alpha$. (Propriété entièrement nouvelle ; même pour $D = \Delta$, non triviale).

5. L'opérateur D dans les espaces $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$.

Soit k l'ordre de la solution élémentaire E.

Soit $\varphi \in \mathcal{E}'$; si $D.\varphi \in \mathcal{D}_K^{m+k}$, K convexe compact, alors $\varphi = E * D.\varphi \in \mathcal{D}^m$ et même $\in \mathcal{D}_K^m$ (théorème de Lions). De plus si $D\varphi \to 0$ dans $\mathcal{D}_K^{m+k}$, alors $\varphi \to 0$ dans $\mathcal{D}_K^m$. Soit $V = (D.\mathcal{D}^m) \cap \mathcal{D}^{m+k}$. Nous venons de montrer que si $D.\varphi \to 0$ dans V muni de la topologie limite inductive θ des $V \cap \mathcal{D}_K^{m+k}$, $\varphi \to 0$ dans $\mathcal{D}^m$; mais cette topologie limite inductive θ est plus fine que la topologie induite par $\mathcal{D}^{m+k}$, de sorte que nous ne savons pas si, lorsque $D\varphi \to 0$ dans $\mathcal{D}^{m+k}$, $\varphi \to 0$ dans $\mathcal{D}^m$.

Nous utiliserons le lemme suivant.

LEMME. - Si E est limite inductive stricte d'une suite d'espaces E_ν, et si H est une partie convexe de E tel que chacun des $H \cap E_\nu$ soit compact dans E_ν, alors la topologie induite par E sur H est identique à la limite inductive localement convexe des topologies des $H \cap E_\nu$.

Nous prendrons ici $E = \mathcal{D}^{m+k}$, $E_\nu = \mathcal{D}_K^{m+k}$, H = sous-ensemble de V formé des $\varphi \in V$ dont les dérivées (au sens distributions) d'ordre $\leq m + k + 1$ sont des fonctions majorées par 1. Sur H, la topologie limite inductive des $H \cap \mathcal{D}_K^{m+k}$ est plus fine que θ ; elle doit d'après le lemme être identique à la topologie induite par $\mathcal{D}^{m+k}$, donc sur H la topologie θ est identique à la topologie induite par $\mathcal{D}^{m+k}$. Mais si $D.\varphi \in \mathcal{D}^{m+k+1}$ et $\to 0$ dans $\mathcal{D}^{m+k+1}$, elle fini par être dans H et $\to 0$ dans $\mathcal{D}^{m+k}$, donc $\varphi \to 0$ dans $\mathcal{D}^m$. D'où

(5) $\mathcal{E}$ a été appelé par GROTHENDIECK "espace de Schwartz" si, quel que soit le voisinage $\mathcal{U}$ de 0, disqué, il existe un autre voisinage v de 0, $v \subset \mathcal{U}$ tel que l'image de v dans l'espace normé séparé $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ soit précompacte.

THÉORÈME 4. - Si l'on munit $\mathcal{D}$ de la topologie $\mathcal{T}$ la moins fine rendant continues toutes les immersions de $\mathcal{D}$ dans les $\mathcal{D}^m$, D est un monomorphisme.

REMARQUE. - $D.\mathcal{D} = (D\,\mathcal{E}') \cap \mathcal{D}$ est fermé dans $\mathcal{D}$.

Le dual de $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ est l'espace $\mathcal{D}'_F$ des distributions d'ordre fini sur R^n. D'où en raisonnant sur ${}^tD$, le théorème 4 donne par dualité.

THÉORÈME 5. - D applique $\mathcal{D}'_F$ sur $\mathcal{D}'_F$.

Quelle que soit A, distribution d'ordre fini, il existe T, distribution d'ordre fini, telle que $D.T = A$. Plus précisément si $A \in \mathcal{D}'^m$, il existe $T \in \mathcal{D}'^{m+k+1}$, telle que $D.T = A$.

Cela ne permet pas d'affirmer que $D.\mathcal{D}' = \mathcal{D}'$ (6).

6. Cas des opérateurs hypoelliptiques.

L'opérateur D est dit hypoelliptique si $T \in \mathcal{D}'$ est une fonction indéfiniment dérivable dans tout ouvert Ω où $D.T$ est une fonction indéfiniment dérivable.

THÉORÈME 6. - Si D est hypoelliptique, il applique $\mathcal{D}'$ sur $\mathcal{D}'$.

Car soit E la solution élémentaire. Dans le complémentaire de l'origine c'est une fonction indéfiniment dérivable. Donc, si $\alpha \in \mathcal{D}$ est égale à 1 sur un voisinage de 0 de R^n, $\varpi = \alpha E$ est une paramétrix c'est-à-dire $\varpi \in \mathcal{E}'$ et

$$D.\varpi = \delta - L\,, \quad L \in \mathcal{D}\,. \tag{6}$$

Alors, si $A \in \mathcal{D}'$:

$$A = \underbrace{L * A}_{\in \mathcal{E} = D.\mathcal{E}} + \underbrace{D.(\varpi * A)}_{\in D.\mathcal{D}'} \in D.\mathcal{D}'\,.$$

REMARQUE. - Comme $D\mathcal{D}$ est fermé dans $\mathcal{D}$, D est un homomorphisme faible de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$, et comme il est épijectif, c'est un épimorphisme faible.

REMARQUE. - On démontre sans difficulté que le quotient $\mathcal{E}/D\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{D}'/D\mathcal{D}'$) est l'espace vectoriel de cohomologie de R^n, $H^1(R^n\,;\,\mathcal{F})$, où $\mathcal{F}$ est le faisceau des germes de fonctions indéfiniment différentiables (resp. des germes de distributions) solutions de $DT = 0$. Cela prouve par une autre méthode que,

---

(6) Ce théorème a été démontré depuis par EHRENPREIS [1]. EHRENPREIS a publié beaucoup de travaux dans cette direction, et a retrouvé indépendamment plusieurs des théorèmes énoncés ici.

si D est hypoelliptique,

$$\mathcal{D}'/D\mathcal{D}' = \mathcal{E}/D\mathcal{E} = \{0\} \quad ,$$

donc, $D\mathcal{D}' = \mathcal{D}'$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] EHRENPREIS (Léon). - The division problem for distributions, Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 41, 1955, p. 756-758.

[2] LIONS (Jacques-Louis). - Supports de produits de composition, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 232, 1951, p. 1530- 1532.

[3] MALGRANGE (Bernard). - Existence et approximation des solutions aux équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 271-356 (Thèse Sc. math. Paris. 1955).

[Juin 1958]