ROGER GODEMENT

Travaux de Hecke, IV

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 80, p. 287-293

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__287_0>

TRAVAUX DE HECKE, IV,

par Roger GODEMENT

1. Matrice de transformation.

On désigne par $\underset{\sim}{M}_n$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ àcoefficients entiers vérifiant $ad - bc = n$. L'ensemble $\underset{\sim}{M}_1$ est un groupe (groupe modulaire "homogène") dont le groupe modulaire Γ est un quotient évident.

On peut faire opérer $\underset{\sim}{M}_1$ à gauche sur $\underset{\sim}{M}_n$ par multiplication ; on dira donc que A, $B \in \underset{\sim}{M}_n$ sont équivalentes si $A = CB$ avec $C \in \underset{\sim}{M}_1$, d'où un partage de M_n en classes d'équivalence.

Dans $\underset{\sim}{M}_n$, toute classe contient une matrice et une seule de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ avec } d|n \, , \quad d > 0 \, , \quad ad = n \, , \quad 0 \leqslant b < d \; ; \tag{1}$$

la démonstration de ce fait fort élémentaire est laissée au lecteur bénévole, ainsi que celle de l'assertion suivante, qui en résulte trivialement : le nombre de classes est fini, et égal à $\sigma_1(n) = \sum_{d|n} d$.

Si $n = p$ premier, on peut donc représenter les classes de M_p par les $p + 1$ matrices

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & p \end{pmatrix} \qquad (0 \leqslant b < p) \, . \tag{2}$$

2. Opérateurs $T_k(n)$.

Soit $f(z)$ une forme modulaire de dimension $-k$ [1] ; comme dans la théorie des fonctions elliptiques posons $z = \omega_1/\omega_2$ $\omega = (\omega_1 , \omega_2)$ et $F(\omega) = \omega_2^{-k} f(\omega_1/\omega_2)$; alors F devient une fonction de ω, homogène et de degré $-k$; la propriété fonctionnelle des formes modulaires de dim $-k$ revient alors à dire que $F(\omega)$ est invariable par les substitutions $\omega \longrightarrow M \omega$ pour $M \in \underset{\sim}{M}_1$.

Si maintenant $M \in \underset{\sim}{M}_n$ il est clair d'après ce qui précède que la fonction $F(M\omega)$ ne dépend que de la classe de M au sens du n° 1 ; vu qu'il n'y a qu'un

---

[1] GODEMENT (Roger). - Travaux de Hecke, III, Séminaire BOURBAKI, t. 5, 1952/53.

nombre fini de classes on peut donc former la fonction $T(n)F$ donnée par

$$T(n)F(\omega) = \sum_{M \in \underset{\sim}{M}_n | \underset{\sim}{M}_1} F(M\omega)$$

où la sommation est étendue aux classes dans M_n. Si $A \in M_1$, et si M parcourt un système de représentants des classes, il en est évidemment de même de MA ; on en conclut que la fonction $T(n)F$ est encore invariante par $\underset{\sim}{M}_1$.

Si l'on revient à la forme "non homogène" et si l'on utilise la représentation (1) des classes, on a donc le résultat suivant : soit $f(z)$ une forme modulaire de dimension $-k$; pour n entier > 0, posons

$$T_k(n)f(z) = n^{k-1} \sum_{\substack{ad = n \\ d > 0 \\ b \bmod d}} d^{-k} f\left(\frac{az+b}{d}\right) \tag{3}$$

alors la fonction $T_k(n)f$ vérifie encore l'identité qui définit les formes modulaires de dimension $-k$.

(Le facteur n^{k-1} figurent dans (3) est là pour simplifier les formules ultérieures).

Il est immédiat de voir qu'en fait $T_k(n)f$ est encore une forme modulaire "entière", i.e. bornée dans le domaine fondamental, i.e. régulière à l'infini. Pour ce faire, on peut, c'est du reste utile pour la suite, calculer la série de Fourier de $T_k(n)f$ en fonction de celle de f. Si $f(z) = \sum a_p e^{2\pi ipz}$.

Il vient en utilisant (3) et par des calculs évidents

$$T_k(n)f(z) = \sum b_p e^{2\pi ipz} \tag{4}$$

avec

$$b_m = b(m) = \sum_{d | m,n} d^{k-1} . a\left(\frac{mn}{d^2}\right) , \tag{5}$$

somme étendue aux diviseurs communs à m et n.

Ceci met en évidence que, si $a_m = 0$ pour $m > 0$, alors $b_m = 0$ pour $m > 0$. En conséquence, <u>les</u> $T_k(n)$ <u>opèrent dans le vectoriel</u> $\mathcal{F}_k$ <u>des formes modulaires de dimension</u> $-k$.

3. Formule de multiplication.

La principale propriété des opérateurs $T_k(n)$ est de vérifier

$$T_k(m)T_k(n) = \sum_{d | m,n} T_k(mn/d^2)d^{k-1} \quad . \tag{6}$$

Pour démontrer (6) on peut, comme HECKE, utiliser (3), mais on est alors conduit à des calculs relativement pénibles. Il est beuacoup plus simple d'utiliser (5) en considérant que les $T_k(n)$ opèrent sur les coefficients de Fourier.

La formule (6) montre évidemment qu'on a la propriété de "multiplicativité restreinte", à savoir

(7) $$T_k(m)T_k(n) = T_k(mn) \qquad \text{pour} \quad (m, n) = 1 .$$

D'autre part, pour p premier, on déduit de (6)

(8) $$T_k(p)T_k(p^r) = T_k(p^{r+1}) + p^{k-1}T_k(p^{r-1}) .$$

Bien entendu, (6) montre aussi que les combinaisons linéaires des $T_k(n)$ forment, dans $\mathfrak{F}_k$, une algèbre commutative ; on montrera plus loin qu'elle est semi-simple.

Considérons maintenant (pour le moment au point de vue purement formel) la série de Dirichlet

(9) $$\Phi(s) = \sum_1^\infty T_k(n).n^{-s} \quad ;$$

vu (7) on a trivialement

$$\Phi(s) = \prod \Phi_p(s) \qquad (p \text{ premier})$$

où

$$\Phi_p(s) = \sum_{r=0}^{r=\infty} T_k(p^r)p^{-rs} \quad ;$$

utilisant (8) on a

$$T_k(p)p^{-s}\,\Phi_p(s) = \sum T_k(p)T_k(p^r)p^{-(r+1)s} = \sum T_k(p^{r+1})p^{-(r+1)s}$$
$$+ p^{k-1-2s}\sum T_k(p^{r-1})p^{-(r-1)s} = \Phi_p(s) - 1 + p^{k-1-2s}\,\Phi_p(s)$$

d'où résulte que

$$\Phi_p(s) = [1 - T_k(p)p^{-s} + p^{k-1-2s}]^{-1} \quad ;$$

en conséquence on a l'identité

(10) $$\sum T_k(n)n^{-s} = \prod [1 - T_k(p)p^{-s} + p^{k-1-2s}]^{-1} .$$

4. Série de Dirichlet associée à une forme modulaire.

A toute forme modulaire de dimension $-k$

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n.e^{2\pi inz}$$

associons la série de Dirichlet

$$\varphi(s) = \sum_1^{\infty} a_n . n^{-s} \quad ;$$

cette série possède une abscisse de convergence finie. Tout d'abord, si f est la série d'Eisenstein

$$G_k(z) = 2\,\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{\Gamma(k)} \sum \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n z}$$

(voir le 3e exposé sur les travaux de Hecke) la série de Dirichlet correspondante est, à un facteur constant près,

$$\sum \sigma_{k-1}(n) n^{-s} = \zeta(s)\ \zeta(s - k + 1)$$

d'où notre assertion dans ce cas. Dans le cas général, et posant $f(\infty) = a_0$ on peut écrire $f(z) = a_0 G_k(z)/2\ \zeta(k) + g(z)$ où la forme modulaire g est nulle à l'infini (on dit alors que g est une "Spitzenform"). Mais les coefficients de Fourier a_n d'une Spitzenform $f(z)$ vérifient une relation

$$a_n = O(n^{k/2}) \quad ;$$

en effet, le développement de f en série entière par rapport à $e^{2\pi i z}$ contient $e^{2\pi i z}$ en facteur ; on a donc une relation $f(z) = O(e^{2\pi i z}) = O(e^{-2\pi y})$; comme de plus $|f(z)|y^{k/2}$ est absolument invariante par Γ on en déduit une relation de la forme $|f(z)| \leq M.y^{-k/2}$ dans tout le demi-plan. Ecrivant alors que

$$a_n = \int_0^1 f(x + \frac{i}{n}) e^{-2\pi i n (x + i/n)} dx$$

on trouve immédiatement la relation cherchée.

On voit donc que la série de Dirichlet associée à une Spitzenform converge au minimum pour $\mathcal{R}(s) > 1 + k/2$.

Il est facile de calculer $\varphi(s)$ à l'aide d'une intégrale portant sur $f(z)$ (de même qu'on passe de la fonction dzêta usuelle à la fonction thêta non moins usuelle ...) ; pour cela on écrit

$$\Gamma(s) = (2\pi n)^s \int_0^{+\infty} e^{-2\pi n y} y^{s-1} dy$$

d'où

$$(2\pi)^{-s}\ \Gamma(s)\varphi(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \int_0^{+\infty} e^{-2\pi n y} y^{s-1} dy$$

et finalement

$$(11) \qquad R(s) = (2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\,\varphi(s) = \int_0^{+\infty} [f(iy) - f(\infty)]\, y^{s-1}\, dy$$

formule valable pour $\mathcal{R}(s)$ assez .

Toutes les séries de Dirichlet $\varphi(s)$ vérifient une équation fonctionnelle analogue à celle de la fonction dzêta de Riemann. Pour le voir on écrit, comme d'habitude, (11) sous la forme

$$(12) \qquad R(s) = \int_1^{\infty} [f(iy) - f(\infty)]y^{s-1}dy + \int_1^{\infty} [(iy)^k f(iy) - f(\infty)]y^{-s-1}dy$$

(on a utilisé la relation $f(i/y) = (iy)^k f(iy)$ pour ramener l'intégration de 0 à 1 à une intégrale de 1 à ∞) ; posant $f(iy) = f(\infty) + g(y)$, on a vu que $g(y) = O(e^{-2\pi y})$ de sorte que la formule

$$\Psi(s) = \int_1^{\infty} g(y)y^{s-1}dy$$

représente une fonction entière de s ; de plus (12) s'écrit par des calculs évidents

$$R(s) = \Psi(s) + i^k \Psi(k - s) + f(\infty)\,[\frac{i^k}{s-k} - \frac{1}{s}] \quad ;$$

vu que $\Gamma(s)$ possède un pôle simple pour $s = 0$, on en déduit :

1° que la fonction $(s - k)\varphi(s)$ est entière, et même que $\varphi(s)$ est entière si f est une Spitzenform ;

2° qu'on a l'équation fonctionnelle

$$i^k R(k - s) = R(s) \ .$$

5. Produit scalaire de Petersson.

Pour établir la semi-simplicité des $T_k(n)$, que HECKE n'avait pu démontrer, on va utiliser une astuce dûe à PETERSSON. Soient f et g deux formes modulaires de dimension $-k$; il est clair qu'alors la forme différentielle $f(z)\overline{g(z)}y^{k-2}dxdy$ est absolument invariante par Γ . Si de plus f (ou g) est une Spitzenform, il est immédiat de vérifier que l'intégrale de cette forme étendue au domaine fondamental usuel est convergente ; vu la propriété d'invariance, cette intégrale ne change d'ailleurs pas quand on le remplace par tout autre domaine fondamental de Γ.

On est donc conduit à introduire, sur le sous-espace $\mathfrak{F}_k^0$ des Spitzenformen (lequel est de codimension 1 dans $\mathfrak{F}_k$, et évidemment stable par les opérateurs $T_k(n)$) le produit scalaire

$$(f\ ,\ g) = \iint f(z)\overline{g(z)}y^{k-2}dxdy\ ,$$

l'intégrale étant étendue à l'un quelconque des domaines fondamentaux de Γ. Le résultat fondamental est que, relativement à ce produit scalaire, les opérateurs $T_k(n)$ sont hermitiens, Il suffit d'ailleurs, d'après (7) et (8), de le vérifier pour $n = p$ premier ; on utilise pour cela des raisonnement très élémentaires (mais assez astucieux) et entre autres le fait suivant : dans l'ensemble $\underset{\sim}{M}_p$ des matrices entières de déterminant p, on peut faire opérer le groupe modulaire homogène $\underset{\sim}{M}_1$ aussi bien à droite qu'à gauche, d'où deux relations d'équivalence dans $\underset{\sim}{M}_p$; cela dit, on peut choisir un système de représentants commun pour ces deux relations.

6. Applications aux séries de Dirichlet.

Les $T_k(n)$ étant hermitiens engendrent dans $\mathcal{F}_k^o$ une algèbre semi-simple ; donc on peut trouver une base de $\mathcal{F}_k^o$ formée de fonctions propres des opérateurs $T_k(n)$. Or soit $f(z) = \sum a_n e^{2\pi i n z}$ une telle fonction propre :

$$T_k(n)f = \lambda(n)f \qquad \text{pour tout } n ;$$

vu (5) on a donc $\lambda(n)a(m) = \sum d^{k-1}a(mn/d^2)$ et en particulier

$$a_n = \lambda(n)a_1 \quad ;$$

supposons $a_1 = 1$, ce qui est permis ; alors on voit que la série de Dirichlet φ associée à f n'est autre que

$$\varphi(s) = \sum \lambda(n).n^{-s} \quad ;$$

comme les $\lambda(n)$ vérifient évidemment les mêmes formules de multiplication que les $T_k(n)$ le raisonnement qui nous a conduit à l'identité formelle (10) donne ici pour $\varphi(s)$ le développement en produit infini

$$\varphi(s) = \prod [1 - \lambda(p)p^{-s} + p^{k-1-2s}]^{-1} .$$

On voit donc que les séries de Dirichlet définies par les formes modulaires de dimension $-k$, outre qu'elles vérifient toutes la même équation fonctionnelle, sont des combinaisons linéaires de fonctions possèdant un un développement en produit infini.

Exmeple (Ramanujan) : prenons la fonction

$$\Delta(z) = e^{2\pi i z}\prod(1 - e^{2\pi i n z})^{24} = \sum \tau(n).e^{2\pi i n z} \quad ;$$

c'est à un facteur constant près la seule forme modulaire de dimension -12 nulle à l'infini ; donc elle doit être fonction propre des $T_{12}(n)$, les valeurs propres, vu $\lambda(n) = a_n/a_1$, étant nécessairement les $\tau(n)$.

En conséquence on a les propriétés suivantes de la série

$$\varphi(s) = \sum \tau(n).n^{-s} \quad :$$

1° elles vérifie l'équation fonctionnelle disant que

$$(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\,\varphi(s) \quad \text{est invariante par} \quad s \longrightarrow 12 - s$$

2° elle admet le développement

$$\varphi(s) = \prod [1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s}]^{-1} .$$

Il y a bien entendu pour toutes ces fonctions de nombreuses hypothèses de Riemann à démontrer ...