

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

RENÉ THOM

## **Sous-variétés et classes d'homologie des variétés différentiables**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1954, exp. n° 78, p. 271-277

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1951-1954\\_\\_2\\_\\_271\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__271_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOUS-VARIÉTÉS ET CLASSES D'HOMOLOGIE DES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

par René THOM

Soit  $W^p$  une variété compacte de dimension  $p$ , orientable. A toute orientation de  $W^p$  correspond une classe du groupe d'homologie  $H_p(W^p; Z)$ , appelée classe fondamentale de la variété  $W^p$ ; si les coefficients sont pris dans  $Z_2$ , la classe fondamentale de  $H_p(W^p; Z_2)$  est définie de façon unique, même si  $W^p$  n'est pas orientable. Supposons que  $W^p$  soit une sous-variété d'une variété compacte  $V^n$  ( $n > p$ ); l'application identique  $i$  de  $W^p$  dans  $V^n$  induit alors un homomorphisme  $i_*$  du groupe d'homologie  $H_p(W^p)$  dans le groupe  $H_p(V^n)$ ; soit  $z \in H_p(V^n)$  l'image par  $i_*$  de la classe fondamentale de  $W^p$ ; on dira qu'alors la classe  $z$  est réalisée par la sous-variété  $W^p$ . Le problème ici considéré est le suivant :

Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une classe d'homologie  $z \in H_p(V^n)$  donnée d'avance soit réalisable par une sous-variété.

On ne considèrera ici que les variétés paracompactes, différentiables de classe  $C^\infty$ ; les sous-variétés sont supposées différentiablement plongées de classe  $C^\infty$  (l'indice supérieur porté derrière le symbole d'une variété, tel que  $V^n$ , désigne la dimension de la variété). Les coefficients sont pris dans le groupe  $Z_2$ , ou dans le groupe  $Z$ ; en ce dernier cas variété et sous-variété seront supposées orientables.

1. Théorèmes généraux.

A. Un théorème sur les applications différentiables. - Nous aurons besoin pour la suite du théorème :

THÉORÈME 1. - Soit  $f$  une application de  $V^n$  dans  $M^p$ , et soit  $N^{p-q}$  une sous-variété compacte de  $M^p$  ( $n > q$ ); il existe alors une application  $F$  voisine de  $f$  (on peut même supposer que  $F = f$  à l'extérieur d'un voisinage de  $f^{-1}(N^{p-q})$ ), telle que :

- 1° L'image réciproque  $F^{-1}(N^{p-q})$  est une sous-variété  $W^{n-q}$  de  $V^n$ .
- 2° L'espace fibré des vecteurs normaux à  $W^{n-q}$  dans  $V^n$  est induit de l'espace fibré des vecteurs normaux à  $N^{p-q}$  par l'application  $F$ .

Nous ne pouvons donner ici la démonstration relativement longue de ce théorème; disons seulement qu'elle se fonde sur le résultat suivant :

l'ensemble des valeurs critiques d'une application différentiable de classe  $C^n$ ,  $f : V^n \rightarrow R^q$  est un sous-ensemble maigre de  $R^q$  ( $n > q$ )

Soit  $G$  un groupe de Lie, sous-groupe du groupe orthogonal  $O(k)$ . On sait que tout espace  $E$ , fibré en sphères  $S^{k-1}$ , qui admet  $G$  pour groupe de structure, est induit d'un espace fibré universel  $E_G$ , de base  $B_G$ . Si l'on suppose de plus que l'espace  $E$  est de dimension finie  $N$ , alors il existe un espace universel  $E_G$  dont la base  $B_G$  est une variété compacte. Désignons par  $A_G$  l'espace fibré en  $k$ -boules associé à l'espace  $E_G$ , obtenu en "remplissant" les sphères fibres  $S^{k-1}$ . On appellera complexe associé à  $G < O(k)$  l'espace (noté  $M(G(k))$ ) obtenu à partir de  $A_G$  par identification en un point  $a$  de son bord  $E_G$ .

La cohomologie de l'espace  $M(G(k))$  est aisée à déterminer, grâce aux isomorphismes :

$$\varphi_G^* : H^{r-k}(B_G) \rightarrow H^r(A_G, E_G) \rightarrow H^r(M(G(k))) \quad r > 0$$

où l'isomorphisme  $\varphi_G^*$  de la théorie des espaces fibrés en  $k$ -boules est défini en coefficients entiers si l'espace  $E_G$  est orientable ( $G$  connexe à coefficients dans  $Z_2$ , en général. En particulier, le premier groupe  $H^r(M(G(k)))$  ( $r > 0$ ) non nul est  $H^k(M(G(k)))$ ; il est engendré par la classe  $U = \int \omega_G^*$ , où  $\omega_G$  désigne la classe-unité de  $H^0(B_G)$ . La classe  $U$ , classe fondamentale du complexe  $M(G(k))$ , est à coefficients dans  $Z$  si  $G$  est connexe, dans  $Z_2$  si  $G$  est non connexe.

THÉOREME 2. - Soit  $z \in H_{n-k}(V^n)$ ,  $k > 0$ , une classe d'homologie de la variété compacte  $V^n$  et  $u \in H^k(V^n)$  la classe de cohomologie qui lui correspond par la dualité de Poincaré. Pour que  $z$  soit réalisable par une sous-variété  $W^{n-k}$  dont l'espace fibré des vecteurs normaux admette  $G$  pour groupe de structure, il faut et il suffit qu'il existe une application  $f : V^n \rightarrow M(G(k))$ , telle que si  $f^*$  désigne l'homomorphisme induit par  $f$  sur les cohomologies, on ait :  $u = f^*(U)$ .

La condition est nécessaire. - Supposons la classe  $z$  réalisée par une sous-variété  $W^{n-k}$ ; munissons  $V^n$  d'une métrique riemannienne; l'ensemble  $N$  des points de  $V^n$ , dont la distance à  $W^{n-k}$  est inférieure à  $\epsilon$ , est, pour  $\epsilon$  assez petit, fibré sur  $W^{n-k}$  en  $k$ -boules géodésiques normales. Soit  $T$  la variété-bord de  $N$ : c'est aussi le bord du complémentaire  $\int N$ ; l'espace fibré  $N$ , isomorphe à l'espace des vecteurs normaux à  $W^{n-k}$ , admet par hypothèse  $G$  pour groupe de structure; c'est dire qu'il existe une application  $g$  de  $N$  dans

l'espace universel  $A_G$ , qui applique fibre sur fibre ; en particulier,  $g$  applique le bord  $T$  de  $N$  dans le bord  $E_G$  de  $A_G$  ; l'application composée :

$$N \rightarrow A_G \rightarrow M(G(k))$$

se prolonge donc au complémentaire  $\int N$ , il suffit de poser  $f : \int N \rightarrow a$  ; si on désigne par  $\check{\varphi}$  l'isomorphisme  $\check{\varphi}$  relatif à l'espace fibré  $N$ , on a :

$$f^*(U) = g^*(\varphi_G^*(\omega_G)) = \check{\varphi}^*(\omega) = u$$

car, on peut montrer que la classe  $\check{\varphi}^*(\omega)$  est duale du cycle fondamental porté par la sous-variété  $W^{n-k}$ .

La condition est suffisante. - Supposons qu'il existe  $f : V^n \rightarrow M(G(k))$  telle que  $f^*(U) = u$  ; la restriction de  $f$  à l'ouvert  $V^n - f^{-1}(a)$  applique cet ouvert dans  $M(G(k)) - a$ , qui est une variété contenant  $B_G$  comme sous-variété dont l'espace des vecteurs normaux admet  $G$  pour groupe de structure. Par application du théorème 1, on trouvera une application  $F$  voisine de  $f$ , telle que  $W^{n-k} = F^{-1}(B_G)$  soit une sous-variété dont l'espace fibré des vecteurs normaux admette  $G$  pour groupe de structure ; on aura ici encore  $u = f^*(U) = F^*(U) = \check{\varphi}^*(\omega)$ , ce qui montre que la classe  $u$  est duale du cycle fondamental porté par  $W^{n-k}$ .

Le théorème 2 ramène ainsi notre problème à un problème classique en topologie : prolongement d'une application d'un espace dans un autre. Il n'est pas question ici d'exposer la théorie des obstructions consacrée à la résolution de ce problème. Par contre, rappelons quelques résultats relatifs aux complexes d'Eilenberg-MacLane.

Pour tout groupe abélien de type fini  $\mathcal{T}$ , il existe un espace  $K(\mathcal{T}, k)$  dont tous les groupes d'homotopie sont nuls à l'exception de  $\pi_k(K(\mathcal{T}, k)) \cong \mathcal{T}$  ;  $H_k(K(\mathcal{T}, k); Z) \cong \mathcal{T}$ , et le groupe de cohomologie  $H^k(K(\mathcal{T}, k); \mathcal{T}) = \text{Hom}(\mathcal{T}, \mathcal{T})$  possède une classe fondamentale  $j$  ; pour toute classe de cohomologie  $u \in H^k(A; \mathcal{T})$  d'un espace arbitraire  $A$ , il existe une application  $g : A \rightarrow K(\mathcal{T}, k)$ , telle que  $g^*(j) = u$ . Si donc on cherche à appliquer  $A$  dans  $M(G(k))$ , on pourra chercher à trouver une application  $h : K(\mathcal{T}, k)$  dans  $M(G(k))$ , telle que  $h^*(U) = j$  ; si une telle application  $h$  existe, alors l'application  $f = h \circ g$  est telle que  $f^*(U) = u$  et elle est définie pour un espace arbitraire  $A$  (en particulier, pour toute variété  $V^n$ ) ; en général, une telle application  $h$  n'existe pas ; le prolongement de  $h$  au  $r^0$ -squelette de  $K(\mathcal{T}, k)$  est en général interdit par une obstruction, classe de  $H^r(K(\mathcal{T}, k))$  qu'on sait en général déterminer par la théorie des obstructions.

2. Résultats.

1° Supposons  $G$  réduit à l'élément neutre  $e$ . - Alors  $B_G$  se réduit à un point  $A_G$  à une  $k$ -boule, et  $M(e(k))$  est une sphère  $S^k$ . Soit  $E$  un espace,  $u \in H^k(E, Z)$  une classe de cohomologie entière de  $E$ . On dit que  $u$  est une classe sphérique s'il existe une application  $f : E \rightarrow S^k$ , telle que  $u = f^*(s^k)$  où  $s^k$  désigne un générateur du groupe cyclique  $H^k(S^k; Z)$ . La théorème 2 donne alors :

THEOREME 3. - Pour qu'une classe d'homologie  $z \in H_{n-k}(V^n; Z)$  soit réalisable par une sous-variété  $W^{n-k}$  dont l'espace fibré des vecteurs normaux soit trivial, il faut et il suffit que la classe de cohomologie  $u \in H^k(V^n)$  duale de  $z$  soit sphérique.

On ne connaît pas, en général, les conditions suffisantes pour qu'une classe de cohomologie donnée soit sphérique; néanmoins, J.-P. SERRE a démontré le théorème suivant :

Pour toute classe  $x \in H^k(A; Z)$  d'un espace  $A$  de dimension finie  $n$ , il existe, si  $k$  est impair, ou  $n < 2k$ , un entier non nul  $N$  (ne dépendant que de  $k$  et  $n$ ) tel que la classe multiple  $N \cdot x$  soit une classe sphérique.

De là résulte :

THEOREME 4. - Pour toute classe d'homologie  $z \in H_{n-k}(V^n; Z)$ , avec  $k$  impair ou  $n < 2k$ , il existe un entier non nul  $N$  (ne dépendant que de  $k$  et  $n$ ) tel que la classe multiple  $N \cdot x$  soit réalisable par une sous-variété  $W^{n-k}$  dont l'espace fibré des vecteurs normaux soit trivial.

2°  $G$  est le groupe orthogonal  $O(k)$  (non connexe).

La classe fondamentale  $U \in H^k(M(O(k)))$  est alors à coefficients dans  $Z_2$ ; une étude détaillée de la cohomologie de  $M(O(k))$  donne les résultats suivants :

L'application  $h : K(Z_2, k) \rightarrow M(O(k))$  peut être définie pour  $k = 1$ ; pour  $k > 1$ , elle n'existe pas; cependant  $h$  peut être définie, pour tout  $k$  sur le  $2k$ -squelette de  $K(Z_2; 2)$ ; et ce résultat ne peut être amélioré, car, pour  $k = 2$ , on a une obstruction en dimension 5, classe de  $H^5(K(Z_2, 2); Z)$ , qu'on peut écrire comme  $\frac{1}{2} \delta p(j)$ , où  $p(j)$  désigne le carré de Pontrjagin de la classe fondamentale  $j$ . De là on tire :

THEOREME 5. - Toutes les classes des groupes d'homologie mod 2 suivants sont réalisables par des sous-variétés :

$H_{n-1}(V^n; Z_2)$  pour tout  $n$  ;  $H_{n-2}(V^n; Z_2)$  pour  $n < 6$  ;  $H_1(V^n; Z_2)$  pour  $n$  , si  $i < [n/2]$  .

3°  $G$  est le groupe des rotations (connexe)  $SO(k)$  .

La classe fondamentale  $U \in H^k(M(SO(k)))$  est alors à coefficients entiers. On essaiera par suite de former une application  $h : K(Z, k) \rightarrow M(SO(k))$  , telle que  $h^*(U) = j$  . Une telle application  $h$  existe pour  $k = 1$  et  $2$  . Par contre, pour  $k > 3$  ,  $h$  ne peut être définie sur le  $(k + 5)$ -squelette à cause d'une obstruction, classe de  $H^{k+5}(K(Z, k); Z)$  qui n'est autre que le cube de Steenrod  $St_3^5(j)$  de la classe fondamentale  $j$  . Donc :

THÉOREME 6. - Les classes des groupes d'homologie suivants sont réalisables par des sous-variétés (orientables dans  $V^n$  orientable) :

$H_{n-1}(V^n; Z)$  ;  $H_{n-2}(V^n; Z)$  pour tout  $n$

$H_{n-k}(V^n; Z)$  pour  $n < k + 6$  ( $H_1(V^n; Z)$  pour  $i \leq 5$ ) .

En particulier, toutes les classes des variétés de dimension  $< 9$  sont réalisables.

Notons en passant la condition nécessaire suivante :

THÉOREME 7. - Pour qu'une classe d'homologie  $z \in H_{n-k}(V^n; Z)$  soit réalisable, il faut que la classe de cohomologie  $u \in H^k(V^n; Z)$  duale de  $z$  satisfasse à  $St_p^{2m(p-1)+1}(u) = 0$  pour tout entier  $m$  et tout premier  $p$  impair.

Les résultats obtenus en ce cas sont donc bien moins complets que ceux obtenus dans le cas  $Z_2$  ; cependant, si l'on s'intéresse seulement à la réalisation d'une classe à un coefficient près, on peut donner au théorème 4 une généralisation, qui repose sur le lemme que voici :

LEMME. - Soit  $Y$  un espace tel que la composante libre du groupe d'homotopie  $\pi_k(Y)$  soit isomorphe à  $Z$  de générateur  $t$  . Supposons de plus que tous les groupes de cohomologie  $H^{q+1}(K(Z, k); \pi_q(Y))$  soient finis, les  $\pi_q(Y)$  pour  $q \geq k$  étant eux-mêmes de type fini. Il existe alors un entier non nul  $N_q$  et une application  $g_q$  du  $q$ -squelette de  $K(Z, k)$  dans  $Y$  telle que  $g_q$  applique un générateur du groupe  $\pi_k(K(Z, k)) \cong Z$  sur  $N_q \cdot t$  .

Ce lemme s'applique à la grassmannienne  $G_k$  des  $k$ -plans orientés, qui forme le sous-espace  $A_G$  de  $M(SO(k))$  , tout au moins pour  $k$  pair.

On obtient ainsi :

THÉOREME 8. - Pour toute classe  $z \in H_{n-k}(V, Z)$  avec  $k$  pair, il existe un entier non nul  $N$  ne dépendant que de  $k$  et  $n$  tel que la classe multiple  $N \cdot z$  soit réalisable par une sous-variété.

Les théorèmes 4 et 8 montrent qu'ainsi, du point de vue de l'homologie à coefficients réels (qui est celui des géomètres différentiels) toute classe d'homologie entière peut être réalisée par une sous-variété ; en homologie mod 2, cette affirmation n'est valable que pour les classes dont la dimension est inférieure à la moitié de la dimension de la variété.

### 3. Variétés associées à polyèdre fini. Problème de Steenrod.

Soit  $K$  un polyèdre fini, de dimension  $r$  ;  $K$  peut être rectilinéairement plongé dans un  $R^m$ , si  $m \geq 2r + 1$  ; il est alors possible de définir (par exemple comme solution d'un problème de Dirichlet) une fonction  $F$ , nulle sur  $K$ , différentiable de classe  $C^\infty$  et  $> 0$  sur le complémentaire de  $K$ , soit  $c$  une valeur (non critique) de  $F$ , assez petite ; l'image réciproque  $F^{-1}[0, c]$  est une variété à bord  $M$ , dont on peut former la variété "dédoublément"  $V^m$ , qui est compacte ; supposons que  $c$  a été prise assez petite pour que  $M$  soit tout entier contenu dans un voisinage ouvert de  $U$  de  $K$ , dont  $K$  est un rétracte ; il est aisé de montrer que l'anneau de cohomologie  $H^*(V^m)$  contient un sous-anneau isomorphe à  $H^*(K)$  (et cet isomorphisme est compatible avec toutes les opérations définies en cohomologie) .

On conçoit qu'il soit ainsi possible de construire des variétés pour lesquelles les obstructions mises plus haut en évidence ne sont pas nulles ; si, par exemple, on prend pour  $K$  le 5-squelette de  $K(Z_2, 2)$ , ou le 8-squelette de  $K(Z, 3)$ , on obtient des variétés  $V^{11}$  et  $V^{17}$  respectivement, pour lesquelles une classe de  $H_9(V^{11}; Z_2)$  (ou  $H_{14}(V^{17}; Z)$  respectivement, n'est pas réalisable (les obstructions  $\frac{1}{2} \delta p(j)$  et  $St_3^5(j)$  n'étant pas nulles). Ce sont là des exemples, les plus simples que je connaisse, de classes non réalisables ; il n'est pas exclu qu'il s'en trouve dans des variétés de dimension moins élevée, ou de construction moins artificielle. Par exemple dans le groupe exceptionnel  $F_4$ , il existe des classes entières pour lesquelles  $St_3^5$  n'est pas nul (résultat de A. BOREL), et les classes d'homologie correspondantes ne sont pas réalisables.

Problème de Steenrod. - Etant donnée une classe d'homologie  $z \in H_p(K)$  d'un polyèdre fini  $K$ , existe-t-il une variété  $W^p$  et une application  $f : W^p \rightarrow K$ , telles que  $z$  soit l'image par  $f$  de la classe fondamentale de  $W^p$  ? La construction précédente peut quelquefois résoudre la question ; soient  $V^m$

une variété associée à  $K$  et  $z'$  l'image de la classe  $z$  par l'injection  $K \rightarrow M \rightarrow V$  ; supposons que  $z'$  dans  $V^m$  soit réalisable par une sous-variété  $W^p$  ; alors les applications inverses  $V \rightarrow M \rightarrow K$  (où  $M \rightarrow K$  est une rétraction) définissent la classe  $z$  comme image de la classe fondamentale de la variété  $W^p$  . On obtient ainsi :

Toute classe d'homologie mod 2 d'un polyèdre fini est l'image de la classe fondamentale d'une variété différentiable compacte.

Toute classe d'homologie entière de dimension  $< 5$  d'un polyèdre fini est l'image de la classe fondamentale d'une variété orientable différentiable compacte.

Pour toute classe  $z$  d'homologie entière de  $\dim p$  d'un polyèdre fini, il existe un entier  $N$  non nul, ne dépendant que de  $p$  , tel que la classe multiple  $N \cdot z$  soit l'image de la classe fondamentale d'une variété orientable différentiable compacte.

ADDITIF

Pour une démonstration des résultats ici présentés, se reporter à :

- [1] THOM (René). - Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment. Math. Helv., t. 28, 1954, p. 17-86.

[Février 1958]