ROGER GODEMENT

Travaux de Hecke, III

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. nº 74, p. 237-246

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__237_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1953)

TRAVAUX DE HECKE, III,

par Roger GODEMENT.

Le but de cet exposé est de rappeler les résultats classiques sur les fonctions modulaires ; on aurait évidemment tort de se laisser impressionner par le titre, et de croire que ces résultats sont dûs à HECKE ; la contribution de celui-ci à la théorie fera l'objet de l'exposé suivant (relations entre fonctions modulaires et séries de Dirichlet possédant une équation fonctionnelle et un développement en produit infini).

1. Groupe modulaire, domaine fondamental, générateurs.

Le groupe modulaire Γ est l'ensemble des substitutions $z' = \frac{az+b}{cz+d}$, a , b , c , d entiers vérifiant $ad - bc = 1$. Posant $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$ on a $y' = |cz + d|^{-2}.y$ d'où résulte que Γ conserve le demi-plan $y > 0$. Deux points de ce demi-plan seront dits équivalents s'ils se déduisent l'un de l'autre par une substitution de Γ .

Soit $z = x + iy$ un point du demi-plan. Comme Γ contient les translations $z \longrightarrow z + n$, z est équivalent à un point pour lequel $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ et ayant le même y ; de plus comme tout $z' \sim z$ vérifie $y' = |cz + d|^{-2}.y$ on voit trivialement que les $z' \sim z$ tels que $y' > y$ sont en nombre fini ; il existe donc un $z' \sim z$ pour lequel :

1° $|x'| \leqslant \frac{1}{2}$;

2° y' est maximum.

On peut supposer que $z' = z$. Pour toute substitution de Γ on a alors $|cz + d| \geqslant 1$ (vu que y est maximal) et en particulier on a $|z| \geqslant 1$.

Si on désigne donc par D l'ensemble

$$D : \qquad |x| \leqslant \frac{1}{2} , \qquad |z| \geqslant 1$$

on voit que tout point du demi-plan est équivalent à un point de D . Il est de plus facile de vérifier que deux points <u>intérieurs</u> à D ne sont jamais équivalents. On obtient donc un domaine fondamental de D en ôtant de D des morceaux bien choisis de sa frontière, morceaux que le lecteur trouvera tout seul.

Γ est engendré par les substitutions

$$S : z \longrightarrow z + 1 \qquad ; \qquad T : z \longrightarrow - 1/z \quad ;$$

soit en effet $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; si $c = 0$ il est clair que $A = S^b$ (car $ad = 1$ avec a, d entiers déterminés au facteur ± 1 près) ; si $c \neq 0$, remarquons que

$$S^n A = \begin{pmatrix} a+nc & , & b+nd \\ c & , & d \end{pmatrix} \quad ;$$

il s'ensuit que pour n convenablement choisi (diviser a par c!) $A' = S^n A$ vérifie $|a'| < |c'|$ donc $A'' := TS^n A$ vérifie $|c''| < |c|$, d'où, par récurrence sur c, le fait que A appartient au groupe engendré par S et T.

2. Formes modulaires entières.

On appelle forme modulaire entière de dimension $-k$ (k entier) toute fonction $f(z)$ holomorphe dans le demi-plan et vérifiant :

(i) : $$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (cz + d)^k f(z) \quad \text{pour toute substitution de } \Gamma \;;$$

(ii) : f est bornée dans le domaine fondamental D.

Ces formes constituent un espace vectoriel $\mathfrak{F}_k$. Pour que $\mathfrak{F}_k$ ne soit pas nul il faut que k soit pair et positif. La condition k pair est évidente (multiplier $a, \dots, d$ par -1) ; par ailleurs la relation $y' = |cz + d|^{-2} y$ montre que, si $f \in \mathfrak{F}_k$, la fonction $y^{k/2}|f(z)|$ est absolument invariante par Γ ; comme $y^{k/2}$ est borné dans D pour $k \leq 0$, on voit que dans ce dernier cas la fonction $y^{k/2} f(z)$ est bornée dans le demi-plan tout entier, i.e. on a une relation

(1) $$|f(z)| \leqslant M . y^{-k/2} \quad ;$$

or la propriété (i) montre que $f(z + 1) = f(z)$, d'où un développement

$$f(z) = \sum a_n . e^{2\pi i n z}$$

dans le demi-plan ; on a de plus

$$a_n e^{-2\pi n y} = \int_0^1 f(x + iy) e^{-2\pi i n x} dx$$

pour tout $y > 0$, en sorte que (1) implique $|a_n| \leqslant M . y^{-k/2} . e^{2\pi n y}$; si $k < 0$ il s'ensuit que $a_n = 0$ pour tout n (faire tendre y vers 0). Si $k = 0$, la même inégalité montre déjà que $a_n = 0$ pour $n < 0$ (faire tendre y vers $+\infty$), d'où résulte que f est continue dans le compact obtenu en adjoignant à D le point à l'infini ; retranchant à f la constante $a_0 = f(\infty)$ on peut supposer $f(\infty) = 0$; alors f atteint son maximum dans D en un point $\neq \infty$; mais comme f est absolument invariante son maximum dans D est aussi son maximum dans le demi-plan, d'où $f = 0$. Donc $\dim(\mathfrak{F}_0) = 1$.

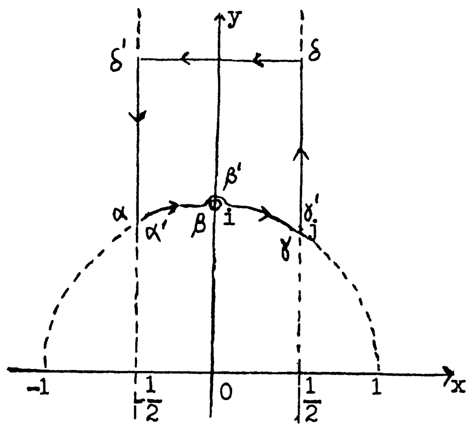
On n'a donc à considérer que les espaces $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_4$, ...

Remarquer que la formule donnant les coefficients de Fourier d'une forme modulaire f , jointe à la condition (ii), donne toujours une relation de la forme $|a_n| \leqslant M.e^{2\pi ny}$; en conséquence, le développement d'une forme modulaire est toujours de la forme

$$f(z) = \sum_{0}^{+\infty} a_n.e^{2\pi inz} \quad , \tag{2}$$

ce qui dénote un "bon" comportement à l'infini (i.e. quand on tend à l'infini sur une verticale).

3. Zéros des formes modulaires.



Soit $\overline{D}$ le compact déduit de D par adjonction du point à l'infini ; toute forme modulaire f a dans $\overline{D}$ un nombre fini de zéros, vu la régularité à l'infini ; le développement (2) montre que f est une série entière en $t = e^{2\pi iz}$, ce qui permet de parler de l'ordre de f à l'infini (plus petit n tel que $a_n \neq 0$) ; désignons-le par n_∞ ; désignons de même par n_i et n_j les ordres ($\geqslant 0$) des zéros i et j de f ; enfin, soit n le nombre de zéros de f dans D situés en dehors des "sommets", calculé en tenant compte des ordres de ces zéros et en ne comptant qu'une fois deux zéros qui se déduisent l'un de l'autre par Γ . Alors si l'on intègre $d \log f(z)$ sur le contour figuré ci-dessus, avec $\delta\delta'$ assez haut, on trouve par des calculs faciles la relation

$$k/12 = n + n_\infty + n_i/2 + n_j/3 \tag{3}$$

où $-k$ est la dimension de f . Les nombres n , n_∞ , n_i n_j devant être des entiers $\geqslant 0$, on retrouve ainsi le fait que $\mathfrak{F}_k = 0$ pour $k < 0$ ou k impair ; on retrouve aussi $\mathfrak{F}_2 = 0$.

De plus, soient f et g de même dimension $-k$; il est clair que f/g est absolument invariante ; si f et g ont exactement les mêmes zéros f/g est partout holomorphe, donc constante. Cela va nous donner des renseignements sur la dimension de $\mathfrak{F}_k$ pour k petit.

<u>$k = 4$</u> . L'équation (3) n'admet pas d'autre solution que

$$n = n_\infty = n_i = 0 \quad ; \quad n_j = 1 \quad ;$$

donc $\dim(\mathfrak{F}_4) \leqslant 1$;

<u>$k = 6$</u> . La seule solution de (3) est $n = n_\infty = n_j = 0$, $n_i = 1$. Donc $\dim(\mathfrak{F}_6) \leqslant 1$.

<u>$k = 8$</u> . La seule solution de (3) est $n = n_\infty = n_i = 0$, $n_j = 2$. Par suite $\dim(\mathfrak{F}_8) \leqslant 1$.

<u>$k = 10$</u> . La seule solution de (3) est $n = n_\infty = 0$, $n_i = n_j = 1$. Donc $\dim(\mathfrak{F}_{10}) \leqslant 1$.

<u>$k = 12$</u> . Cette fois il y a plusieurs possibilités,

4. <u>Séries d'Eisenstein</u>.

<u>Pour</u> $k > 2$, <u>la série</u>

(4) $$G_k(z) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} (mz + n)^{-k}$$

<u>converge absolument et uniformément sur tout compact du demi-plan</u> ; <u>elle représente une forme modulaire de dimension</u> $-k$, <u>non identiquement nulle si</u> k <u>est pair</u>.

En effet, pour z non réel, l'expression $|mz + n|^2$ est une forme quadratique <u>définie</u> positive en m , n d'où une relation $|mz + n|^2 \geqslant M.(m^2 + n^2)$, ce qui prouve la convergence absolue de (4) pour $k > 2$. L'uniformité de la convergence sur tout compact se voit de façon évidente, ainsi que le fait que G_k est une forme modulaire de dimension $-k$. D'ailleurs, on vérifie facilement que la série est <u>normalement</u> convergente dans le domaine fondamental D ; cela permet de passer à la limite pour $z = iy$, $y \longrightarrow +\infty$, d'où résulte que

(5) $$\lim_{y \longrightarrow +\infty} G_k(iy) = \sum_{n\neq 0} n^{-k} = 2.\zeta(k) \quad \text{si } k \text{ pair}$$

en sorte que G_k n'est pas identiquement nulle.

COROLLAIRE. - $\mathfrak{F}_4$, $\mathfrak{F}_6$, $\mathfrak{F}_8$ <u>et</u> $\mathfrak{F}_{10}$ <u>sont de dimension</u> 1 , et formés respectivement des multiples scalaires de G_4 , G_6 , G_8 et G_{10} . De plus les renseignements du numéro précédent donnent les zéros de ces séries d'Eisenstein dans le domaine fondamental :

G_4 a un zéro d'ordre 1 en j ;

G_6 a un zéro d'ordre 1 en i ;

G_8 a un zéro d'ordre 2 en j ;

G_{10} a un zéro d'ordre 1 en i et un zéro d'ordre 1 en j .

De plus, comme le produit d'une forme de dimension k et d'une forme de dimension h est une forme de dimension $k + h$, on voit que

$$G_8 \text{ est proportionnelle à } G_4^2 \,;$$

$$G_{10} \text{ est proportionnelle à } G_4 G_6 \,;$$

les facteurs de proportionnalité se calculent à l'aide de (5).

5. Dimension de $\mathfrak{F}_k$.

Commençons par $\mathfrak{F}_{12}$. Pour $k = 12$ la relation (3) s'écrit

$$1 = n + n_\infty + n_i/2 + n_j/3 \,.$$

Celle-ci admet la solution $n = n_i = n_j = 0$, $n_\infty = 1$; il lui correspond effectivement une forme modulaire. En effet, il est clair que $a.G_4^3 - b.G_6^2$ est de dimension 12 quelles que soient les constantes a et b ; vu les valeurs à l'infini de G_4 et G_6 , à savoir

$$G_4 = 2.\,\zeta(4) = \pi^4/45 \quad ; \quad G_6 = 2.\,\zeta(6) = 2\,\pi^6/7.45$$

il suffit de prendre $a = 20$, $b = 49$ pour que

$$\Delta(z) = 20.G_4(z)^3 - 49.G_6(z)^2 \tag{6}$$

soit nulle à l'infini ; en outre Δ n'est pas identiquement nulle vu que pour $z = i$ la forme G_6 est nulle et non G_4 .

On voit donc que $\mathfrak{F}_{12}$ contient au moins deux formes non proportionnelles, savoir Δ et G_{12} . Ces deux formes engendrent $\mathfrak{F}_{12}$; car si $f \in \mathfrak{F}_{12}$, comme G_{12} ne s'annule pas à l'infini il existe a tel que $f - aG_{12}$ soit nul à l'infini ; en vertu de la relation (3) $f - a.G_{12}$ possède exactement les mêmes zéros que Δ donc lui est proportionnelle.

<u>Toute forme de dimension</u> $-k$ <u>s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des formes</u> $G_{k-12n}.\Delta^n$ $(n \geqslant 0\ ,\ k - 12n \geqslant 4)$. En effet soit f de dimension $-k$ comme $G_k(\infty) \neq 0$ il existe a_0 unique tel que $f - a_0.G_k$ soit nulle à l'infini ; comme Δ ne s'annule qu'a l'infini on a donc $f - a_0.\,G_k = \Delta.f'$ où f' est une forme de dimension $k - 12$, etc.

Il suit immédiatement de là que

$$r_k = \dim(\mathcal{F}_k) = \begin{cases} [\frac{k}{12}] + 1 & \text{si } k \not\equiv 2 \bmod 12 \\ [\frac{k}{12}] & \text{si } k \equiv 2 \bmod 12 \end{cases}$$

Cela permet d'exhiber des bases de $\mathcal{F}_k$ pour k petit ;

$k = 4 : G_4$; $k = 12 : G_{12} , \Delta$; $k = 20 : G_{20} , \Delta . G_8$;

$k = 6 : G_6$; $k = 14 : G_{14}$; $k = 22 : G_{22} , \Delta . G_{10}$;

$k = 8 : G_8$; $k = 16 : G_{16} , \Delta . G_4$; $k = 24 : G_{24} , \Delta . G_{12}, \Delta^2$;

$k = 10 : G_{10}$; $k = 18 : G_{18} , \Delta . G_6$; $k = 26 : G_{26} , \Delta . G_{14}$;

$k = 28 : G_{28} , \Delta . G_{16} , \Delta^2 . G_4$; ...

Noter encore que <u>toute forme modulaire est un polynôme "isobare" en G_4 et en G_6</u> ; démonstration évidente par récurrence sur k .

6. <u>La fonction</u> $\eta(z) = \sqrt[24]{\Delta(z)}$.

Comme on l'a vu la fonction Δ ne s'annule qu'à l'infini ; ses racines sont donc uniformes dans le demi-plan. On va montrer qu'en particulier sa racine 24e possède une développement trigonométrique remarquable. Cette fonction intervient dans le problème de Waring pour 24 carrés, et n'est pas l'un des ornements les moins étranges de la théorie.

Rappelons d'abord (cf. les exposés de l'an dernier ([1])) la formule de transformation des fonctions θ . Soit χ un caractère propre modulo m , vérifiant $\chi(-1) = +1$, et formons

(7) $$\theta(z ; \chi) = \frac{1}{2} \sum \chi(n) . e^{\pi i n^2 z/m} \quad ;$$

on a alors

(8) $$\theta(-\frac{1}{z} ; \chi) = \varepsilon(\chi) . \sqrt{-iz} . \theta(z ; \overline{\chi})$$

(9) $$\varepsilon(\chi) = m^{-\frac{1}{2}} \sum_{a \bmod m} \chi(a) . e^{2\pi i a/m} \quad ,$$

([1]) GODEMENT (Roger). - Travaux de Hecke, I et II, Séminaire Bourbaki, t. 4, 1951/52.

et l'on sait que $\varepsilon(\chi)$ est une racine m-ième de l'unité.

Prenons $m = 12$; le groupe $G(12)$ des classes premières à 12 se compose des éléments 1 , 5 , 7 , 11 , qui vérifient tous $n^2 \equiv 1$ modulo 24 ; il s'ensuit immédiatement que, pour cette valeur de m , on aura

$$\theta(z+1\,;\,\chi) = e^{\pi i/12}.\theta(z\,;\,\chi) \tag{10}$$

quel que soit χ propre. Comme d'ailleurs χ doit vérifier $\chi(-1) = +1$, on voit que le seul caractère propre <u>réel</u> modulo 12 qui convient est donné par

$$\chi(1) = 1 \quad ; \quad \chi(5) = -1 \quad ; \quad \chi(7) = -1 \quad ; \quad \chi(11) = +1 \quad . \tag{11}$$

Pour ce caractère le calcul de $\varepsilon(\chi)$ est trivial et donne $\varepsilon(\chi) = +1$. La fonction θ correspondante vérifie donc, outre (10), la relation

$$\theta(-\tfrac{1}{z}\,;\,\chi) = \sqrt{-iz}.\theta(z\,;\,\chi)\ . \tag{12}$$

Les relations (11) donnent immédiatement

$$\theta(z\,;\,\chi) = e^{\pi iz/12}(1 - e^{2\pi iz} - e^{4\pi iz} + \ldots) \tag{13}$$

en sorte que θ^{24} est nulle à l'infini, holomorphe dans le demi-plan, et vérifie d'après (10) et (12) la propriété fonctionnelle des formes modulaires de dimension -12 . On en conclut que θ^{24} <u>est proportionnelle à</u> Δ .

On peut du reste simplifier le développement en série de θ , à l'aide de (11) ; on trouve par des calculs évidents la formule

$$\eta(z) = e^{\pi iz/12}\sum (-1)^n.e^{(3n^2+n)\pi iz} \tag{14}$$

qui n'est du reste valable que si l'on a pris soin de "normer" convenablement la fonction Δ (ce que nous n'avons pas fait).

On peut déduire de là un <u>développement en produit infini de</u> Δ . Pour z donné formons la fonction.

$$\theta(u) = \sum (-1)^n\,.e^{(3n^2+n)\pi iz+2\pi inu}\ , \tag{15}$$

holomorphe quel que soit u ; il est trivial de vérifier

$$\theta(u+1) = \theta(u) \quad ; \quad \theta(u+3z) = e^{-2\pi iu-4\pi iz+\pi i}.\theta(u)$$

de sorte qu'on a une fonction thêta elliptique. En intégrant $d\log\theta(u)$ le long du parallélogramme $(1\,,\,3z)$ les relations précédentes montrent que $\theta(u)$ n'a qu'un seul zéro dans ledit parallélogramme, d'ailleurs situé au point $u = z$ comme on le vérifie sur le développement en série. Les zéros de $\theta(u)$ dans le plan sont donc les points $m + (3n+1)z$; il en résulte, par les raisonnements classiques de la théorie des fonctions elliptiques, que

$$(16) \qquad \theta(u) = C(z).\prod_{n\geqslant 0}(1 - e^{2\pi iz(3n+1)-2\pi iu})\prod_{n\geqslant 1}(1 - e^{2\pi iz(3n-1)+2\pi iu})$$

où il reste, hélas, à déterminer le facteur $C(z)$.

Pour cela, on remarque tout d'abord que (16) implique

$$(17) \qquad \lim_{u=0}\frac{\theta(u+z)}{e^{2\pi iu}-1} = C(z)\prod_{n\geqslant 1}(1 - e^{6\pi inz})^2$$

et par (15)

$$= \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n(2n+1)e^{3\pi in(n+1)z} = f(3z)$$

où l'on pose

$$(18) \quad f(z) = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n(2n+1)e^{\pi in(n+1)z} = \frac{1}{2}e^{-\pi iz/4}\sum(-1)^n(2n+1)e^{\pi i(2n+1)^2z/4} ;$$

par les procédés usuels on vérifie facilement que cette fonction possède les formules de transformation suivantes :

$$f(z+1) = e^{\pi iz/4}f(z) \quad ; \quad f(-\tfrac{1}{z}) = i.(-iz)^{3/2}.f(z) \; ;$$

il s'ensuit que f^8 est une forme modulaire de dimension -12, et comme le développement de f commence par $2.e^{\pi iz/4}$ on voit que

$$(19) \qquad f(z) = 2.\eta(z)^3 ,$$

relation non évidente a priori ; autrement dit :

$$(20) \qquad \eta(z)^3 = \frac{1}{2}\sum(-1)^n(2n+1)e^{\pi in(n+1)z} ;$$

Cela dit, (19) et (17) montrent que

$$2.\eta(z)^3 = C(\tfrac{z}{3})\prod_{n\geqslant 1}(1 - e^{2\pi inz})^2 \; ;$$

mais vu $\eta(z) = e^{\pi iz/12}.\theta(0)$:

$$2.\eta(z) = e^{\pi iz/4}.\theta(0)^3 = e^{\pi iz/4}C(z)^3\prod_{\substack{n\geqslant 1\\ n\not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)}}(1 - e^{2\pi inz})^3$$

(utiliser (16)) ; posant

$$C(z) = g(z)\prod(1 - e^{6\pi inz})$$

la comparaison des deux relations précédentes donne

$$g(z+1) = g(z) \quad , \quad g(z)^3 = g(\tfrac{z}{3})$$

d'où immédiatement $g = \mathrm{Cte}$.

Il vient donc

$$\eta(z) = e^{\pi iz/12}.\theta(0) = C.e^{\pi iz/12} \prod_{n\geqslant 1} (1 - e^{2\pi inz})$$

où C est une constante ; vu le développement en série de $\eta(z)$ il est clair que $C = 1$, d'où les formules finales

$$(21) \qquad \eta(z) = e^{\pi iz/12} \prod_{n\geqslant 1} (1 - e^{2\pi inz}) \quad ; \quad \Delta(z) = e^{2\pi iz} \prod_{n\geqslant 1} (1 - e^{2\pi inz})^{24}$$

qui mettent en évidence les zéros de Δ , à savoir les points rationnels et l'infini (dans la mesure où l'on peut parler de zéros ...).

7. Série de Fourier de $G_k(z)$.

On a visiblement

$$G_k(z) = 2.\zeta(k) + \sum_{m\neq 0}\sum_{n} (mz + n)^{-k} \quad ;$$

posons $g(u) = (u + mz)^{-k}$; il faut calculer $\sum g(n)$, ce qu'on fait par la formule sommatoire de Poisson : $\sum g(n) = \sum \hat{g}(n)$. On doit donc calculer

$$\hat{g}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u + mz)^{-k} e^{-2\pi iuv}\, du ,$$

ce qui se fait aisément par les résidus ; en fait on aboutit ainsi à la formule

$$(22) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} e^{2\pi inz} = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi i)^s} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (n - z)^{-s} \quad (s > 1 \ ; \ \mathfrak{I}(s) > 0)$$

On en conclut

$$\frac{1}{2} G_k(z) = \zeta(k) + \sum_{m>0}\sum_{n} (mz + n)^{-k} = \zeta(k) + \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{m,n\geq 1} n^{k-1} e^{2\pi imnz}$$

d'où la formule définitive

$$(23) \qquad \frac{1}{2} G_k(z) = \zeta(k) + \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi inz}$$

où le coefficient de Fourier

$$(24) \qquad \sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

est une fonction simple des diviseurs de n (somme des puissances k-ième).

Noter que le développement de Δ en produit conduit à la formule

$$(25) \qquad \log \Delta(z) = 2\pi iz - 24 \sum_{n=1}^{n=\infty} \sigma_{-1}(n) e^{2\pi inz}$$

dont l'analogie avec (23) est frappante .

Tous les résultats exposés ici sont classiques, par contre, on verra dans le prochain laius des astuces dûes à HECKE et PETERSON.

Disons aussi qu'il est extrêmement important pour l'arithmétique d'étudier les formes modulaires relatives aux sous-groupes de congruence du groupe Γ , et de généraliser à ces sous-groupes la théorie des séries d'Eisenstein ; cela a été fait par HECKE vers 1927, et généralisé en partie à plusieurs variables dans la suite (MAAS, PETERSSON). On s'occupera plus tard de cet aspect de l'oeuvre de HECKE, qui permet de beaucoup mieux comprendre l'importance des séries d'EISENSTEIN.